MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Tema 9

RENTAS FRACCIONADAS

9.1 INTRODUCCIÓN

Las rentas fraccionadas o de frecuencia no anual son aquéllas en que el periodo de capitalización del tanto no coincide con el periodo de pago o cobro del término de la renta.

9.2 RENTA FRACCIONADA CONSTANTE

Pueden plantearse dos situaciones distintas.

- ## Término anual y tanto de frecuencia "m"

Calculamos el tanto $i=\left(1+i^{(m)}\right)^m-1$ de interés efectivo anual equivalente a $i^{(m)}$, y con el tanto "i" valoramos la renta en función de sus características.

$$V_0=C.a_{\overline{n|}i}\ ;\ V_n=C.s_{\overline{n|}i}\ ;\ \overline{V}_0=C.a_{\overline{n|}i}.(1+i)\ ;\ \overline{V}_n=C.s_{\overline{n|}i}.(1+i)$$

- ## Término de frecuencia "m", tanto anual

Para lidiar este caso hay dos caminos:

a) Calculamos el tanto $i^{(m)}=(1+i)^{1/m}-1$ de interés fraccionado equivalente al tanto efectivo anual "i", y con el tanto $i^{(m)}$ valoramos la renta:

$$V_0^{(m)}=C_m.a_{\overline{m.n|}i^{(m)}}\ ;\ V_n^{(m)}=C_m.s_{\overline{m.n|}i^{(m)}}$$

$$\overline{V}_0^{(m)}=C_m.a_{\overline{m.n|}i^{(m)}}.\left(1+i^{(m)}\right)\ ;\ \overline{V}_n^{(m)}=C_m.s_{\overline{m.n|}i^{(m)}}.\left(1+i^{(m)}\right)$$

b) Agrupando los términos de cada año en el vencimiento del primer o último término de ese año, la renta de frecuencia subperiodal (mensual, trimestral, etc.) se transforma en una renta anual, que se suma como ya sabemos.

Pospagable

Consideremos una renta de "n" años, inmediata, constante, temporal, pospagable, con término C_m de frecuencia "m", al tanto de valoración anual "i"

	C_m	C_m	...	C_m	C_m	C_m	C_m	...	C_m	C_m	C_m	...	C_m	C_m
0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	1	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	2	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	n
$V_0^{(m)}$														$V_n^{(m)}$

Agrupando los términos de **cualquier año** en el vencimiento del último término de dicho año, se tiene:

	C_m	C_m	...	C_m	C_m
$k-1$	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	k

$$\Rightarrow C=C_m.s_{\overline{m|}i^{(m)}}\Rightarrow$$

"C" es el valor final de un renta **constante** de "m" términos de cuantía C_m, inmediata, pospagable, temporal, al tanto $i^{(m)}$; o sea: $C=C_m.s_{\overline{m|}i^{(m)}}$.

$$\Rightarrow C=C_m.s_{\overline{m|}i^{(m)}}=C_m.\frac{\left(1+i^{(m)}\right)^m-1}{i^{(m)}}=C_m.\frac{i}{i^{(m)}}\Rightarrow$$

$$\boxed{\left(1+i^{(m)}\right)^m-1=i}$$

$$\Rightarrow C=C_m.\frac{m.i}{m.i^{(m)}}=C_m.\frac{m.i}{j_m}\equiv\begin{Bmatrix}\text{cuantía anual equivalente a un conjunto de "m"}\\ \text{pagos fraccionados pospagables de cuantía } C_m\end{Bmatrix}$$

Así, la renta equivale a la renta constante y pospagable de "n" anualidades de cuantía $C_m.\frac{m.i}{j_m}$:

	$C_m.\frac{m.i}{j_m}$	$C_m.\frac{m.i}{j_m}$	$C_m.\frac{m.i}{j_m}$	....	$C_m.\frac{m.i}{j_m}$
0	1	2	3	....	n

Por tanto, los valores actual $V_0^{(m)}$ y final $V_n^{(m)}$ de la renta fraccionada coinciden con los respectivos valores actual y final de la renta de "n" años, inmediata, constante, temporal, pospagable, con término anual $C_m.\frac{m.i}{j_m}$, al tanto de valoración anual "i":

$$V_0^{(m)} = C_m.\frac{m.i}{j_m}.a_{\overline{n}|i} \;\; ; \;\; V_n^{(m)} = C_m.\frac{m.i}{j_m}.s_{\overline{n}|i}$$

Puedes comprobar que:

$$V_0^{(m)} = C_m.\frac{m.i}{j_m}.a_{\overline{n}|i} \equiv C_m.a_{\overline{m.n}|i^{(m)}} \;\; ; \;\; V_n^{(m)} = C_m.\frac{m.i}{j_m}.s_{\overline{n}|i} \equiv C_m.s_{\overline{m.n}|i^{(m)}}$$

Prepagable

Consideremos una renta de "n" años, inmediata, constante, temporal, prepagable, con término C_m de frecuencia "m", al tanto de valoración anual "i"

C_m	C_m	C_m	...	C_m	C_m	C_m	C_m	...	C_m	C_m	C_m	...	C_m		
0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	1	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	2	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	n	
$\overline{V}_0^{(m)}$														$\overline{V}_n^{(m)}$	

Agrupando los términos de cualquier año en el vencimiento del último término de dicho año, se tiene que:

C_m	C_m	C_m	...	C_m	
$k-1$	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	k
					C

$$\Rightarrow C = C_m.s_{\overline{m}|i^{(m)}}.(1+i^{(m)}) \Rightarrow$$

"C" es el valor final de un renta **constante** de "m" términos de cuantía C_m, inmediata, prepagable, temporal, al tanto $i^{(m)}$; o sea: $C_m.s_{\overline{m}|i^{(m)}}.(1+i^{(m)})$.

$$\Rightarrow C = C_m.s_{\overline{m}|i^{(m)}}.(1+i^{(m)}) = C_m.\frac{\left(1+i^{(m)}\right)^m - 1}{i^{(m)}}.(1+i^{(m)}) = C_m.\frac{i}{i^{(m)}}.(1+i^{(m)}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(1+i^{(m)}\right)^m - 1 = i}$$

$$\Rightarrow C = C_m.\frac{m.i}{m.i^{(m)}}.(1+i^{(m)}) = C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i^{(m)}) = C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}$$

$$\boxed{1+i^{(m)} = (1+i)^{1/m}}$$

La renta equivale a la renta constante y pospagable de "n" anualidades de cuantía $C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}$:

	$C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}$	$C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}$	....	$C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}$	$C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}$
0	1	2	....	$n-1$	n

Por tanto, los valores actual $\overline{V}_0^{(m)}$ y final $\overline{V}_n^{(m)}$ de la renta considerada coinciden con los respectivos valores actual y final de una renta de "n" años, inmediata, constante, temporal, pospagable, con término anual $C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}$, al tanto de valoración anual "i"; o sea:

$$\overline{V}_0^{(m)} = C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}.a_{\overline{n}|i} \equiv C_m.a_{\overline{m.n}|i^{(m)}}.\left(1+i^{(m)}\right)$$

$$\overline{V}_n^{(m)} = C_m.\frac{m.i}{j_m}.(1+i)^{1/m}.s_{\overline{n}|i} \equiv C_m.s_{\overline{m.n}|i^{(m)}}.\left(1+i^{(m)}\right)$$

9.3 RENTA FRACCIONADA EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En este tipo de rentas, la razón nos obliga a trabajar con una u otra unidad de tiempo: **si la razón es fraccionada, trabajaremos con fracciones de año; y si es anual, trabajaremos en años.**

Pueden plantearse dos situaciones distintas.

- ## Término y razón de frecuencia "m", tanto anual

Como la razón es fraccionada, trabajaremos con fracciones de año: calculamos el tanto de interés fraccionado $i^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1$ equivalente al tanto anual "i", y con el tanto $i^{(m)}$ valoramos la renta en función de sus características, teniendo en cuenta que la duración es "m.n". Por tanto:

$$A(C_m;d_m)_{\overline{m.n}|i^{(m)}} = \left(C_m + \frac{d_m}{i^{(m)}} + d_m.m.n\right).a_{\overline{m.n}|i^{(m)}} - \frac{d_m.m.n}{i^{(m)}}$$

$$\boxed{A(C;d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i} + d.n\right).a_{\overline{n}|i} - \frac{d.n}{i}}$$

$$S(C_m;d_m)_{\overline{m.n}|i^{(m)}} = \left(C_m + \frac{d_m}{i^{(m)}}\right).s_{\overline{m.n}|i^{(m)}} - \frac{d_m.m.n}{i^{(m)}}$$

$$\boxed{S(C;d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right).s_{\overline{n}|i} - \frac{d.n}{i}}$$

$$\bar{A}(C_m;d_m)_{\overline{m.n}|i}^{(m)} = A(C_m;d_m)_{\overline{m.n}|i^{(m)}}.\left(1+i^{(m)}\right) \ ; \ \bar{S}(C_m;d_m)_{\overline{m.n}|i^{(m)}} = S(C_m;d_m)_{\overline{m.n}|i^{(m)}}.\left(1+i^{(m)}\right)$$

- ## Término de frecuencia "m", razón y tanto anuales

Renta pospagable

C_m	...	C_m	C_m	C_m+d	...	C_m+d	C_m+d	$C_m+2.d$	...	$C_m+2.d$	$C_m+2.d$	....	$C_m+(n-1).d$
0 $\frac{1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	1	$1\frac{1}{m}$	...	$1\frac{m-1}{m}$	2	$2\frac{1}{m}$	...	$2\frac{m-1}{m}$	3	....	n

Agrupando los términos de cada año en el vencimiento del primer o último término de ese año, la renta de frecuencia subperiodal (mensual, trimestral, etc.) se transforma en una renta anual, que se suma como ya sabemos. Así, agrupando los términos del k-ésimo año en el vencimiento del último término de dicho año, se tiene:

	$C_m+(k-1).d$	$C_m+(k-1).d$	...	$C_m+(k-1).d$	$C_m+(k-1).d$
$k-1$	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	k
					C_k

$$\Rightarrow C_k = (C_m + (k-1).d).\frac{m.i}{j_m}$$

Como C_k es el valor final de un renta **constante** con "m" términos de cuantía $C_m + (k-1).d$, inmediata, pospagable, temporal, al tanto $i^{(m)}$, es:

$$C_k = (C_m + (k-1).d).s_{\overline{m}|i} = (C_m + (k-1).d).\frac{m.i}{j_m}$$

Agrupando los términos del siguiente año en el vencimiento del último término de ese año, se tiene:

	$C_m+k.d$	$C_m+k.d$	...	$C_m+k.d$	$C_m+k.d$
k	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	$k+1$
					C_{k+1}

$$\Rightarrow C_{k+1} = (C_m + k.d).\frac{m.i}{j_m}$$

Como C_{k+1} es el valor final de un renta **constante** de "m" términos de cuantía $C_m + k.d$, inmediata, pospagable, temporal, al tanto $i^{(m)}$, es:

$$C_{k+1} = (C_m + k.d).s_{\overline{m}|i} = (C_m + k.d).\frac{m.i}{j_m}$$

Como para todo valor de "k" sucede que $C_{k+1} - C_k = (C_m + k.d).\frac{m.i}{j_m} - (C_m + (k-1).d).\frac{m.i}{j_m} = d.\frac{m.i}{j_m}$, la renta equivale a la renta aritmética pospagable de "n" términos, el primero de cuantía $C_m.\frac{m.i}{j_m}$ (obtenido al hacer $k=1$ en $C_k = (C_m + (k-1).d).\frac{m.i}{j_m}$) y razón $d.\frac{m.i}{j_m}$:

	$C_m\cdot\frac{m.i}{j_m}$	$(C_m+d).\frac{m.i}{j_m}$	$(C_m+2.d).\frac{m.i}{j_m}$	....	$(C_m+(n-1).d).\frac{m.i}{j_m}$
0	1	2	3	....	n

Su **valor actual** $A(C_m;d)_{\overline{n|}i}$ es:

$$A(C_m;d)_{\overline{n|}i} = \left(C_m\cdot\frac{m.i}{j_m} + \frac{d.\frac{m.i}{j_m}}{i} + d.\frac{m.i}{j_m}.n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d.\frac{m.i}{j_m}.n}{i} = \frac{m.i}{j_m}.\left(\left(C_m + \frac{d}{i} + d.n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}\right)$$

Su **valor final** $S(C_m;d)_{\overline{n|}i}$ es:

$$S(C_m;d)_{\overline{n|}i} = \left(C_m\cdot\frac{m.i}{j_m} + \frac{d.\frac{m.i}{j_m}}{i}\right).s_{\overline{n|}i} - \frac{d.\frac{m.i}{j_m}.n}{i} = \frac{m.i}{j_m}.\left(\left(C_m + \frac{d}{i}\right).s_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}\right)$$

Renta prepagable

$$\bar{A}(C_m;d)_{\overline{n|}i} = A(C_m;d)_{\overline{n|}i}.(1+i^{(m)}) \;;\; \bar{S}(C_m;d)_{\overline{n|}i} = S(C_m;d)_{\overline{n|}i}.(1+i^{(m)})$$

- ## CASO ESPECIAL

A veces sucede que dentro de un año hay pagos fraccionados de distinta cuantía, o hay alguna fracción de año en la que so se produce ningún vencimiento.

Considera una renta de "n" años fraccionada mensualmente de modo que en los meses de enero, febrero, marzo, octubre, noviembre y diciembre del primer año se producen vencimientos de cuantía constante "C" que se incrementan anualmente de forma aritmética de razón "d". En los restantes meses de dicho primer año se producen vencimientos de cuantía constante C' que se incrementan anualmente de forma aritmética de razón d'.

Agrupando los meses de enero, febrero, marzo, octubre, noviembre y diciembre del k-ésimo año en el vencimiento del último término de dicho año, se tiene:

$$C_k = (C+(k-1).d).\left((1+i)^{11/12} + (1+i)^{10/12} + (1+i)^{9/12} + (1+i)^{2/12} + (1+i)^{1/12} + 1\right) \Rightarrow$$

C+(k−1).d	C+(k−1).d	C+(k−1).d							C+(k−1).d	C+(k−1).d	C+(k−1).d
E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
k − 1											k
											C_k

$$\Rightarrow C_k = (C+(k-1).d).X$$

$$\boxed{X \equiv (1+i)^{11/12} + (1+i)^{10/12} + (1+i)^{9/12} + (1+i)^{2/12} + (1+i)^{1/12} + 1}$$

Agrupando los meses de enero, febrero, marzo, octubre, noviembre y diciembre del siguiente año en el vencimiento del último término de dicho año, se tiene:

$$C_{k+1} = (C+k.d).\left((1+i)^{11/12} + (1+i)^{10/12} + (1+i)^{9/12} + (1+i)^{2/12} + (1+i)^{1/12} + 1\right) \Rightarrow$$

C+k.d	C+k.d	C+k.d							C+k.d	C+k.d	C+k.d
E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
k − 1											k + 1
											C_{k+1}

$$\Rightarrow C_{k+1} = (C+k.d).X$$

$$\boxed{X \equiv (1+i)^{11/12} + (1+i)^{10/12} + (1+i)^{9/12} + (1+i)^{2/12} + (1+i)^{1/12} + 1}$$

Para todo valor de "k" sucede que $C_{k+1} - C_k = (C+k.d).X - (C+(k-1).d).X = d.X$. Así, la renta que forman los sucesivos vencimientos que cada año se producen en enero, febrero, marzo, octubre, noviembre y diciembre equivale a la renta aritmética pospagable "n" términos, razón $d.X$ y primer término $C.X$:

	C.X	(C+d).X	(C+2.d).X	....	(C+(n−1).d).X
0	k=1	k=2	k=3	....	k=n

$$C.X \equiv C.\underbrace{\left((1+i)^{11/12}+(1+i)^{10/12}+(1+i)^{9/12}+(1+i)^{2/12}+(1+i)^{1/12}+1\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Se obtiene al hacer } k=1 \text{ en}\\ C_k=(C+(k-1).d).\left((1+i)^{11/12}+(1+i)^{10/12}+(1+i)^{9/12}+(1+i)^{2/12}+(1+i)^{1/12}+1\right)\end{array}}$$

Su **valor actual** es:

$$A(C_m;d)_{\overline{n}|i}=\left(C.X+\frac{d.X}{i}+d.X.n\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.X.n}{i}=X.\left(\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}\right)=X.A(C;d)_{\overline{n}|i}$$

$$\boxed{A(Pepe;Juan)_{\overline{n}|i}=\left(Pepe+\frac{Juan}{i}+(Juan).n\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{(Juan).n}{i}}$$

Agrupando los meses de abril, mayo, junio, julio, agosto y septiembre del k-ésimo año en el vencimiento del último término de dicho año, se tiene:

$$C'_k=(C'+(k-1).d').\left((1+i)^{8/12}+(1+i)^{7/12}+(1+i)^{6/12}+(1+i)^{5/12}+(1+i)^{4/12}+(1+i)^{3/12}\right)\Rightarrow$$

			C'+(k−1).d'	C'+(k−1).d'	C'+(k−1).d'	C'+(k−1).d'	C'+(k−1).d'	C'+(k−1).d'			
E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
k−1											k
											C'_k

$$\Rightarrow C'_k=(C'+k.d').Y$$

$$\boxed{Y\equiv(1+i)^{8/12}+(1+i)^{7/12}+(1+i)^{6/12}+(1+i)^{5/12}+(1+i)^{4/12}+(1+i)^{3/12}}$$

Agrupando los meses de abril, mayo, junio, julio, agosto y septiembre del siguiente año en el vencimiento del último término de dicho año, se tiene:

$$C'_{k+1}=(C'+k.d').\left((1+i)^{8/12}+(1+i)^{7/12}+(1+i)^{6/12}+(1+i)^{5/12}+(1+i)^{4/12}+(1+i)^{3/12}\right)\Rightarrow$$

			C'+k.d'	C'+k.d'	C'+k.d'	C'+k.d'	C'+k.d'	C'+k.d'			
E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
k											k+1
											C'_{k+1}

$$\Rightarrow C'_{k+1}=(C'+k.d').Y$$

$$\boxed{Y\equiv(1+i)^{8/12}+(1+i)^{7/12}+(1+i)^{6/12}+(1+i)^{5/12}+(1+i)^{4/12}+(1+i)^{3/12}}$$

Y magia potagia, para todo "k" sucede que

$$C'_{k+1}-C'_k=(C'+k.d').Y-(C'+(k-1).d').Y=d'.Y$$

Así, la renta que forman los sucesivos vencimientos que cada año se producen en abril, mayo, junio, julio, agosto y septiembre equivale a la renta aritmética pospagable de "n" términos, razón $d'.Y$ y primer término $C'.Y$:

	C'.Y	(C'+d').Y	(C'+2.d').Y	....	(C'+(n−1).d').Y
0	k=1	k=2	k=3	....	k=n

$$C'.Y\equiv C'.\underbrace{\left((1+i)^{8/12}+(1+i)^{7/12}+(1+i)^{6/12}+(1+i)^{5/12}+(1+i)^{4/12}+(1+i)^{3/12}\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Se obtiene al hacer } k=1 \text{ en}\\ C'_k=(C'+(k-1).d').\left((1+i)^{8/12}+(1+i)^{7/12}+(1+i)^{6/12}+(1+i)^{5/12}+(1+i)^{4/12}+(1+i)^{3/12}\right)\end{array}}$$

Su **valor actual** es:

$$A(C_m;d)_{\overline{n|}i} = \left(C'.Y + \frac{d'.Y}{i} + d'.Y.n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d'.Y.n}{i} = Y.\left(\left(C' + \frac{d'}{i} + d'.n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d'.n}{i}\right) = Y.A(C';d')_{\overline{n|}i}$$

$$\boxed{A(Pepe;Juan)_{\overline{n|}i} = \left(Pepe + \frac{Juan}{i} + (Juan).n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{(Juan).n}{i}}$$

Así, el valor actual de la renta de "n" años fraccionada mensualmente de modo que en los meses de enero, febrero, marzo, octubre, noviembre y diciembre del primer año se producen vencimientos de cuantía constante "C" que se incrementan anualmente de forma aritmética de razón "d", y en los restantes meses de dicho primer año se producen vencimientos de cuantía constante C' que se incrementan anualmente de forma aritmética de razón d', es:

$$X.\left(\left(C + \frac{d}{i} + d.n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}\right) + Y.\left(\left(C' + \frac{d'}{i} + d'.n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d'.n}{i}\right)$$

9.4 RENTA FRACCIONADA EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

En este tipo de rentas, la razón nos obliga a trabajar con una u otra unidad de tiempo: **si la razón es fraccionada, trabajaremos con fracciones de año; y si es anual, trabajaremos en años.**

Pueden plantearse dos situaciones distintas.

- ## Término y razón de frecuencia "m", tanto anual

Como la razón es fraccionada, trabajaremos con fracciones de año: calculamos el tanto de interés fraccionado $i^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1$ equivalente al tanto anual "i", y con el tanto $i^{(m)}$ valoramos la renta en función de sus características, teniendo en cuenta que la duración es "m.n". Por tanto:

$$A(C_m;q_m)_{\overline{m.n|}i^{(m)}} = \begin{cases} C_m.\dfrac{1-(q_m)^{m.n}.\left(1+i^{(m)}\right)^{-m.n}}{1+i^{(m)}-q_m}, & \text{si } q_m \neq 1+i^{(m)} \\ C_m.m.n.\left(1+i^{(m)}\right)^{-1}, & \text{si } q_m = 1+i^{(m)} \end{cases}$$

$$\boxed{A(C;q)_{\overline{n|}i} = \begin{cases} C.\dfrac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}, & \text{si } q \neq 1+i \\ C.n.(1+i)^{-1}, & \text{si } q = 1+i \end{cases}}$$

$$S(C_m;q_m)_{\overline{m.n|}i^{(m)}} = \begin{cases} C_m.\dfrac{\left(1+i^{(m)}\right)^{m.n}-(q_m)^{m.n}}{1+i^{(m)}-q_m}, & \text{si } q_m \neq 1+i^{(m)} \\ C_m.m.n.\left(1+i^{(m)}\right)^{m.n-1}, & \text{si } q_m = 1+i^{(m)} \end{cases}$$

$$\boxed{S(C;q)_{\overline{n|}i} = \begin{cases} C.\left(\dfrac{(1+i)^n-q^n}{1+i-q}\right) & \text{si } q \neq 1+i \\ C.n.(1+i)^{n-1} & \text{si } q = 1+i \end{cases}}$$

$$\ddot{A}(C_m;q_m)_{\overline{m.n|}i^{(m)}} = A(C_m;q_m)_{\overline{m.n|}i^{(m)}}.\left(1+i^{(m)}\right)\ ;\ \ddot{S}(C_m;q_m)_{\overline{m.n|}i^{(m)}} = S(C_m;q_m)_{\overline{m.n|}i^{(m)}}.\left(1+i^{(m)}\right)$$

- ## Término de frecuencia "m", razón y tanto anuales

Renta postpagable

	C_m	...	C_m	C_m	$C_m.q$	...	$C_m.q$	$C_m.q$	$C_m.q^2$	...	$C_m.q^2$	$C_m.q^2$	....	$C_m.q^{n-1}$
0	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	1	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	2	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	3	....	n

Agrupando parcialmente los términos de cada periodo (año) en el vencimiento del primer o último término del periodo, la renta de frecuencia subperiodal (mensual, trimestral, etc.) se transforma en una renta periodial (anual), que se suma como ya sabemos. Agrupando los términos del k-ésimo periodo (año) en el vencimiento del último término de él, se tiene:

	$C_m.q^{k-1}$	$C_m.q^{k-1}$	...	$C_m.q^{k-1}$	$C_m.q^{k-1}$
$k-1$	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	k
					C_k

$$\Rightarrow C_k = \left(C_m.q^{k-1}\right).\frac{m.i}{j_m}$$

Como C_k es el valor final de un renta **constante** con "m" términos de cuantía $C_m.q^{k-1}$, inmediata, pospagable, temporal, al tanto $i^{(m)}$, es:

$$C_k = \left(C_m.q^{k-1}\right).s_{\overline{m}|i} = \left(C_m.q^{k-1}\right).\frac{m.i}{j_m}$$

Agrupando los términos del siguiente periodo (año) en el vencimiento del último término de él, se tiene:

	$C_m.q^k$	$C_m.q^k$	...	$C_m.q^k$	$C_m.q^k$
k	$\frac{1}{m}$	$\frac{m-1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	$k+1$
					C_{k+1}

$$\Rightarrow C_{k+1} = \left(C_m.q^k\right).\frac{m.i}{j_m}$$

Como C_{k+1} es el valor final de un renta **constante** con "m" términos de cuantía $C_m.q^k$, inmediata, pospagable, temporal, al tanto $i^{(m)}$, es:

$$C_{k+1} = \left(C_m.q^k\right).s_{\overline{m}|i} = \left(C_m.q^k\right).\frac{m.i}{j_m}$$

Y para todo "k" sucede que:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{\left(C_m.q^k\right).m.i/j_m}{\left(C_m.q^{k-1}\right).m.i/j_m} = q$$

Así, la renta equivale a la renta geométrica pospagable de "n" anualidades, primer término $C_m.\frac{m.i}{j_m}$ (hacer $k=1$ en $C_k = \left(C_m.q^{k-1}\right).\frac{m.i}{j_m}$) y razón "q":

	$C_m.\frac{m.i}{j_m}$	$C_m.\frac{m.i}{j_m}.q$	$C_m.\frac{m.i}{j_m}.q^2$	....	$C_m.\frac{m.i}{j_m}.q^{n-1}$
0	1	2	3	....	n

Su **valor actual** es:
$$A(C_m;q)_{\overline{n}|i} = \begin{cases} C_m.\frac{m.i}{j_m}.\frac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}, & \text{si } q \neq 1+i \\ C_m.\frac{m.i}{j_m}.n.(1+i)^{-1}, & \text{si } q = 1+i \end{cases}$$

$$\boxed{A(C;q)_{\overline{n}|i} = \begin{cases} C.\frac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}, & \text{si } q \neq 1+i \\ C.n.(1+i)^{-1}, & \text{si } q = 1+i \end{cases}}$$

Su **valor final** es $S(C_m;q)_{\overline{n}|i} = A(C_m;q)_{\overline{n}|i}.(1+i)^n$.

Renta prepagable

$$\ddot{A}(C_m;q)_{\overline{n}|i} = A(C_m;q)_{\overline{n}|i}.(1+i^{(m)}) \ ; \ \ddot{S}(C_m;q)_{\overline{n}|i} = S(C_m;q)_{\overline{n}|i}.\left(1+i^{(m)}\right)$$

9.5 RENTAS CONTINUAS

Aunque una renta continua es una distribución continua de capitales, en la práctica consideraremos rentas continuas a las rentas fraccionadas en que la frecuencia "m" es mayor que doce; es decir, pagos quincenales, semanales, diarios, etc. **Lo que realmente consideramos continuo es la capitalización de los pagos y no la periodicidad de los mismos,** pues en tal caso el valor de la renta sería infinito.

Los valores actual y final de una renta continua los obtendremos calculando los respectivos límites cuando "m" tiende a infinito de los valores actual y final de una renta fraccionada de iguales características.

Para una renta constante, pospagable y continua, es:

- $$\lim_{m\to\infty} V_0^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left(C_m.\frac{m.i}{j_m}.a_{\overline{n}|i}\right) = C_m.m.i.a_{\overline{n}|i}.\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{j_m}\right) =$$

$$= C_m.m.i.a_{\overline{n}|i}.\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m.i^{(m)}}\right) = C_m.m.i.a_{\overline{n}|i}.\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m.\left((1+i)^{1/m}-1\right)}\right) =$$

$$\boxed{\text{si } m\to\infty \Rightarrow (1+i)^{1/m}-1 \approx \frac{1}{m}.\text{Ln}\,(1+i)}$$

$$= C_m.m.i.a_{\overline{n}|i}.\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m.\frac{1}{m}.\text{Ln}\,(1+i)}\right) = C_m.\frac{m.i}{\text{Ln}\,(1+i)}.a_{\overline{n}|i}$$

- $$\lim_{m\to\infty} V_n^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left(C_m.\frac{m.i}{j_m}.s_{\overline{n}|i}\right) = C_m.m.i.s_{\overline{n}|i}.\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{j_m}\right) = C_m.\frac{m.i}{\text{Ln}\,(1+i)}.s_{\overline{n}|i}.$$

Como vemos, basta sustituir j_m por Ln $(1+i)$ en las expresiones fraccionadas $C_m.\frac{m.i}{j_m}.a_{\overline{n}|i}$ y $C_m.\frac{m.i}{j_m}.s_{\overline{n}|i}$.

Si la renta es constante, prepagable y continua, sus correspondientes valores actual y final coinciden con los respectivos valores actual y final de la pospagable de iguales características. En efecto:

- $$\lim_{m\to\infty} \ddot{V}_0^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left(V_0^{(m)}.(1+i)^{1/m}\right) = \lim_{m\to\infty} V_0^{(m)} = C_m.\frac{m.i}{\text{Ln}\,(1+i)}.a_{\overline{n}|i}$$

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} (1+i)^{1/m} = (1+i)^0 = 1}$$

- $$\lim_{m\to\infty} \ddot{V}_n^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left(V_n^{(m)}.(1+i)^{1/m}\right) = \lim_{m\to\infty} V_n^{(m)} = C_m.\frac{m.i}{\text{Ln}\,(1+i)}.s_{\overline{n}|i}$$

En lo que se refiere a rentas variables, **no consideramos continuas aquéllas cuya razón sea fraccionada;** es decir, $(C_m;d_m;i)$ y $(C_m;q_m;i)$.

Las rentas $(C_m;d;i)$ y $(C_m;q;i)$ de razón anual las consideraremos continuas, y con ellas se trabaja de igual modo que con las constantes.

Por ejemplo:

- $$\lim_{m\to\infty} A(C_m;d)_{\overline{n}|i} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m.i}{j_m}.\left(\left(C_m+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}\right)\right) = \frac{m.i}{\text{Ln}\,(1+i)}.A(C;d)_{\overline{n}|i}$$

- $$\lim_{m\to\infty} A(C_m;q)_{\overline{n}|i} = \lim_{m\to\infty}\left(C_m.\frac{m.i}{j_m}.\frac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}\right) = \frac{m.i}{\text{Ln}\,(1+i)}.A(C;q)_{\overline{n}|i}$$

$$\boxed{\text{si } q\neq 1+i}$$

Como vemos, en toda renta continua, ya sea constante o variable (en progresión aritmética o geométrica), basta sustituir el tanto nominal j_m por Ln $(1+i)$ en las correspondientes expresiones fraccionadas.