Sistemas Dinámicos

Tema 2:

Ecuaciones diferenciales de orden superior

2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Como indicamos en el tema anterior, se llama **ecuación diferencial de orden "n"** a toda ecuación de la forma $F\left(x;y;y';y'';....;y^{n)}\right)=0$, siendo

$$y=f(x)\ ;\ y'=\frac{df(x)}{dx}\ ;\ y''=\frac{d^2f(x)}{dx^2}\ ;\ .....\ ;\ y^{n)}=\frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

A veces la expresión matemática de $F\left(x;y;y';y'';....;y^{n)}\right)=0$ es tan tonta que puede explicitarse (despejarse) la derivada de mayor orden $y^{n)}$, es decir, partir de $F\left(x;y;y';y'';....;y^{n)}\right)=0$ puede obtenerse $y^{n)}=h\left(x;y;y';y'';...;y^{n-1)}\right)$; en tal caso, único que estudiaremos, se dice que la ecuación diferencial es resoluble respecto de $y^{n)}$.

Por ejemplo, la ecuación $y''-x.y^2+y'.\text{sen } x=0$ es resoluble respecto de y'', pues puede explicitarse y'':

$$y''-x.y^2+y'.\text{sen } x=0 \Rightarrow y''=x.y^2-y'.\text{sen } x\equiv h(x;y;y')$$

Sin embargo, la ecuación de segundo orden $y''-x.y^2+y'.\text{sen } y''=0$ no es resoluble respecto de y'', pues no puede explicitarse y''.

Teorema de existencia y unicidad de solución

Sea la ecuación diferencial $y^{n)}=h\left(x;y;y';y'';....;y^{n-1)}\right)$. Puede demostrarse que si las funciones "h", $\partial h/\partial y$, $\partial h/\partial y'$, ... ,$\partial h/\partial y^{n-1)}$ son continuas en todo punto del conjunto cerrado $D\subseteq\Re^{n+1}$ y $(x_0;z_0;z_1;....;z_{n-1})$ es un punto interior a "D", existe una única función $y=\phi(x)$ que es solución de la ecuación $y^{n)}=h\left(x;y;y';y'';....;y^{n-1)}\right)$ y satisface las condiciones iniciales

$$\phi(x_0)=z_0\ ;\ \phi'(x_0)=z_1\ ;\ \phi''(x_0)=z_2\ ;\ ....\ ;\ \phi^{n-1)}(x_0)=z_{n-1}$$

Por ejemplo, siendo "x" el capital (expresado en dólares) que emplea una empresa cementera e $y(x)$ la correspondiente producción (expresada en toneladas), considera que $y'''=x^2.y^3.(y')^4+\text{sen } y''$. Así, como las funciones

$$\begin{aligned}
&h(x;y;y';y'')=x^2.y^3.(y')^4+\text{sen } y''\\
&\partial h(x;y;y';y'')/\partial y=3.x^2.y^2.(y')^4\\
&\partial h(x;y;y';y'')/\partial y'=4.x^2.y^3.(y')^3\\
&\partial h(x;y;y';y'')/\partial y''=\cos y''
\end{aligned}$$

son continuas en todo punto de $\Re^4$, podemos garantizar que existe una única función $\phi(x)$ que es solución de $y'''=x^2.y^3.(y')^4+\text{sen } y''$ y satisface las **condiciones iniciales** $\phi(2)=3$ Tm, $\phi'(2)=6$ Tm/\$ y $\phi''(2)=-2$ Tm/\$^{2}.

Solución general. Solución particular

Se llama **solución general** de una ecuación diferencial de orden "n" a la función $y = \varphi(x;C_1;\ldots;C_n)$ que depende de "n" constantes arbitrarias $C_1,\ldots\ C_n$ y satisface la ecuación diferencial para cualesquiera valores de las constantes; además, sean cuales sean las condiciones iniciales que se impongan, pueden encontrarse valores concretos de $C_1,\ldots,C_n$ $(C_1 = C_1^*,\ldots,C_n = C_n^*)$ tales que $y = \varphi(x;C_1^*;\ldots;C_n^*)$ satisface dichas condiciones iniciales.

Siendo $y = \varphi(x;C_1;\ldots;C_n)$ la solución general de una ED de orden "n", se llama **solución particular** a toda función obtenida al asignar valores con-cretos a las "n" constantes $C_1,\ldots,C_n$.

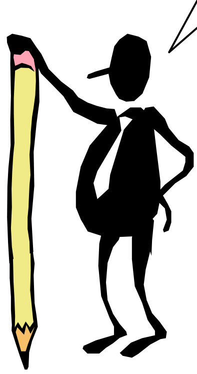
Por ejemplo, si la solución general de $F(x;y;y';y'') = 0$ es $y = C_1 + C_2.x$, al hacer $C_1 = 2$ y $C_2 = 7$ se obtiene la solución particular $y = 2 + 7.x$; y al hacer $C_1 = 4$ y $C_2 = -3$ se obtiene la solución particular $y = 4 - 3.x$.

El **caso más tonto** es $y^{n)} = u(x)$, y su lidia se reduce al cálculo de "n" primitivas. ***Por ejemplo:***

$$y''' = e^x \Rightarrow y'' = \int e^x.dx + C_1 = e^x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \int \left(e^x + C_1\right).dx + C_2 = e^x + C_1.x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int \left(e^x + C_1.x + C_2\right).dx + C_3 = e^x + \frac{1}{2}.C_1.x^2 + C_2.x + C_3$$



Interpretación geométrica

La solución general es una familia de curvas (dependiente de "n" constantes arbitrarias $C_1,\ldots,C_n$) **del plano; cada curva de la familia es la gráfica de una solución particular.**

Problema inverso

Si te dan una familia de curvas $G(x;y;C_1;\ldots;C_n) = 0$ y te piden que determines la ED de orden "n" cuya solución general es dicha familia, deberás eliminar las constantes $C_1,\ldots,C_n$ en el siguiente sistema de "n" ecuaciones:

$$G(x;y;C_1;....;C_n)=0$$
$$dG(x;y;C_1;....;C_n)/dx=0$$
$$d^2G(x;y;C_1;....;C_n)/dx^2=0$$
$$::::::::::::::::::::::::::::::::$$
$$d^{n-1)}G(x;y;C_1;....;C_n)/dx^{n-1}=0$$

Por ejemplo, para la familia $y-C_1-C_2.x=0$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} y-C_1-C_2.x=0 \\ d(y-C_1-C_2.x)/dx=0 \\ d^2(y-C_1-C_2.x)/dx^2=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y-C_1-C_2.x=0 \longrightarrow y-C_1-y'.x=0 \rightarrow C_1=y-y'.x \\ y'-C_2=0 \rightarrow C_2=y' \\ y''=0 \longrightarrow y''=0 \end{cases}$$

2.2 ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN REDUCIBLES DE ORDEN

- Las ecuaciones de la forma $y''=h(x;y')$ en las que no aparece "y", se reducen a ecuaciones de primer orden haciendo $y'=P(x)$. ***Por ejemplo:***

$$\boxed{y'=P(x)\Rightarrow y''=P'(x)}$$
$$y''=x.(y')^4+y'.e^x\equiv h(x;y')\Rightarrow P'(x)=x.(P(x))^4+P(x).e^x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{P'(x)-P(x).e^x=x.(P(x))^4}_{\text{Ecuación de Bernouilli}}$$

- Las ecuaciones de la forma $y''=h(y;y')$ en las que no aparece "x", se reducen a ecuaciones de primer orden haciendo $y'=P(y)$. ***Por ejemplo:***

$$\boxed{y'=P(y)\Rightarrow y''=\frac{dP(y)}{dx}=\frac{dP(y)}{dy}.\frac{dy}{dx}=P'(y).y'=P'(y).P(y) \quad \boxed{y'=P(y)}}$$
$$y''=(1-y)^2.(y')^3\equiv h(y;y')\Rightarrow P'(y).P(y)=(1-y)^2.(P(y))^3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{P'(y)=(1-y)^2.(P(y))^2}_{\text{Variables separables}}$$

- Las ecuaciones de la forma $y''=h(y')$ en las que no aparece "x" e "y", se reducen a ecuaciones de primer orden haciendo $y'=P(x)$. ***Por ejemplo:***

$$\boxed{y'=P(x)\Rightarrow y''=P'(x)}$$
$$y''=\text{sen } y'\equiv h(y')\Rightarrow \underbrace{P'(x)=\text{sen } P(x)}_{\text{Variables separables}}$$

KEYNES 2.2.1

Determínese la ED cuya solución general es la siguiente familia de curvas:

$$1)\ \ y = C_1.e^x + C_2.e^{2.x} + x\ \ ;\ \ 2)\ \ y = C_1.e^x + C_2.x^2 + C_3.x$$

SOLUCIÓN

Para determinar la ED de orden "n" cuya integral general es la familia de curvas $G(x;y;C_1;\ldots;C_n) = 0$ basta eliminar las constantes $C_1,\ldots,C_n$ en el sistema formado por las "n" ecuaciones

$$\begin{gathered} G(x;y;C_1;\ldots;C_n) = 0 \\ dG(x;y;C_1;\ldots;C_n)/dx = 0 \\ :: \\ d^{n-1)}G(x;y;C_1;\ldots;C_n)/dx^{n-1} = 0 \end{gathered}$$

1) Para la familia $y - C_1.e^x - C_2.e^{2.x} - x = 0$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} y - C_1.e^x - C_2.e^{2.x} - x = 0 \\ d(y - C_1.e^x - C_2.e^{2.x} - x)/dx = 0 \\ d^2(y - C_1.e^x - C_2.e^{2.x} - x)/dx^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - C_1.e^x - C_2.e^{2.x} - x = 0 \\ y' - C_1.e^x - 2.C_2.e^{2.x} - 1 = 0 \\ y'' - C_1.e^x - 4.C_2.e^{2.x} = 0 \end{array}\right.$$

De la tercera ecuación se obtiene $C_1 = y''.e^{-x} - 4.C_2.e^x$, y al sustituir en las dos primeras, resulta:

$$\left\{\begin{array}{l} y - \left(y''.e^{-x} - 4.C_2.e^x\right).e^x - C_2.e^{2.x} - x = 0 \\ y' - \left(y''.e^{-x} - 4.C_2.e^x\right).e^x - 2.C_2.e^{2.x} - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Tras simplificar, se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} y - y'' + 3.C_2.e^{2.x} - x = 0 \\ y' - y'' + 2.C_2.e^{2.x} - 1 = 0 \longrightarrow C_2 = \left(1 - y' + y''\right).e^{-2.x}/2 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow y - y'' + 3.\frac{\left(1 - y' + y''\right).e^{-2.x}}{2}.e^{2.x} - x = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y - y'' + 3.\frac{1 - y' + y''}{2} - x = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 2.y - 2.y'' + 3.(1 - y' + y'') - 2.x = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y'' - 3.y' + 2.y = 2.x - 3$$

2) Para la familia $y - C_1.e^x - C_2.x^2 - C_3.x = 0$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} y - C_1.e^x - C_2.x^2 - C_3.x = 0 \\ d(y - C_1.e^x - C_2.x^2 - C_3.x)/dx = 0 \\ d^2(y - C_1.e^x - C_2.x^2 - C_3.x)/dx^2 = 0 \\ d^3(y - C_1.e^x - C_2.x^2 - C_3.x)/dx^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - C_1.e^x - C_2.x^2 - C_3.x = 0 \\ y' - C_1.e^x - 2.C_2.x - C_3 = 0 \\ y'' - C_1.e^x - 2.C_2 = 0 \\ y''' - C_1.e^x = 0 \end{array}\right.$$

De la cuarta ecuación se obtiene $C_1.e^x = y'''$, y al sustituir en las tres primeras, resulta:

$$\begin{cases} y - y''' - C_2.x^2 - C_3.x = 0 \\ y' - y''' - 2.C_2.x - C_3 = 0 \\ y'' - y''' - 2.C_2 = 0 \rightarrow C_2 = (y'' - y''')/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow y - y''' - \frac{1}{2}.(y'' - y''').x^2 - C_3.x = 0 \\ \rightarrow y' - y''' - (y'' - y''').x - C_3 = 0 \rightarrow C_3 = y' - y''' - (y'' - y''').x \end{cases}$$

$$\rightarrow y - y''' - \frac{1}{2}.(y'' - y''').x^2 - \left(y' - y''' - (y'' - y''').x\right).x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y - y''' - \frac{1}{2}.y''.x^2 + \frac{1}{2}.y'''.x^2 - y'.x + y'''.x + y''.x^2 - y'''.x^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y - y''' + \frac{1}{2}.y''.x^2 - \frac{1}{2}.y'''.x^2 - y'.x + y'''.x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{1}{2}.x^2 - 1\right).y''' + \frac{1}{2}.x^2.y'' - x.y' + y = 0$$

2.3 DEPENDENCIA LINEAL DE FUNCIONES

Se dice que las "k" funciones $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ son **lineálmente dependientes** en un intervalo $[a;b]$ si existen "k" constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ no todas nulas y tales que en todo punto $x \in [a;b]$ sucede que $\alpha_1.y_1(x) + \ldots + \alpha_k.y_k(x) = 0$.

Si es $\alpha_1.y_1(x) + \ldots + \alpha_k.y_k(x) = 0$ sólo cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, se dice que las funciones $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ son **linealmente independientes.**

Por ejemplo, siendo $x > 0$, las funciones

$$y_1(x) = 2.\sqrt{x} + 3.\text{Ln } x \;;\; y_2(x) = 4.\sqrt{x} + 6.\text{Ln } x$$

son linealmente dependientes, pues

$$\alpha_1.\left(2.\sqrt{x} + 3.\text{Ln } x\right) + \alpha_2.\left(4.\sqrt{x} + 6.\text{Ln } x\right) = 0,\ \forall\ x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2.\alpha_1 + 4.\alpha_2).\sqrt{x} + (3.\alpha_1 + 6.\alpha_2).\text{Ln } x = 0,\ \forall\ x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.\alpha_1 + 4.\alpha_2 = 0 \\ 3.\alpha_1 + 6.\alpha_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = -2.\alpha_2$$

$$\boxed{\text{rg}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 1}$$

Por tanto, si $\alpha_1 = -2.\alpha_2$, en todo punto "x" es $\alpha_1.y_1(x) + \alpha_2.y_2(x) = 0$.

Por ejemplo, siendo $x \in \Re$, las funciones

$$y_1(x) = 2.e^x + 3.\text{sen } x \;;\; y_2(x) = 5.e^x + 6.\text{sen } x$$

son linealmente independientes, pues

$$\alpha_1.\left(2.e^x + 3.\text{sen } x\right) + \alpha_2.\left(5.e^x + 6.\text{sen } x\right) = 0,\ \forall\ x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2.\alpha_1 + 5.\alpha_2).e^x + (3.\alpha_1 + 6.\alpha_2).\text{sen } x = 0,\ \forall\ x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.\alpha_1 + 5.\alpha_2 = 0 \\ 3.\alpha_1 + 6.\alpha_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\boxed{\text{rg}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 2}$$

Por tanto, es $\alpha_1.y_1(x) + \alpha_2.y_2(x) = 0$ en todo punto "x" sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2.4 WRONSKIANO DE UNAS FUNCIONES

Siendo $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ funciones que en un intervalo admiten derivadas hasta la de orden $k-1$ inclusive, su **wronskiano** $W(x)$ es el siguiente determinante

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots\cdots & y_k(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots\cdots & y_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{k-1)}(x) & y_2^{k-1)}(x) & \cdots\cdots & y_k^{k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Por ejemplo: si $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=e^x$, $y_3(x)=4$, es:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & e^x & 4 \\ 2.x & e^x & 0 \\ 2 & e^x & 0 \end{vmatrix}=8.e^x.(x-1)$$

En el punto $x=3$ es $W(3)=8.e^3.(3-1)\neq 0$, siendo $W(1)=8.e^1.(1-1)=0$.

Si unas funciones son linealmente dependientes en un intervalo, su wronskiano es nulo en todo punto del intervalo. En efecto, si existen "k" constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ no todas nulas y tales que $\alpha_1.y_1(x)+\ldots+\alpha_k.y_k(x)=0$ en todo punto del intervalo, es:

$$\begin{aligned} \alpha_1.y_1(x)+\ldots+\alpha_k.y_k(x)&=0 \\ \alpha_1.y_1'(x)+\ldots+\alpha_k.y_k'(x)&=0 \\ &\vdots \\ \alpha_1.y_1^{k-1)}(x)+\ldots+\alpha_k.y_k^{k-1)}(x)&=0 \end{aligned}$$

Como $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ no son todas nulas, el anterior sistema de "k" ecuaciones (que es lineal y homogéneo respecto de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$) tiene soluciones distintas de la trivial $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$ en todo punto del intervalo; por tanto, en todo punto del intervalo debe ser nulo el determinante de su matriz de coeficientes, que es el wronskiano de $y_1(x), \ldots, y_k(x)$. ***Por ejemplo,*** siendo linealmente dependientes las funciones $y_1(x)=2.\sqrt{x}+3.\text{Ln } x$ e $y_2(x)=4.\sqrt{x}+6.\text{Ln } x$, es:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2.\sqrt{x}+3.\text{Ln } x & 4.\sqrt{x}+6.\text{Ln } x \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x} & \dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{x} \end{vmatrix}=0,\ \forall x$$

2.5 ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Siendo $x \in [a;b]$, sean

$$y = f(x) \ ; \ y' = \frac{df(x)}{dx} \ ; \ y'' = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \ ; \ ..... \ ; \ y^{n)} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

Así, si $a_1(x), ... , a_n(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en $[a;b]$, de toda ecuación diferencial de la forma

$$y^{n)} + a_1(x).y^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x).y' + a_n(x).y = b(x)$$

se dice que es **lineal de orden "n"** ...... y al decir **lineal** quiere indicarse que es **de primer grado respecto de la variable "y" y respecto de las derivadas sucesivas de "y".**

La ecuación se dice **homogénea** si $b(x) = 0$; si $b(x) \neq 0$ se dice **completa.**

Ejemplos: la ecuación $y''' + x^2.y'' - e^x.y' + x^3.y = \text{Ln } x$ es lineal, de orden 3 y completa. La ecuación $y'' + (y'/x) - e^x.y = 0$ es lineal, de orden 2 y homogénea. La ecuación $y'' + (y'/x) - e^x.\sqrt{y} = 0$ no es lineal, debido al factor $\sqrt{y}$. La ecuación $y''' + x^2.y'' - e^x.e^{y'} + x^3.y = \text{Ln } x$ no es lineal, debido al factor $e^{y'}$.

Existencia y unicidad de solución

Siendo

$$y^{n)} = h(x;y;y';y'';....;y^{n-1)}) = $$
$$= b(x) - a_1(x).y^{n-1)} - .... - a_{n-1}(x).y' - a_n(x).y$$

si $x_0 \in [a;b]$ y se establecen las condiciones iniciales

$$y(x_0) = z_0 \ ; \ y'(x_0) = z_1 \ ; \ .... \ ; \ y^{n-1)}(x_0) = z_{n-1}$$

como las funciones "h", $\partial h/\partial y = -a_n(x)$, $\partial h/\partial y' = a_{n-1}(x)$, $\partial h/\partial y'' = a_{n-2}(x)$, ... $\partial h/\partial y^{n-1)} = -a_1(x)$ son continuas, existe una única función $y = \phi(x)$ que es solución de la ecuación y satisface las condiciones iniciales establecidas.

El operador "L"

Para más comodidad, el pedrusco $y^{n)} + a_1(x).y^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x).y' + a_n(x).y$ lo denotaremos $L(y)$; así, para referirnos a la ecuación

$$y^{n)} + a_1(x).y^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x).y' + a_n(x).y = b(x)$$

escribiremos simplemente $L(y) = b(x)$.

El operador "L" es lineal, pues

$$1)\ L(C.y) = C.L(y),\ \forall\ C \in \Re \ ; \ 2)\ L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

En efecto:

1) $L(C.y) = (C.y)^{n)} + a_1(x).(C.y)^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x).(C.y)' + a_n(x).(C.y) =$

$$\boxed{d^k(C.y)/dx^k = C.(d^k y/dx^k)}$$

$$= C.\underbrace{\left(y^{n)} + a_1(x).y^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x).y' + a_n(x).y\right)}_{L(y)} = C.L(y)$$

2) $$L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{n)} + a_1(x).(y_1 + y_2)^{n-1)} + ... +$$

$$+ .... + a_{n-1}(x).(y_1 + y_2)' + a_n(x).(y_1 + y_2) =$$

$$\boxed{\frac{d^k(y_1 + y_2)}{dx^k} = \frac{d^k y_1}{dx^k} + \frac{d^k y_2}{dx^k}}$$

$$= \underbrace{\left(y_1^{n)} + a_1(x).y_1^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x).y_1' + a_n(x).y_1\right)}_{L(y_1)} +$$

$$+ \underbrace{\left(y_1^{n)} + a_1(x).y_1^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x).y_1' + a_n(x).y_1\right)}_{L(y_2)} = L(y_1) + L(y_2)$$

Naturalmente, de las anteriores propiedades de "L" se deduce que

$$L\left(\sum_{j=1}^{m} C_j.y_j\right) = \sum_{j=1}^{m} C_j.L(y_j)$$

Propiedades de la ecuación homogénea

Siendo $x \in [a;b]$, considérese la ecuación lineal, homogénea y de orden "n":

$$y^{n)} + a_1(x).y^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x).y' + a_n(x).y = 0$$

que, por comodidad, denotaremos $L(y) = 0$.

1) La ecuación $L(y) = 0$ tiene como **solución trivial** $y = 0$, que es la que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, ...,y^{n-1)}(x_0) = 0$.

   Por tanto, como el teorema de existencia y unicidad de solución garantiza que sólo hay una solución que satisface dichas condiciones, si una solución de $L(y) = 0$ se anula, lo mismo que sus $n-1$ primeras derivadas, en el punto x_0, esa solución es idénticamente nula (o sea, esa solución es la trivial $y = 0$).

2) Si la función y_1 es solución de la ecuación $L(y) = 0$ (o sea, es $L(y_1) = 0$) y "C" es una constante arbitraria, la función $C.y_1$ también es solución de $L(y) = 0$, pues siendo lineal "L", es $L(C.y_1) = C.L(y_1) = C.0 = 0$.

3) Si las funciones y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ (o sea, es $L(y_1) = 0$ y $L(y_2) = 0$), la función $y_1 + y_2$ también es solución de $L(y) = 0$, pues siendo lineal "L", es $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0 + 0 = 0$.

   Obvio: de 2) y 3) se deduce que si $y_1, ..., y_m$ son soluciones de $L(y) = 0$ y $C_1, ..., C_m$ son constantes arbitrarias, la función $C_1.y_1 + ... + C_m.y_m$ también es solución de $L(y) = 0$.

4) Si la función compleja $u + i.v$ (siendo $i = \sqrt{-1}$) es solución de la ecuación $L(y) = 0$ (o sea, es $L(u + i.v) = 0$), las funciones "u" y "v" también son soluciones de $L(y) = 0$. En efecto: si $L(u + i.v) = L(u) + i.L(v) = 0$, ha de ser $L(u) = 0$ y $L(v) = 0$, pues siendo reales "Pepe" y "Juan", el número complejo $Pepe + i.Juan$ coincide con el número cero sólo si "Pepe" y "Juan" son cero.

5) Si las "n" funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ definidas en el intervalo $[a;b]$ son soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ y son linealmente independientes (o sea, es $\alpha_1 . y_1(x) + \ldots + \alpha_k . y_k(x) = 0$ sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$), su wronskiano es no nulo en todo punto del intervalo.

En efecto, **por reducción al absurdo:** si el wronskiano fuese nulo en un punto x_0 del intervalo, el siguiente sistema lineal homogéneo de "n" ecuaciones con "n" incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

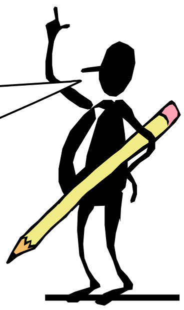
$$\begin{gathered} \alpha_1 . y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n . y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 . y'_1(x_0) + \ldots + \alpha_n . y'_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 . y_1^{n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n . y_n^{n-1)}(x_0) = 0 \end{gathered}$$

tendría soluciones no triviales, por ser nulo el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, que es el wronskiano de $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ en el punto x_0. Así, siendo $(\alpha_1^*; \ldots; \alpha_n^*)$ una de esas soluciones no triviales, según la propiedad 1), la función $y(x) = \alpha_1^* . y_1(x) + \ldots + \alpha_n^* . y_n(x)$ es idénticamente nula, pues es solución de $L(y) = 0$ (ya que $y(x)$ es una combinación lineal de soluciones de $L(y) = 0$) y se anula, lo mismo que sus $n - 1$ primeras derivadas, en el punto x_0:

$$\begin{gathered} y(x_0) = \alpha_1^* . y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n^* . y_n(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = \alpha_1^* . y'_1(x_0) + \ldots + \alpha_n^* . y'_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{n-1)}(x_0) = \alpha_1^* . y_1^{n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n^* . y_n^{n-1)}(x_0) = 0 \end{gathered}$$

Ahora bien, el que $y(x) = \alpha_1^* . y_1(x) + \ldots + \alpha_n^* . y_n(x)$ sea idénticamente nula va contra la hipótesis de que $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son independientes; por tanto, el wronskiano de $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ no puede ser nulo en el punto x_0.

Se llama **sistema fundamental de soluciones** de la ecuación $L(y) = 0$ a todo conjunto de "n" soluciones linealmente independientes



6) Si las "n" funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son un sistema fundamental de soluciones (SFS) de la ecuación $L(y)=0$ y $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias, la solución general de $L(y)=0$ es $y(x)=C_1.y_1(x)+\ldots+C_n.y_n(x)$. En efecto, siendo $y(x)=C_1.y_1(x)+\ldots+C_n.y_n(x)$ solución de $L(y)=0$ (por ser $y(x)$ combinación lineal de soluciones de $L(y)=0$), para demostrar que es la solución general, demostraremos que cualquier otra solución puede obtenerse asignando valores particulares a las constantes $C_1, \ldots, C_n$. Vamos a ello: sea la solución que satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0)=z_0 \;;\; y'(x_0)=z_1 \;;\; \ldots \;;\; y^{n-1)}(x_0)=z_{n-1}$$

Al exigir que $y(x)=C_1.y_1(x)+\ldots+C_n.y_n(x)$ satisfaga dichas condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema lineal no homogéneo de "n" ecuaciones con "n" incógnitas $C_1, \ldots, C_n$:

$$\begin{array}{c} C_1.y_1(x_0)+\ldots+C_n.y_n(x_0)=z_0 \\ C_1.y_1'(x_0)+\ldots+C_n.y_n'(x_0)=z_1 \\ \vdots \\ C_1.y_1^{n-1)}(x_0)+\ldots+C_n.y_n^{n-1)}(x_0)=z_{n-1} \end{array}$$

Como el anterior sistema de ecuaciones tiene solución única (pues el determinante su matriz de coeficientes es el wronskiano de $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, que es no nulo en el punto x_0, por ser linealmente independientes $y_1(x), \ldots, y_n(x)$), existen valores particulares y únicos $C_1=C_1^*, \ldots, C_n=C_n^*$ tales la función $y(x)=C_1^*.y_1(x)+\ldots+C_n^*.y_n(x)$ satisface las condiciones iniciales impuestas.

Propiedades de la ecuación completa

Por comodidad, denotaremos $L(y)=b(x)$ a la ecuación completa

$$y^{n)}+a_1(x).y^{n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x).y'+a_n(x).y=b(x)$$

siendo $L(y)=0$ la ecuación homogénea asociada a la completa.

1) Si y_1 es una solución de la homogénea (o sea, $L(y_1)=0$) e y_p una solución de la completa (o sea, $L(y_p)=b(x)$), la suma y_1+y_p es solución de la completa. En efecto, debido a la linealidad de "L", es:

$$L(y_1+y_p)=L(y_1)+L(y_p)=0+b(x)=b(x)$$

2) **La solución general de la completa es suma de la solución general de su homogénea y de una solución particular de la completa.** En efecto, si $C_1.y_1(x)+\ldots+C_n.y_n(x)$ es la SG de la homogénea e y_p es una solución particular de la completa, la función $y(x)=C_1.y_1(x)+\ldots+C_n.y_n(x)+y_p$ es solución de la completa (por ser $y(x)$ suma de una solución de la homogénea y otra de la completa) ...... y para demostrar que es la solución general de la completa, demostraremos que cualquier otra solución de ésta puede obtenerse

asignando valores particulares a las constantes $C_1, \ldots, C_n$. Vamos a ello: sea la solución de la completa que satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = z_0 \ ; \ y'(x_0) = z_1 \ ; \ \ldots \ ; \ y^{n-1)}(x_0) = z_{n-1}$$

Al exigir que $y(x) = C_1.y_1(x) + \ldots + C_n.y_n(x) + y_p$ cumpla dichas condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema lineal no homogéneo de "n" ecuaciones con "n" incógnitas $C_1, \ldots, C_n$:

$$\begin{array}{c} C_1.y_1(x_0) + \ldots + C_n.y_n(x_0) + y_p(x_0) = z_0 \\ C_1.y'_1(x_0) + \ldots + C_n.y'_n(x_0) + y'_p(x_0) = z_1 \\ \vdots \\ C_1.y_1^{n-1)}(x_0) + \ldots + C_n.y_n^{n-1)}(x_0) + y_p^{n-1)}(x_0) = z_{n-1} \end{array}$$

O lo que es igual:

$$\begin{array}{c} C_1.y_1(x_0) + \ldots + C_n.y_n(x_0) = z_0 - y_p(x_0) \\ C_1.y'_1(x_0) + \ldots + C_n.y'_n(x_0) = z_1 - y'_p(x_0) \\ \vdots \\ C_1.y_1^{n-1)}(x_0) + \ldots + C_n.y_n^{n-1)}(x_0) = z_{n-1} - y_p^{n-1)}(x_0) \end{array}$$

Como el anterior sistema de ecuaciones tiene solución única (pues el determinante su matriz de coeficientes es el wronskiano de $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, que es no nulo en el punto x_0, por ser linealmente independientes $y_1(x), \ldots, y_n(x)$), existen valores particulares y únicos $C_1 = C_1^*, \ldots, C_n = C_n^*$ tales la función $y(x) = C_1^*.y_1(x) + \ldots + C_n^*.y_n(x)$ satisface las condiciones iniciales impuestas.

2.6 ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR Y COEFICIENTES CONSTANTES

Siendo $x \in [a;b]$, sean

$$y = f(x) \ ; \ y' = \frac{df(x)}{dx} \ ; \ y'' = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \ ; \ \ldots \ ; \ y^{n)} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

Así, si $a_1, \ldots, a_n$ son constantes y $b(x)$ es una función continua en $[a;b]$, de toda ecuación diferencial de la forma

$$y^{n)} + a_1.y^{n-1)} + \ldots + a_{n-1}.y' + a_n.y = b(x)$$

se dice que es **lineal, de orden "n" y coeficientes constantes.**

La ecuación se dice **homogénea** si $b(x) = 0$; si $b(x) \neq 0$ se dice **completa.**

Solución general de la homogénea

- La función $y = e^{r.x}$ es solución de la homogénea si "r" es solución de la ecuación $r^n + a_1.r^{n-1} + ... + a_{n-1}.r + a_n.r = 0$, que es la llamada **ecuación característica.** En efecto, siendo $y = e^{r.x}$, es:

$$y' = r.e^{r.x}\ ; ....\ ; y^{n-1)} = r^{n-1}.e^{r.x}\ ; y^{n)} = r^n.e^{r.x}$$

y al sustituir en la homogénea, resulta:

$$r^n.e^{r.x} + a_1.r^{n-1}.e^{r.x} + ... + a_{n-1}.r.e^{r.x} + a_n.e^{r.x} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^n + a_1.r^{n-1}.+ .... + a_{n-1}.r + a_n = 0$$

- Si la ecuación característica tiene "n" raíces distintas $r_1, r_2, ... ,r_n$, las "n" funciones $y_1 = e^{r_1.x}, y_2 = e^{r_2.x}, ... , y_n = e^{r_n.x}$ forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea. Para demostralo basta comprobar que el wronskiano de estas "n" funciones es no nulo para todo valor de "x", como en efecto sucede:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1.x} & e^{r_2.x} & ..... & e^{r_n.x} \\ r_1.e^{r_1.x} & r_2.e^{r_2.x} & ..... & r_n.e^{r_n.x} \\ r_1^2.e^{r_1.x} & r_2^2.e^{r_2.x} & ..... & r_n^2.e^{r_n.x} \\ \vdots & \vdots & :::: & \vdots \\ r_1^{n-1}.e^{r_1.x} & r_2^{n-1}.e^{r_2.x} & ..... & r_n^{n-1}.e^{r_n.x} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(e^{r_1.x}.e^{r_2.x}.....e^{r_n.x}\right)}_{\neq 0,\ \forall x}.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & ..... & e^1 \\ r_1 & r_2 & ..... & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & ..... & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & :::: & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & ..... & r_n^{n-1} \end{vmatrix}} \neq 0,\ \forall\ x$$

Determinante de Vandermonde; como todo el mundo sabe, su valor es $((r_2 - r_1).(r_3 - r_1)......(r_n - r_1)).((r_3 - r_2).(r_4 - r_2)......(r_n - r_2)).$ $.((r_4 - r_3).(r_5 - r_3)......(r_n - r_3))........((r_{n-1} - r_n))$ Y como $r_i \neq r_j$, pues las raíces de la ecuación característica son todas distintas, el determinante es no nulo.

- Puede demostrarse que si $r_1, ... ,r_k$ son las raíces de la ecuación característica, con multiplicidades respectivas $\alpha_1, ... ,\alpha_k$ (siendo $\alpha_1 + ... + \alpha_k = n$), el sistema fundamental de soluciones lo forman las funciones

$$e^{r_1.x}\ ; x.e^{r_1.x}\ ; x^2.e^{r_1.x}\ ; ....\ ; x^{\alpha_1 - 1}.e^{r_1.x}$$
$$::$$
$$e^{r_k.x}\ ; x.e^{r_k.x}\ ; x^2.e^{r_k.x}\ ; ....\ ; x^{\alpha_k - 1}.e^{r_k.x}$$

- **A la hora de lo cotidiano,** una vez calculadas las raíces de la ecuación característica, "construiremos" la solución general de la ecuación homogénea atendiendo al siguiente criterio:

  * Cada raiz real "r" múltiple de orden α de la ecuación característica, contribuye a la solución general de la ecuación homogénea con un sumando de la forma $Q_{\alpha-1}(x).e^{r.x}$, donde $Q_{\alpha-1}(x)$ es polinomio de grado $\alpha-1$ y coeficientes indeterminados.

  * Cada par $a \pm i.b$ de raíces imaginarias conjugadas múltiples de orden α de la ecuación característica, contribuye a la solución general de la ecuación homogénea con un sumando de la forma

$$e^{a.x}.\left(A_{\alpha-1}(x).\cos b.x + B_{\alpha-1}(x).\operatorname{sen} b.x\right)$$

  donde $A_{\alpha-1}(x)$ y $B_{\alpha-1}(x)$ son polinomios de grado $\alpha-1$ y coeficientes indeterminados.

Por ejemplo, si las raíces de una ecuación diferencial lineal, homogénea, de coeficientes constantes y orden 12 son 5 (triple), 6 (doble), 7 (simple), $8 \pm 9.i$ (simples) y $4 \pm \pi.i$ (dobles), la solución general de dicha ecuación es

$$\begin{aligned} y(x) = \left(C_1 + C_2.x + C_3.x^2\right).e^{5.x} + \left(C_4 + C_5.x\right).e^{6.x} + \\ +\left(C_6.e^{5.x}\right) + e^{8.x}.\left(C_7.\cos 9.x + C_8.\operatorname{sen} 9.x\right) + \\ +e^{4.x}.\left((C_9 + C_{10}.x).\cos \pi.x + (C_{11} + C_{12}.x).\operatorname{sen} \pi.x\right) \end{aligned}$$

O sea, las siguientes doce funciones forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación en cuestión:

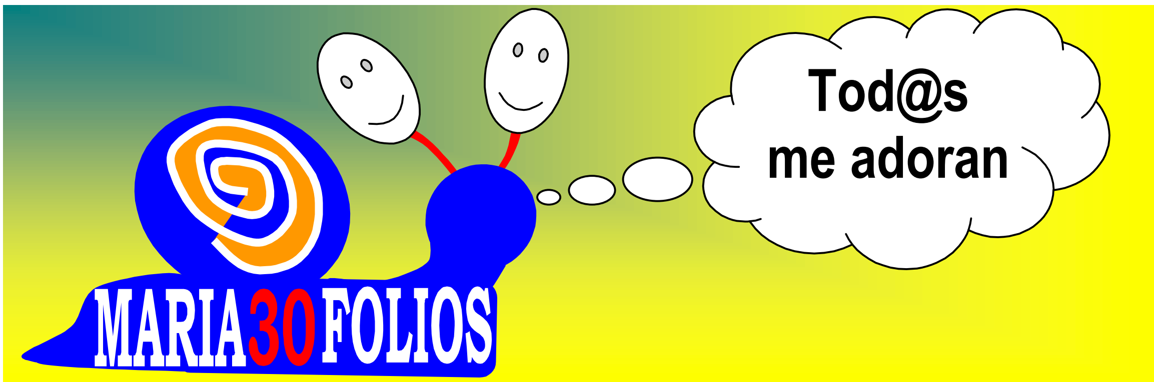
$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^{5.x} \\ y_2(x) = x.e^{5.x} \\ y_3(x) = x^2.e^{5.x} \end{array}\right\} \leftarrow \text{contribución de } r = 5 \text{ (triple)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_4(x) = e^{6.x} \\ y_5(x) = x.e^{6.x} \end{array}\right\} \leftarrow \text{contribución de } r = 6 \text{ (doble)}$$

$$\left.y_6(x) = e^{4.x}\right\} \leftarrow \text{contribución de } r = 4 \text{ (simple)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_7(x) = e^{8.x}.\cos 9.x \\ y_8(x) = e^{8.x}.\operatorname{sen} 9.x \end{array}\right\} \leftarrow \text{contribución de } r = 8 \pm 9.i \text{ (simples)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_9(x) = e^{4.x}.\cos \pi.x \\ y_{10}(x) = x.e^{4.x}.\cos \pi.x \\ y_{11}(x) = e^{4.x}.\operatorname{sen} \pi.x \\ y_{12}(x) = x.e^{4.x}.\operatorname{sen} \pi.x \end{array}\right\} \leftarrow \text{contribución de } r = 4 \pm \pi.i \text{ (dobles)}$$



Solución general de la completa

Como sabemos, la solución general de la ecuación completa $L(y) = b(x)$ es suma de la solución general de su correspondiente ecuación homogénea $L(y) = 0$ y de una solución particular de la completa.

- Si $b(x) = K.e^{m.x}$, siendo constantes "K" y "m", la solución particular es de la forma $y_p(x) = C.x^{\alpha}.e^{m.x}$, donde "C" es una constante, y α es el orden de multiplicidad de la raíz $r = m$ en la ecuación característica.
- Si $b(x) =$ polinomio de grado "s", la solución particular es $y_p(x) = x^{\alpha}.Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado "s" y coeficientes indeterminados, y α es el orden de multiplicidad de la raíz $r = 0$ en la ecuación característica.
- Si $b(x) = k_1.\cos m.x + k_2.\operatorname{sen} m.x$, la solución particular es

$$y_p(x) = x^{\alpha}.(A.\cos m.x + B.\operatorname{sen} m.x)$$

  donde "A" y "B" son constantes, y α es el orden de multiplicidad de la raíz $r = 0 \pm m.i$ en la ecuación característica.
- **Método de variación de las constantes:** si $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son un SFS de la homogénea, puede demostrase que la solución general de la completa es $y(x) = c_1(x).y_1(x) + \ldots + c_n(x).y_n(x)$, donde $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ son las soluciones de

$$\begin{array}{c} c_1'(x).y_1(x) + \ldots + c_n'(x).y_n(x) = 0 \\ c_1'(x).y_1'(x) + \ldots + c_n'(x).y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x).y_1^{n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x).y_n^{n-1)}(x) = 0 \end{array}$$

KEYNES 2.6.1

Determínese la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$1)\ y'''-5.y''+6.y'=0\ ;\ 2)\ y^{IV)}=0\ ;\ 3)\ y^{V)}-4.y''=0$$
$$4)\ y'''-3.y''+3.y'-y=0\ ;\ 5)\ y''-4.y'+13.y=0\ ;\ 6)\ y''+9.y=0$$
$$7)\ y^{IV)}+8.y''+16.y=0\ ;\ 8)\ y'''-4.y''+13.y'=0\ ;\ 9)\ y^{IV)}-5.y''+4.y=0$$

SOLUCIÓN

Todas las ecuaciones son lineales, homogéneas y de coeficientes constantes.

1) La ecuación característica de $y'''-5.y''+6.y'=0$ es $r^3-5.r^2+6.r=0$, y sus raíces son 0, 2 y 3 (todas simples). Por tanto, las funciones

$$y_1(x)=e^{0.x}=1\ ;\ y_2(x)=e^{2.x}\ ;\ y_3(x)=e^{3.x}$$

forman un sistema fundamental de soluciones (SFS), y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{3} C_k.y_k(x)=C_1+C_2.e^{2.x}+C_3.e^{3.x}$$

2) La ecuación característica de $y^{IV)}=0$ es $r^4=0$, que tiene al 0 como raíz cuádruple. Por tanto, las funciones

$$y_1(x)=e^{0.x}=1\ ;\ y_2(x)=x.e^{0.x}=x$$
$$y_3(x)=x^2.e^{0.x}=x^2\ ;\ y_4(x)=x^3.e^{0.x}=x^3$$

forman un SFS, y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{4} C_k.y_k(x)=C_1+C_2.x+C_3.x^2+C_4.x^3$$

3) La ecuación característica de $y^{IV}-4.y''=0$ es $r^4-4.r^2=0$, y sus raíces son 0 (doble), 2 (simple) y -2 (simple). Por tanto, las funciones

$$y_1(x)=e^{0.x}=1\ ;\ y_2(x)=x.e^{0.x}=x$$
$$y_3(x)=e^{2.x}\ ;\ y_4(x)=e^{-2.x}$$

forman un SFS, y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{4} C_k.y_k(x)=C_1+C_2.x+C_3.e^{2.x}+C_4.e^{-2.x}$$

4) La ecuación característica de $y'''-3.y''+3.y'-y=0$ es $r^3-3.r^2+3.r-1=0$, que tiene al 1 como raíz triple. Así, las funciones $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=x.e^x$ e $y_3(x)=x^2.e^x$ forman un SFS, y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{3} C_k.y_k(x)=C_1.e^x+C_2.x.e^x+C_3.x^2.e^x$$

5) La ecuación característica de $y''-4.y'+13.y=0$ es $r^2-4.r+13=0$, cuyas raíces son $2\pm 3.i$ (simples). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^{2.x}.\cos 3.x \;;\; y_1(x)=e^{2.x}.\text{sen } 3.x$$

forman un SFS, y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{2} C_k.y_k(x)=e^{2.x}.(C_1.\cos 3.x+C_2.\text{sen } 3.x)$$

6) La ecuación característica de $y''+9.y=0$ es $r^2+9=0$, cuyas raíces son $0\pm 3.i$ (simples). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^{0.x}.\cos 3.x=\cos 3.x \;;\; y_2(x)=e^{0.x}.\text{sen } 3.x=\text{sen } 3.x$$

forman un SFS, y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{2} C_k.y_k(x)=C_1.\cos 3.x+C_2.\text{sen } 3.x$$

7) La ecuación característica de $y^{IV)}+8.y''+16.y=0$ es $r^4+8.r^2+16=0$, cuyas raíces son $0\pm 2.i$ (dobles). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^{0.x}.\cos 2.x=\cos 2.x \;;\; y_2(x)=x.e^{0.x}.\cos 2.x=x.\cos 2.x$$
$$y_3(x)=e^{0.x}.\text{sen } 2.x=\text{sen } 2.x \;;\; y_4(x)=x.e^{0.x}.\text{sen } 2.x=x.\text{sen } 2.x$$

forman un SFS, y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{4} C_k.y_k(x)=(C_1+C_2.x).\cos 2.x+(C_3+C_4.x).\text{sen } 2.x$$

8) La ecuación característica de $y'''-4.y''+13.y'=0$ es $r^3-4.r^2+13.r=0$, cuyas raíces son 0 y $0\pm 2.i$ (todas simples). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^{0.x}=1$$
$$y_2(x)=e^{0.x}.\cos 2.x=\cos 2.x \;;\; y_3(x)=e^{0.x}.\text{sen } 2.x=\text{sen } 2.x$$

forman un SFS, y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{3} C_k.y_k(x)=C_1+C_2.\cos 2.x+C_3.\text{sen } 2.x$$

9) La ecuación característica de $y^{IV)}-5.y''+4.y=0$ es $r^4-5.r^2+4=0$, cuyas raíces son 1, 2, -1 y -2 (todas simples). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^{x} \;;\; y_2(x)=e^{2.x} \;;\; y_3(x)=e^{-x} \;;\; y_4(x)=e^{-2.x}$$

forman un SFS, y la solución general de la ecuación es

$$y=\sum_{k=1}^{4} C_k.y_k(x)=C_1.e^{x}+C_2.e^{2.x}+C_3.e^{-x}+C_4.e^{-2.x}$$

KEYNES 2.6.2

Determínese la solución general de $y''-5.y'+6.y=2.e^{4.x}$, calculando la solución particular que cumple las condiciones iniciales $y(0)=1$ e $y'(0)=2$.

SOLUCIÓN

La ecuación es de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y completa. **Su solución general es suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de una solución particular de la ecuación completa.**

La ecuación homogénea es $y''-5.y'+6.y=0$, siendo $r^2-5.r+6=0$ su ecuación característica, cuyas raíces son 2 y 3 (ambas simples). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^{2.x} \ ; \ y_2(x)=e^{3.x}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la homogénea, cuya solución general es

$$y_h=\sum_{k=1}^{2} C_k.y_k(x)=C_1.e^{2.x}+C_2.e^{3.x}$$

Siendo $b(x)=2.e^{4.x}$, la solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_p=A.x^{\alpha}.e^{4.x}$, donde α es el orden de multiplicidad de la raíz $r=4$ en la ecuación característica ..... y no siendo $r=4$ raíz de esa ecuación, es $\alpha=0$, por lo que $y_p=A.e^{4.x}$. Para determinar "A" basta sustituir y_p, y'_p e y''_p en la ecuación completa:

$$y''-5.y'+6.y=2.e^{4.x} \Rightarrow$$

$$\boxed{y_p=A.e^{4.x} \ ; \ y'_p=4.A.e^{4.x} \ ; \ y''_p=16.A.e^{4.x}}$$

$$\Rightarrow 16.A.e^{4.x}-5.\left(4.A.e^{4.x}\right)+6.\left(A.e^{4.x}\right)=2.e^{4.x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16.A-20.A+6.A=2 \Rightarrow A=1 \Rightarrow y_p=e^{4.x}$$

En definitiva, la solución general de la ecuación $y''-5.y'+6.y=2.e^{4.x}$ es

$$y=y_h+y_p=C_1.e^{2.x}+C_2.e^{3.x}+e^{4.x}$$

Al exigir que $y(0)=1$ e $y'(0)=2$ resulta $C_1=2$ y $C_2=-2$:

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1+C_2+1=1 \\ 2.C_1+3.C_2+4=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=2 \\ C_2=-2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y(x)=C_1.e^{2.x}+C_2.e^{3.x}+e^{4.x} \\ y'(x)=2.C_1.e^{2.x}+3.C_2.e^{3.x}+4.e^{4.x} \end{array}}$$

Por tanto, la solución particular pedida es $y=2.e^{2.x}-2.e^{3.x}+e^{4.x}$.

Nota: también podemos determinar la solución general de la ecuación completa $y''-5.y'+6.y=2.e^{4.x}$ mediante el **método de variación de las constantes:** siendo $y_1(x)=e^{2.x}$ e $y_2(x)=e^{3.x}$ un SFS de soluciones de la ecuación homogénea, la solución general de la completa es $y=C_1(x).y_1(x)+C_2(x).y_2(x)$, siendo $C_1(x)$ y $C_2(x)$ tales que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}}_{\text{Wronskiano}} \bullet \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.e^{4.x} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{y_1(x)=e^{2.x} \ ; \ y_2(x)=e^{3.x}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e^{2.x} & e^{3.x} \\ 2.e^{2.x} & 3.e^{3.x} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.e^{4.x} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Cramer}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3.x} \\ 2.e^{4.x} & 3.e^{3.x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2.x} & e^{3.x} \\ 2.e^{2.x} & 3.e^{3.x} \end{vmatrix}} = -\dfrac{2.e^{7.x}}{e^{5.x}} = -2.e^{2.x} \\ C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} e^{2.x} & 0 \\ 2.e^{2.x} & 2.e^{4.x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2.x} & e^{3.x} \\ 2.e^{2.x} & 3.e^{3.x} \end{vmatrix}} = \dfrac{2.e^{6.x}}{e^{5.x}} = 2.e^{x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int -2.e^{2.x}.dx = -e^{2.x} + K_1 \\ C_2(x) = \int 2.e^{x}.dx = 2.e^{x} + K_2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa $y''-5.y'+6.y=2.e^{4.x}$ es

$$y = \underbrace{\left(-e^{2.x}+K_1\right)}_{C_1(x)}.e^{2.x} + \underbrace{\left(2.e^{x}+K_2\right)}_{C_2(x)}.e^{3.x} =$$
$$= K_1.e^{2.x} + K_2.e^{3.x} + e^{4.x}$$

KEYNES 2.6.3

Determínese la solución general de $y'''-6.y''+9.y'=4.e^{3.x}$, calculando las soluciones tales que $y(0)=0$.

SOLUCIÓN

La ecuación es de tercer orden, lineal, de coeficientes constantes y completa. **Su solución general es suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de una solución particular de la ecuación completa.**

La ecuación homogénea es $y'''-6.y''+9.y'=0$, siendo $r^3-6.r^2+9.r=0$ su ecuación característica, cuyas raíces son 0 (simple) y 3 (doble). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^{0.x}=1\ ;\ y_2(x)=e^{3.x}\ ;\ y_3(x)=x.e^{3.x}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la homogénea, cuya solución general es

$$y_h=\sum_{k=1}^{3} C_k.y_k(x)=C_1+(C_2+C_3.x).e^{3.x}$$

Siendo $b(x)=4.e^{3.x}$, la solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_p=A.x^{\alpha}.e^{3.x}$, donde α es el orden de multiplicidad de la raíz $r=3$ en la ecuación característica ..... y siendo $r=3$ raíz doble de esa ecuación, es $\alpha=2$, por lo que $y_p=A.x^2.e^{3.x}$. Para determinar "A" basta sustituir y'_p, y''_p e y'''_p en la ecuación completa:

$$y'''-6.y''+9.y'=4.e^{3.x}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y'_p=A.(3.x^2+2.x).e^{3.x}\ ;\ y''_p=A.(9.x^2+12.x+2).e^{3.x} \\ y'''_p=A.(27.x^2+54.x+18).e^{3.x} \end{array}}$$

$$\Rightarrow\left(A.(27.x^2+54.x+18).e^{3.x}\right)-6.\left(A.(9.x^2+12.x+2).e^{3.x}\right)+$$
$$+9.\left(A.(3.x^2+2.x).e^{3.x}\right)=4.e^{3.x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6.A=4\Rightarrow A=2/3\Rightarrow y_p=\frac{2}{3}.x^2.e^{3.x}$$

En definitiva, la solución general de la ecuación $y'''-6.y''+9.y'=4.e^{3.x}$ es

$$y=y_h+y_p=C_1+(C_2+C_3.x).e^{3.x}+\frac{2}{3}.x^2.e^{3.x}$$

Ocurre que $y(0)=0$ si $C_1=-C_2$:

$$y(0)=C_1+C_2=0\Rightarrow C_1=-C_2$$

por tanto, las soluciones tales que $y(0)=0$ son

$$y=-C_2+(C_2+C_3.x).e^{3.x}+\frac{2}{3}.x^2.e^{3.x}$$

Nota: también podemos determinar la solución general de la ecuación completa $y'''-6.y''+9.y'=4.e^{3.x}$ mediante el **método de variación de las constantes:** siendo $y_1(x)=1$, $y_2(x)=e^{3.x}$ e $y_3(x)=x.e^{3.x}$ un SFS de soluciones de la ecuación homogénea $y'''-6.y''+9.y'=0$, la solución general de la completa es

$$y=C_1(x).y_1(x)+C_2(x).y_2(x)+C_3(x).y_3(x)$$

siendo $C_1(x), C_2(x)$ y $C_3(x)$ tales que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{bmatrix}}_{\text{Wronskiano}} \bullet \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ C_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.e^{3.x} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{y_1(x)=1 \;\; ; \;\; y_2(x)=e^{3.x} \;\; ; \;\; y_3(x)=x.e^{3.x}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{3.x} & x.e^{3.x} \\ 0 & 3.e^{3.x} & (1+3.x).e^{3.x} \\ 0 & 9.e^{3.x} & (6+9.x).e^{3.x} \end{bmatrix}}_{W} \bullet \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ C_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.e^{3.x} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1'(x) = \dfrac{4}{9}.e^{3.x} \\ C_2'(x) = -\dfrac{4+12.x}{9} \\ C_3'(x) = \dfrac{4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Cramer, siendo } |W| = 9.e^{6.x}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1(x) = \int \dfrac{4}{9}.e^{3.x}.dx = \dfrac{4}{27}.e^{3.x} + K_1 \\ C_2(x) = \int -\dfrac{4+12.x}{9}.dx = -\dfrac{4.x+6.x^2}{9} + K_2 \\ C_3(x) = \int \dfrac{4}{3}.dx = \dfrac{4.x}{3} + K_3 \end{array} \right.$$

Por tanto, la solución general de la completa $y'''-6.y''+9.y'=4.e^{3.x}$ es

$$y = \underbrace{\left(\frac{4}{27}.e^{3.x}+K_1\right)}_{C_1(x)} + \underbrace{\left(-\frac{4.x+6.x^2}{9}+K_2\right)}_{C_2(x)}.e^{3.x} + \underbrace{\left(\frac{4.x}{3}+K_3\right)}_{C_3(x)}.x.e^{3.x} =$$

$$= K_1 + \left(\left(\frac{4}{27}+K_2\right)+\left(K_3-\frac{4}{9}\right).x\right).e^{3.x} + \frac{2}{3}.x^2.e^{3.x} =$$

$$= B_1 + (B_2 + B_3.x).e^{3.x} + \frac{2}{3}.x^2.e^{3.x}$$

$$\boxed{K_1 = B_1 \;\; ; \;\; \frac{4}{27}+K_2 = B_2 \;\; ; \;\; K_3 - \frac{4}{9} = B_3}$$

KEYNES 2.6.4

Determínese la solución general de $y''-3.y'+2.y=2.x^2$, calculando la solución particular que cumple las condiciones iniciales $y(0)=y'(0)=0$.

SOLUCIÓN

La ecuación es de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y completa.

Su solución general es suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de una solución particular de la ecuación completa.

La ecuación homogénea es $y''-3.y'+2.y=0$, siendo $r^2-3.r+2=0$ su ecuación característica, cuyas raíces son 1 y 2 (ambas simples). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^x \;\; ; \;\; y_2(x)=e^{2.x}$$

forman un SFS de la homogénea, cuya solución general es

$$y_h=C_1.e^x+C_2.e^{2.x}$$

Siendo $b(x)=2.x^2$ un polinomio de grado 2, la solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_p=Q(x).x^{\alpha}$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado 2 y coeficientes indeterminados, y α es el orden de multiplicidad de la raíz $r=0$ en la ecuación característica. Como $r=0$ no es raíz de dicha ecuación, entonces $\alpha=0$, por lo que $y_p=A.x^2+B.x+C$. Para determinar "A", "B" y "C" sustituimos y_p, y'_p e y''_p en la ecuación completa:

$$y''-3.y'+2.y=2.x^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y_p=A.x^2+B.x+C \;;\; y'_p=2.A.x+B \;;\; y''_p=2.A}$$

$$\Rightarrow (2.A)-3.(2.A.x+B)+2.\left(A.x^2+B.x+C\right)=2.x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.A.x^2+(2.B-6.A).x+(2.A-3.B+2.C)=2.x^2+0.x+0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 2.A=2 \\ 2.B-6.A=0 \\ 2.A-3.B+2.C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=3 \\ C=7/2 \end{array}\right\} \Rightarrow y_p=x^2+3.x+\frac{7}{2}$$

En definitiva, la solución general de la ecuación $y''-3.y'+2.y=2.x^2$ es

$$y=y_h+y_p=C_1.e^x+C_2.e^{2.x}+x^2+3.x+7/2$$

Al exigir que $y(0)=y'(0)=0$ resulta $C_1=-10$ y $C_2=13/2$:

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1+C_2+(7/2)=0 \\ C_1+2.C_2+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=-10 \\ C_2=13/2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y(x)=C_1.e^x+C_2.e^{2.x}+x^2+3.x+(7/2) \\ y'(x)=C_1.e^x+2.C_2.e^{2.x}+2.x+3 \end{array}}$$

por tanto, la solución particular pedida es

$$y=-10.e^x+\frac{13}{2}.e^{2.x}+x^2+3.x+\frac{7}{2}$$

KEYNES 2.6.5

Determínese la solución general de $y'''-y'=6.x-10$.

SOLUCIÓN

La ecuación es de tercer orden, lineal, de coeficientes constantes y completa. **Su solución general es suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de una solución particular de la ecuación completa.**

La ecuación homogénea es $y'''-y'=0$, siendo $r^3-r=0$ su ecuación característica, cuyas raíces son 0, 1 y -1 (todas simples). Así, las funciones

$$y_1(x)=e^{0.x}=1 \ ; \ y_2(x)=e^x \ ; \ y_3(x)=e^{-x}$$

forman un SFS de la homogénea, cuya solución general es

$$y_h=\sum_{k=1}^{3} C_k.y_k(x)=C_1+C_2.e^x+C_3.e^{-x}$$

Siendo $b(x)=6.x-10$ un polinomio de grado 1, la solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_p=Q(x).x^{\alpha}$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado 1 y coeficientes indeterminados, y α es el orden de multiplicidad de la raíz $r=0$ en la ecuación característica. Como $r=0$ es raíz simple de esa ecuación, entonces $\alpha=1$, por lo que $y_p=(A.x+B).x=A.x^2+B.x$, y para hallar "A" y "B" basta sustituir y_p, y_p', y_p'' e y_p''' en la ecuación completa:

$$y'''-y'=6.x-10 \Rightarrow$$

$$\boxed{y_p=A.x^2+B.x \ ; \ y_p'=2.A.x+B \ ; \ y_p''=2.A \ ; \ y_p'''=0}$$

$$\Rightarrow -2.A.x-B=6.x-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.A=6 \\ -B=-10 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A=3 \\ B=10 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p=3.x^2-10.x$$

En definitiva, la solución general de la ecuación $y'''-y'=6.x-10$ es

$$y=y_h+y_p=C_1+C_2.e^x+C_3.e^{-x}+3.x^2-10.x$$

KEYNES 2.6.6

Determínese la solución general de $y''-2.y'+5.y=10.\text{sen } 3.x$

SOLUCIÓN

La ecuación es de 2º orden, lineal, de coeficientes constantes y completa. **Su solución general es suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de una solución particular de la ecuación completa.** La ecuación homogénea es $y''-2.y'+5.y=0$, siendo $r^2-2.r+5=0$ su ecuación característica, con raíces $1\pm 2.i$ (simples). Así, las funciones $y_1(x)=e^x.\cos 2.x$ e $y_2(x)=e^x.\text{sen } 2.x$ forman un SFS de la homogénea, cuya solución general es

$$y_h=\sum_{k=1}^{2} C_k.y_k(x)=e^x.(C_1.\cos 2.x+C_2.\text{sen } 2.x)$$

Siendo $b(x)=10.\text{sen } 3.x$, la solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_p=x^{\alpha}.(A.\cos 3.x+B.\text{sen } 3.x)$, donde α es el orden de multiplicidad de la raíz $r=0\pm 3.i$ en la ecuación característica. Como $r=0\pm 3.i$ no es raíz de dicha ecuación, entonces $\alpha=0$, por lo que $y_p=A.\cos 3.x+B.\text{sen } 3.x$, y para hallar "A", "B" y "C" sustituimos y_p, y_p' e y_p'' en la ecuación completa:

$$y''-2.y'+5.y=10.\text{sen } 7.x\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y_p=A.\cos 3.x+B.\text{sen } 3.x \\ y_p'=-3.A.\text{sen } 3.x+3.B.\cos 3.x\ ;\ y_p''=-9.A.\cos 3.x-9.B.\text{sen } 3.x \end{array}}$$

$$\Rightarrow(-9.A.\cos 3.x-9.B.\text{sen } 3.x)-2.(-3.A.\text{sen } 3.x+3.B.\cos 3.x)$$

$$+5.(A.\cos 3.x+B.\text{sen } 3.x)=10.\text{sen } 3.x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-4.A-6.B).\cos 3.x+(6.A-4.B).\text{sen } 3.x=0.\cos 3.x+10.\text{sen } 3.x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-4.A-6.B=0\\ 6.A-4.B=10\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=15/13\\ B=-10/13\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{15}{13}.\cos 3.x-\frac{10}{13}.\text{sen } 3.x$$

En definitiva, la solución general de la ecuación $y''-2.y'+5.y=10.\text{sen } 3.x$ es

$$y=y_h+y_p=e^x.(C_1.\cos 2.x+C_2.\text{sen } 2.x)+\frac{15}{13}.\cos 3.x-\frac{10}{13}.\text{sen } 3.x$$

KEYNES 2.6.7

Determínese la solución general de $y''+4.y=20.\cos 2.x$

SOLUCIÓN

La ecuación es de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y completa. **Su solución general es suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de una solución particular de la ecuación completa.**

La ecuación homogénea es $y''+4.y=0$, siendo $r^2+4=0$ su ecuación característica, cuyas raíces son $0 \pm 2.i$ (simples). Así, las funciones

$$y_1(x) = e^{0.x}.\cos 2.x = \cos 2.x \;\; ; \;\; y_2(x) = e^{0.x}.\text{sen } 2.x = \text{sen } 2.x$$

forman un SFS de la homogénea, cuya solución general es

$$y_h = \sum_{k=1}^{2} C_k.y_k(x) = C_1.\cos 2.x + C_2.\text{sen } 2.x$$

Siendo $b(x) = 20.\cos 2.x$, la solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_p = x^{\alpha}.(A.\cos 2.x + B.\text{sen } 2.x)$, donde α es el orden de multiplicidad de la raíz $r = 0 \pm 2.i$ en la ecuación característica. Como $r = 0 \pm 2.i$ es raíz simple de dicha ecuación, entonces $\alpha = 1$, por lo que $y_p = A.x.\cos 2.x + B.x.\text{sen } 2.x$, y para hallar "A", "B" y "C" sustituimos y_p e y''_p en la ecuación completa:

$$y''+4.y = 20.\cos 2.x \Rightarrow$$

$$y_p = A.x.\cos 2.x + B.x.\text{sen } 2.x$$

$$y''_p = -(4.A + 4.B.x).\text{sen } 2.x + (4.B - 4.A.x).\cos 2.x$$

la derivada segunda del producto $u(x).v(x)$ es $u''(x).v(x) + 2.u'(x).v'(x) + u(x).v''(x)$

$$\Rightarrow -(4.A + 4.B.x).\text{sen } 2.x + (4.B - 4.A.x).\cos 2.x +$$
$$+4.(A.x.\cos 2.x + B.x.\text{sen } 2.x) = 20.\cos 2.x \Rightarrow$$
$$-4.A.\text{sen } 2.x + 4.B.\cos 2.x = 20.\cos 2.x + 0.\text{sen } 2.x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} -4.A = 0 \\ 4.B = 20 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A = 0 \\ B = 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow y_p = 5.x.\text{sen } 2.x$$

En definitiva, la solución general de la ecuación $y''+4.y = 20.\cos 2.x$ es

$$y = y_h + y_p = C_1.\cos 2.x + C_2.\text{sen } 2.x + 5.x.\text{sen } 2.x$$

KEYNES 2.6.8

Determínese la solución general de $y''-3.y'+2.y = 4.x + e^{2.x}$

SOLUCIÓN

La ecuación es de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y completa. **Su solución general es suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de una solución particular de la ecuación completa.**

La ecuación homogénea es $y''-3.y'+2.y = 0$, siendo $r^2 - 3.r + 2 = 0$ su ecuación característica, de raíces son 1 y 2 (ambas simples). Así, las funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{2.x}$ forman un SFS de la homogénea, cuya solución general es

$$y_h = C_1.e^x + C_2.e^{2.x}$$

Siendo $b(x) = 4.x + e^{2.x}$, la solución particular de la completa es de la forma

$$y_p = (A.x + B) + C.x.e^{2.x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A.x + B \equiv \text{solución particular si fuese } b(x) = 4.x \\ C.x.e^{2.x} \equiv \text{solución particular si fuese } b(x) = e^{2.x} \end{array}}$$

Para hallar "A", "B" y "C" sustituimos y_p, y'_p e y''_p en la ecuación completa:

$$y'' - 3.y' + 2.y = 4.x + e^{2.x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y_p = (A.x + B) + C.x.e^{2.x} \\ y'_p = A + C.(1 + 2.x).e^{2.x} \ \ ; \ \ y''_p = 4.C.(1 + 2.x).e^{2.x} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \left(4.C.(1 + 2.x).e^{2.x}\right) - 3.\left(A + C.(1 + 2.x).e^{2.x}\right) +$$

$$+2.\left((A.x + B) + C.x.e^{2.x}\right) = 4.x + e^{2.x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C.e^{2.x} + 2.A.x + (2.B - 3.A) = 4.x + e^{2.x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} C = 1 \\ 2.A = 4 \\ 2.B - 3.A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 2 \\ B = 3 \\ C = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y_p = 2.x + 3 + x.e^{2.x}$$

En definitiva, la solución general de la ecuación $y'' - 3.y' + 2.y = 4.x + e^{2.x}$ es

$$y = y_h + y_p = C_1.e^x + C_2.e^{2.x} + 2.x + 3 + x.e^{2.x}$$

KEYNES 2.6.9

Siendo $p(t)$ el precio del ron en el instante "t", las funciones de demanda $D(t)$ y oferta $S(t)$ de ron son

$$1)\ \begin{cases} D(t) = 16 - 4.p(t) - 6.p'(t) + 4.p''(t) \\ S(t) = -8 + 8.p(t) + 4.p'(t) + 6.p''(t) \end{cases} ;\ p(0) = 3,\ p'(0) = -5/2$$

$$2)\ \begin{cases} D(t) = 2 - 2.p(t) + 2.p'(t) + p''(t) \\ S(t) = -2 + 3.p(t) + 6.p'(t) + 2.p''(t) \end{cases} ;\ p(0) = 2,\ p'(0) = 1$$

$$3)\ \begin{cases} D(t) = 23 - 2.p(t) + p'(t) - p''(t) \\ S(t) = -5 + 2.p(t) + p'(t) \end{cases} ;\ p(0) = 7,\ p'(0) = -4$$

En cada caso, determínese la trayectoria temporal del precio de equilibrio.

SOLUCIÓN

En los tres casos, al exigir que $D(t) = S(t)$ llegaremos a una ED de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y completa. **Su solución general es suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de una solución particular de la ecuación completa.**

1) Al exigir que $D(t) = S(t)$, resulta:

$$\underbrace{(16 - 4.p(t) - 6.p'(t) + 4.p''(t))}_{D(t)} = \underbrace{(-8 + 8.p(t) + 4.p'(t) + 6.p''(t))}_{S(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p''(t) + 5.p'(t) + 6.p(t) = 12$$

La ecuación homogénea es $p''(t) + 5.p'(t) + 6.p(t) = 0$, siendo $r^2 + 5.r + 6 = 0$ su ecuación característica, con raíces -2 y -3 (simples). Así, $p_1(t) = e^{-2.t}$ y $p_2(t) = e^{-3.t}$ forman un SFS de la homogénea, cuya solución general es

$$p_h(t) = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-3.t}$$

Siendo $b(t) = 12$ un polinomio de grado 0, la solución particular de la ecuación completa es $p_p(t) = Q(t).t^{\alpha}$, donde $Q(t)$ es un polinomio de grado 0 y coeficientes indeterminados (o sea, una constante "A") y α es el orden de multiplicidad de la raíz $r = 0$ en la ecuación característica. Como $r = 0$ no es raíz de dicha ecuación, entonces $\alpha = 0$, por lo que $p_p(t) = A$. Para determinar "A" sustituimos $p_p(t)$, $p_p'(t)$ y $p_p''(t)$ en la completa; así, siendo $p_p'(t) = p_p''(t) = 0$, al sustituir en $p''(t) + 5.p'(t) + 6.p(t) = 12$ resulta $A = 2$ $(6.A = 12 \Rightarrow A = 2)$, y la solución general de la ecuación $p''(t) + 5.p'(t) + 6.p(t) = 12$ es

$$p(t) = p_h(t) + p_p(t) = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-3.t} + 2$$

Al exigir que se satisfagan las condiciones iniciales $p(0) = 3$ y $p'(0) = -5/2$ resulta $C_1 = C_2 = 1/2$:

$$\left.\begin{array}{l} p(0)=3 \\ p'(0)=-5/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1+C_2+2=3 \\ -2.C_1-3.C_2=-5/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=1/2 \\ C_2=1/2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{p(t)=C_1.e^{-2.t}+C_2.e^{-3.t}+2 \;;\; p'(t)=-2.C_1.e^{-2.t}-3.C_2}$$

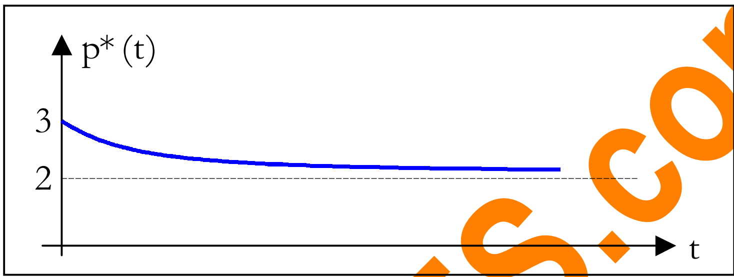
Por tanto, la trayectoria temporal del precio de equilibrio es

$$p^*(t)=0'5.e^{-2.t}+0'5.e^{-3.t}+2$$

Si tu negocio fuera vender ron, seguro que estarías interesado en **analizar el comportamiento del precio de equilibrio a largo plazo**

$$\lim_{t\to+\infty} p^*(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(0'5.e^{-2.t}+0'5.e^{-3.t}+2\right)=2$$

$$\boxed{\text{pues } e^{-2.t} \text{ y } e^{-3.t} \text{ tienden a 0 cuando } t\to+\infty}$$



Observa: con independencia de las condiciones iniciales, el precio de equilibrio $p(t)=C_1.e^{-2.t}+C_2.e^{-3.t}+2$ tiende a 2 cuando $t\to+\infty$, pues con independencia de los valores de C_1 y C_2 sucede que

$$\lim_{t\to+\infty} p(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(C_1.e^{-2.t}+C_2.e^{-3.t}+2\right)=2$$

2) Al exigir que $D(t)=S(t)$, resulta:

$$\underbrace{\left(2-2.p(t)+2.p'(t)+p''(t)\right)}_{D(t)}=\underbrace{\left(-2+3.p(t)+6.p'(t)+2.p''(t)\right)}_{S(t)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p''(t)+4.p'(t)+5.p(t)=4$$

La homogénea es $p''(t)+4.p'(t)+5.p(t)=0$, y $r^2+4.r+5=0$ la característica, con raíces $-2\pm1.i$ simples. Así, $p_1(t)=e^{-2.t}.\cos t$ y $p_2(t)=e^{-2.t}.\text{sen } t$ forman un SFS de la homogénea, cuya solución general es

$$p_h(t)=e^{-2.t}.(C_1.\cos t+C_2.\text{sen } t)$$

Como $b(t)=4$ es constante y $r=0$ no es raíz de la ecuación característica, es $p_p(t)=A$ $(\Rightarrow p_p'(t)=p_p''(t)=0)$. Al sustituir en $p''(t)+4.p'(t)+5.p(t)=4$ resulta $A=4/5$ $(5.A=4\Rightarrow A=4/5)$; así, la solución general de la completa es

$$p(t)=p_h(t)+p_p(t)=e^{-2.t}.(C_1.\cos t+C_2.\text{sen } t)+\frac{4}{5}$$

Al exigir que se satisfagan las condiciones iniciales $p(0)=2$ y $p'(0)=1$ resulta $C_1=6/5$ y $C_2=17/5$:

$$\left.\begin{array}{l} p(0)=2 \\ p'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1+(4/5)=2 \\ -2.C_1+C_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=6/5 \\ C_2=17/5 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p(t)=e^{-2.t}.(C_1.\cos t+C_2.\operatorname{sen} t)+\dfrac{4}{5} \\ p'(t)=e^{-2.t}.(-2.C_1.\cos t-2.C_2.\operatorname{sen} t-C_1.\operatorname{sen} t+C_2.\cos t) \end{array}}$$

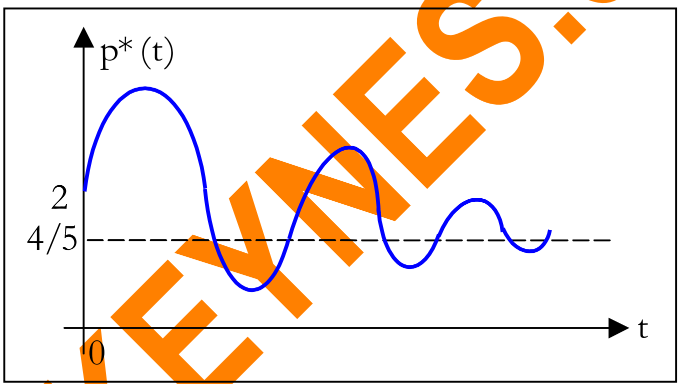
Por tanto, la trayectoria temporal del precio de equilibrio es

$$p^*(t)=\frac{1}{5}.e^{-2.t}.(6.\cos t+17.\operatorname{sen} t)+\frac{4}{5}$$

Comportamiento del precio de equilibrio a largo plazo

$$\lim_{t\to+\infty} p^*(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{5}.e^{-2.t}.(6.\cos t+17.\operatorname{sen} t)+\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2.t}.(6.\cos t+17.\operatorname{sen} t)=0 \\ \boxed{\text{pues } e^{-2.t} \text{ tiende a 0 y } 6.\cos t+17.\operatorname{sen} t \text{ está acotado}} \end{array}}$$



Observa: con independencia de las condiciones iniciales, el precio de equilibrio $p(t)=e^{-2.t}.(C_1.\cos t+C_2.\operatorname{sen} t)+4/5$ tiende a $4/5$ cuando $t\to+\infty$, pues con independencia de los valores de C_1 y C_2 sucede que

$$\lim_{t\to+\infty} p(t)=\lim_{t\to+\infty} e^{-2.t}.(C_1.\cos t+C_2.\operatorname{sen} t)+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$$

3) Al exigir que $D(t)=S(t)$, resulta:

$$\underbrace{(23-2.p(t)+p'(t)-p''(t))}_{D(t)}=\underbrace{(-5+2.p(t)+p'(t))}_{S(t)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow p''(t)+4.p(t)=28$$

La ecuación homogénea es $p''(t)+4.p(t)=0$, siendo $r^2+4=0$ su ecuación característica, con raíces $0\pm 2.i$ simples. Así, $p_1(t)=\cos 2.t$ y $p_2(t)=\operatorname{sen} 2.t$ forman un SFS de la homogénea, cuya solución general es

$$p_h(t)=C_1.\cos 2.t+C_2.\operatorname{sen} 2.t$$

Como $b(t)=28$ es constante y $r=0$ no es raíz de la ecuación característica, es $p_p(t)=A$ $(\Rightarrow p_p'(t)=p_p''(t)=0)$. Al sustituir en $p''(t)+4.p(t)=28$ resulta $A=7$ $(4.A=28 \Rightarrow A=7)$; por tanto, la solución general de la completa es

$$p(t)=p_h(t)+p_p(t)=7+C_1.\cos 2.t+C_2.\text{sen } 2.t$$

Al exigir que se satisfagan las condiciones iniciales $p(0)=7$ y $p'(0)=-4$ resulta $C_1=0$ y $C_2=-2$:

$$\left.\begin{array}{l} p(0)=7 \\ p'(0)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7+C_1=7 \\ 2.C_2=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=0 \\ C_2=-2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p(t)=7+C_1.\cos 2.t+C_2.\text{sen } 2.t \\ p'(t)=-2.C_1.\text{sen } 2.t+2.C_2.\cos 2.t \end{array}}$$

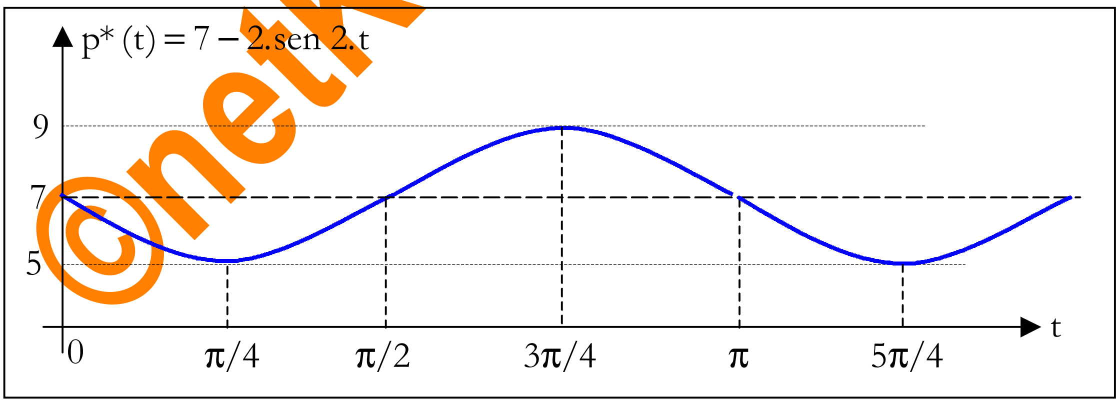
Por tanto, la trayectoria temporal del precio de equilibrio es

$$p^*(t)=7-2.\text{sen } 2.t$$

Comportamiento del precio de equilibrio a largo plazo

$$\lim_{t\to+\infty} p^*(t)=\lim_{t\to+\infty}(7-2.\text{sen } 2.t)=\text{no existe}$$

El límite no existe, pues sen $2.t$ carece de límite cuando $t\to+\infty$. No obstante, como $2.\text{sen } 2.t$ está acotado (es $|2.\text{sen } 2.t|\le 2, \forall\ t$), podemos asegurar que el precio de equilibrio sufrirá oscilaciones acotadas entorno a 7 si $t\to+\infty$; en concreto, el intervalo de oscilación es $[7-2;7+2]=[5;9]$.



Observa: con independencia de las condiciones iniciales, el precio de equilibrio $p(t)=7+C_1.\cos 2.t+C_2.\text{sen } 2.t$ oscila de modo acotado entorno a 7 si $t\to+\infty$, pues con independencia de los valores de C_1 y C_2 sucede que $7+C_1.\cos 2.t+C_2.\text{sen } 2.t$ oscila de modo acotado entorno a 7 si $t\to+\infty$ (la amplitud de la oscilación depende de C_1 y C_2; o sea, depende de las condiciones iniciales).