MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Tema 8

RENTAS VARIABLES

$$C \ ; \ C+d \ ; \ C+2.d \ ; \ C+3.d \ ; \ .....$$

$$C \ ; \ C.q \ ; \ C.q^2 \ ; \ C.q^3 \ ; \ .....$$

8.1 RENTAS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Se caracterizan porque la cuantía de sus términos forma una progresión aritmética; así, siendo "d" la razón de la progresión, las cuantías citadas son:

$$\begin{aligned} &C_1 = C \\ &C_2 = C + d \\ &C_3 = C + 2.d \\ &:::::::::::::::::::: \\ &C_n = C + (n-1).d \end{aligned}$$

La razón "d" puede darse directamente ($d = 40$ € ó $d = -20$ €), pero normalmente se dará en términos porcentuales respecto a "C". Por ejemplo:

$$\Delta 5\% \text{ no acumulativo} \Leftrightarrow d = 0'05.C$$

$$\nabla 5\% \text{ no acumulativo} \Leftrightarrow d = -0'05.C$$

Si $d > 0$ estamos ante una renta en progresión aritmética creciente. Si $d < 0$ estamos ante una renta en progresión aritmética decreciente; en tal caso, el número de términos está limitado a los positivos, pues no hay capitales negativos.

8.1.1 Renta en PA, inmediata y temporal

POSPAGABLE

El **valor actual** V_0 de una renta variable en progresión aritmética, inmediata, pospagable y temporal de primer término "C" y razón "d" lo obtenemos aplicando el principio general de equivalencia de capitales en t_0; o sea, contracapitalizamos todos los términos de la renta en el punto t_0:

	C	$C+d$	$C+2.d$	...	$C+(n-2).d$	$C+(n-1).d$
t_0	t_1	t_2	t_3	...	t_{n-1}	t_n
V_0						V_n

Si, por comodidad, hacemos $(1+i)^{-1} \equiv \nu$, es:

$$V_0 = C.\nu + (C+d).\nu^2 + (C+2.d).\nu^3 + \ldots + (C+(n-2).d).\nu^{n-1} + (C+(n-1).d).\nu^n \qquad (I)$$

Al multiplicar por "ν" los dos miembros de (I), resulta:

$$V_0.\nu = C.\nu^2 + (C+d).\nu^3 + (C+2.d).\nu^4 + \ldots + (C+(n-2).d).\nu^n + (C+(n-1).d).\nu^{n+1} \qquad (II)$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones (I) y (II), se obtiene:

$$V_0.(1-\nu) = C.\nu + d.\nu^2 + d.\nu^3 + \ldots + d.\nu^n - C.\nu^{n+1} - d.n.\nu^{n+1} + d.\nu^{n+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{1-\nu = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = i.\nu}$$

$$\Rightarrow V_0.i.\nu = C.\nu + d.\nu^2 + d.\nu^3 + \ldots + d.\nu^n - C.\nu^{n+1} - d.n.\nu^{n+1} + d.\nu^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0.i.\nu = C.\nu.\left(1-\nu^n\right) + d.\nu.\left(\nu + \nu^2 + \ldots + \nu^n\right) - d.n.\nu^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0.i = C.\left(1-\nu^n\right) + d.\left(\nu + \nu^2 + \ldots + \nu^n\right) - d.n.\nu^n \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu + \nu^2 + \ldots + \nu^n = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{\overline{n|}i}}$$

$$\Rightarrow V_0.i = C.\left(1-\nu^n\right) + d.a_{\overline{n|}i} - d.n.\nu^n \Rightarrow V_0 = C.\frac{1-\nu^n}{i} + \frac{d}{i}a_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}.\nu^n \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu \equiv (1+i)^{-1}}$$

$$\Rightarrow V_0 = C.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{d}{i}a_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}.(1+i)^{-n} = C.a_{\overline{n|}i} + \frac{d}{i}a_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}.(1+i)^{-n} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{\overline{n|}i}}$$

$$\Rightarrow V_0 = \left(C + \frac{d}{i}\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}.(1+i)^{-n} \equiv A(C;d)_{\overline{n|}i} \qquad (III)$$

Sumando y restando $d.n/i$ al segundo miembro de (III), obtenemos una expresión más cómoda:

$$V_0=\left(C+\frac{d}{i}\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}+\frac{d.n}{i}-\frac{d.n}{i}.(1+i)^{-n}=\left(C+\frac{d}{i}\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}+d.n.\underbrace{\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)}_{a_{\overline{n}|i}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0=\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}\equiv A(C;d)_{\overline{n}|i}\qquad \text{(IV)}$$

El **valor final** $V_n\equiv S(C;d)_{\overline{n}|i}$ lo obtenemos capitalizando "n" periodos el valor actual $V_0\equiv A(C;d)_{\overline{n}|i}$; así, partiendo de (IV), resulta:

$$V_n\equiv S(C;d)_{\overline{n}|i}=V_0.(1+i)^n=\left(\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}\right).(1+i)^n=\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).s_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}.(1+i)^n\qquad \text{(V)}$$

Partiendo de (III) obtenemos una expresión más cómoda:

$$V_n\equiv S(C;d)_{\overline{n}|i}=V_0.(1+i)^n=\left(\left(C+\frac{d}{i}\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}.(1+i)^{-n}\right).(1+i)^n=\left(C+\frac{d}{i}\right).s_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}\qquad \text{(VI)}$$

PREPAGABLE

El **valor actual** $\ddot{A}(C;d)_{\overline{n}|i}$ de una renta variable en progresión aritmética, inmediata, prepagable y temporal de primer término "C" y razón "d", lo obtenemos empleando la relación entre los valores actuales de rentas pospagables y prepagables; o sea, $\ddot{A}(C;d)_{\overline{n}|i}$ se obtiene capitalizando $A(C;d)_{\overline{n}|i}$ un periodo:

$$\ddot{A}(C;d)_{\overline{n}|i}=A(C;d)_{\overline{n}|i}.(1+i)=\left(\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}\right).(1+i)$$

$$\boxed{A(C;d)_{\overline{n}|i}=\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}}$$

El **valor final** $\ddot{S}(C;d)_{\overline{n}|i}$ de una renta variable en progresión aritmética inmediata, prepagable y temporal de primer término "C" y razón "d", lo obtenemos empleando la relación entre los valores finales de rentas pospagables y prepagables; o sea, $\ddot{S}(C;d)_{\overline{n}|i}$ se obtiene capitalizando $S(C;d)_{\overline{n}|i}$ un periodo:

$$\ddot{S}(C;d)_{\overline{n}|i}=S(C;d)_{\overline{n}|i}.(1+i)=\left(\left(C+\frac{d}{i}\right).s_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}\right).(1+i)$$

$$\boxed{S(C;d)_{\overline{n}|i}=\left(C+\frac{d}{i}\right).s_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}}$$

8.1.2 Renta en PA, inmediata y perpetua

POSPAGABLE

El **valor actual** $A(C;d)_{\overline{\infty}|i}$ de una renta variable en progresión aritmética, inmediata, pospagable y perpetua es el límite cuando "n" tiende a infinito del valor actual de una renta temporal de las mismas características.

$$A(C;d)_{\overline{\infty}|i}=\lim_{n\to\infty}A(C;d)_{\overline{n}|i}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(C+\frac{d}{i}\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}.(1+i)^{-n}\right)=$$

$$\boxed{A(C;d)_{\overline{n}|i}=\left(C+\frac{d}{i}\right).a_{\overline{n}|i}-\frac{d.n}{i}.(1+i)^{-n}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+i)^n}=\frac{\infty\text{ potencial}}{\infty\text{ exponencial}}=0}$$

$$=\left(C+\frac{d}{i}\right).\left(\lim_{n\to\infty}a_{\overline{n}|i}\right)-\frac{d}{i}.\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+i)^n}\right)=\left(C+\frac{d}{i}\right).\left(\lim_{n\to\infty}a_{\overline{n}|i}\right)=\left(C+\frac{d}{i}\right).\frac{1}{i}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}a_{\overline{n}|i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-0}{i}=\frac{1}{i}}$$

PREPAGABLE

El **valor actual** $\bar{A}(C;d)_{\overline{\infty|}i}$ de una renta variable en progresión aritmética, inmediata, prepagable y perpetua lo obtenemos empleando la relación entre los valores actuales de rentas pospagables y prepagables; o sea, $\bar{A}(C;d)_{\overline{\infty|}i}$ se obtiene capitalizando $A(C;d)_{\overline{\infty|}i}$ un periodo:

$$\bar{A}(C;d)_{\overline{\infty|}i} = A(C;d)_{\overline{\infty|}i}.(1+i) = \left(C+\frac{d}{i}\right).\frac{1}{i}.(1+i)$$

8.2 RENTAS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA DIFERIDAS

El punto "α" de valoración de la renta se sitúa "h" periodos antes del inicio t_0 de la renta. **El diferimiento sólo afecta al valor actual de la renta, no así al valor final, que es el de la renta inmediata de iguales características. Para calcular el valor actual de una renta diferida "h" periodos, contracapitalizaremos "h" periodos el valor actual de la renta inmediata de iguales características.**

8.2.1 Renta en PA, diferida y temporal

POSPAGABLE

Valor actual $h/A(C;d)_{\overline{n|}i}$:

$$h/A(C;d)_{\overline{n|}i} = A(C;d)_{\overline{n|}i}.(1+i)^{-h} = \left(\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}\right).(1+i)^{-h}$$

Como queda dicho, el **valor final** $h/S(C;d)_{\overline{n|}i}$ coincide con $S(C;d)_{\overline{n|}i}$:

$$h/S(C;d)_{\overline{n|}i} = S(C;d)_{\overline{n|}i} = \left(C+\frac{d}{i}\right).s_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}$$

PREPAGABLE

Valor actual $h/\bar{A}(C;d)_{\overline{n|}i}$:

$$h/\bar{A}(C;d)_{\overline{n|}i} = \bar{A}(C;d)_{\overline{n|}i}.(1+i)^{-h} = A(C;d)_{\overline{n|}i}.(1+i).(1+i)^{-h} = \left(\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}\right).(1+i)^{-(h-1)}$$

Como queda dicho, el **valor final** $h/\bar{S}(C;d)_{\overline{n|}i}$ coincide con $\bar{S}(C;d)_{\overline{n|}i}$:

$$h/\bar{S}(C;d)_{\overline{n|}i} = \bar{S}(C;d)_{\overline{n|}i} = S(C;d)_{\overline{n|}i}.(1+i) = \left(\left(C+\frac{d}{i}\right).s_{\overline{n|}i} - \frac{d.n}{i}\right).(1+i)$$

8.2.2 Renta en PA, diferida y perpetua

POSPAGABLE

Valor actual $h/A(C;d)_{\overline{\infty|}i}$:

$$h/A(C;d)_{\overline{\infty|}i} = A(C;d)_{\overline{\infty|}i}.(1+i)^{-h} = \left(\left(C+\frac{d}{i}\right).\frac{1}{i}\right).(1+i)^{-h}$$

PREPAGABLE

Valor actual $h/\bar{A}(C;d)_{\overline{\infty|}i}$:

$$h/\bar{A}(C;d)_{\overline{\infty|}i} = \bar{A}(C;d)_{\overline{\infty|}i}.(1+i)^{-h} = A(C;d)_{\overline{\infty|}i}.(1+i).(1+i)^{-h} = \left(\left(C+\frac{d}{i}\right).\frac{1}{i}\right).(1+i)^{-(h-1)}$$

8.3 RENTAS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA ANTICIPADAS

El punto "α" de valoración de la renta se sitúa "p" periodos después del final t_n de la renta. **La anticipación sólo afecta al valor final de la renta, no así al valor actual, que es el de la renta inmediata de iguales características. Para calcular el valor final de una renta anticipada "p" periodos, capitalizaremos "p" periodos el valor actual de la renta inmediata de iguales características.**

8.3.1 Renta en PA, anticipada y temporal

PREPAGABLE

Valor final $p / S(C;d)_{\overline{n}|i}$:

$$p / S(C;d)_{\overline{n}|i} = S(C;d)_{\overline{n}|i}.(1+i)^p = \left(\left(C+\frac{d}{i}\right).s_{\overline{n}|i} - \frac{d.n}{i}\right).(1+i)^p$$

Como queda dicho, el **valor actual** $p / A(C;d)_{\overline{n}|i}$ coincide con $A(C;d)_{\overline{n}|i}$:

$$p / A(C;d)_{\overline{n}|i} = A(C;d)_{\overline{n}|i} = \left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n}|i} - \frac{d.n}{i}$$

POSPAGABLE

Valor final $p / \overline{S}(C;d)_{\overline{n}|i}$:

$$p / \overline{S}(C;d)_{\overline{n}|i} = \overline{S}(C;d)_{\overline{n}|i}.(1+i)^p = S(C;d)_{\overline{n}|i}.(1+i).(1+i)^p = \left(\left(C+\frac{d}{i}\right).s_{\overline{n}|i} - \frac{d.n}{i}\right).(1+i)^{p+1}$$

Como queda dicho, el **valor actual** $p / \overline{A}(C;d)_{\overline{n}|i}$ coincide con $\overline{A}(C;d)_{\overline{n}|i}$:

$$p / \overline{A}(C;d)_{\overline{n}|i} = \overline{A}(C;d)_{\overline{n}|i} = A(C;d)_{\overline{n}|i}.(1+i) = \left(\left(C+\frac{d}{i}+d.n\right).a_{\overline{n}|i} - \frac{d.n}{i}\right).(1+i)$$

8.3.2 Renta en PA, anticipada y perpetua

PREPAGABLE

Como queda dicho, el **valor actual** $p / A(C;d)_{\overline{\infty}|i}$ coincide con $A(C;d)_{\overline{\infty}|i} = \left(C+\frac{d}{i}\right).\frac{1}{i}$.

POSPAGABLE

Como queda dicho, el **valor actual** $p / \overline{A}(C;d)_{\overline{\infty}|i}$ coincide con $\overline{A}(C;d)_{\overline{\infty}|i} = \left(C+\frac{d}{i}\right).\frac{1}{i}.(1+i)$.

8.4 RENTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Se caracterizan porque la cuantía de sus términos forma una progresión geométrica; así, siendo $q>0$ la razón de la progresión, las cuantías citadas son:

$$C_1 = C \;;\; C_2 = C.q \;;\; C_3 = C.q^2 \;;\; \dots \;;\; C_n = C.q^{n-1}$$

La razón "q" puede darse directamente ($q = 1'07$), pero normalmente se dará en términos porcentuales. Por ejemplo:

$$\Delta 5\% \text{ acumulativo} \Leftrightarrow q = 1'05$$
$$\nabla 5\% \text{ acumulativo} \Leftrightarrow q = 0'95$$

Si $q>0$ estamos ante una renta en progresión geométrica creciente. Si $q<0$ estamos ante una renta en progresión geométrica decreciente.

8.4.1 Renta en PG, inmediata y temporal

POSPAGABLE

El **valor actual** $V_0 \equiv A(C;q)_{\overline{n}|i}$ de una renta variable en progresión geométrica, inmediata, pospagable y temporal de primer término "C" y razón "q" lo obtenemos aplicando el principio general de equivalencia de capitales en t_0; o sea, contracapitalizamos todos los términos de la renta en el punto t_0:

	C	$C.q$	$C.q^2$	...	$C.q^{n-2}$	$C.q^{n-1}$
t_0	t_1	t_2	t_3	...	t_{n-1}	t_n
V_0						V_n

$$V_0 \equiv A(C;q)_{\overline{n|}i} = C.(1+i)^{-1} + C.q.(1+i)^{-2} + C.q^2.(1+i)^{-3} + \dots + C.q^{n-1}.(1+i)^{-n} =$$

$$= C.(1+i)^{-1}.\left(1 + q.(1+i)^{-1} + q^2.(1+i)^{-2} + \dots + q^{n-1}.(1+i)^{-(n-1)}\right) =$$

$$= C.(1+i)^{-1}.\left(\frac{1 - q^{n-1}.(1+i)^{-(n-1)}.q.(1+i)^{-1}}{1 - q.(1+i)^{-1}}\right) = C.(1+i)^{-1}.\left(\frac{1 - q^n.(1+i)^{-n}}{1 - q.(1+i)^{-1}}\right) =$$

$$= C.(1+i)^{-1}.\frac{1 - q^n.(1+i)^{-n}}{1 - \frac{q}{1+i}} = C.\frac{1 - q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

La expresión anterior carece de sentido si $q = 1+i$; en tal caso, es:

$$V_0 \equiv A(C;q)_{\overline{n|}i} = C.(1+i)^{-1}.\left(1 + q.(1+i)^{-1} + q^2.(1+i)^{-2} + \dots + q^{n-1}.(1+i)^{-(n-1)}\right) =$$

$$\boxed{q = 1+i}$$

$$= C.(1+i)^{-1}.\underbrace{\left(1 + (1+i).(1+i)^{-1} + (1+i)^2.(1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{n-1}.(1+i)^{-(n-1)}\right)}_{n} = C.n.(1+i)^{-1}$$

El **valor final** $V_n \equiv S(C;q)_{\overline{n|}i}$ lo obtenemos capitalizando "n" periodos el valor actual $V_0 \equiv A(C;q)_{\overline{n|}i}$; por tanto, si $q \neq 1+i$, es:

$$V_n \equiv S(C;q)_{\overline{n|}i} = A(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i)^n = C.\frac{1 - q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}.(1+i)^n = C.\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$$

Si $q = 1+i$, es:

$$V_n \equiv S(C;q)_{\overline{n|}i} = A(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i)^n = C.n.(1+i)^{-1}.(1+i)^n = C.n.(1+i)^{n-1}$$

PREPAGABLE

Si la renta es prepagable, su **valor actual** $\overline{A}(C;q)_{\overline{n|}i}$ lo obtenemos mediante la relación entre los valores actuales de rentas pospagables y prepagables; o sea, $\overline{A}(C;q)_{\overline{n|}i}$ se obtiene capitalizando $A(C;q)_{\overline{n|}i}$ un periodo. Así, si $q \neq 1+i$, es:

$$\overline{A}(C;q)_{\overline{n|}i} = A(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i) = C.\frac{1 - q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}.(1+i)$$

$$\boxed{q \neq 1+i \Rightarrow A(C;q)_{\overline{n|}i} = C.\frac{1 - q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}}$$

Si $q = 1+i$, es:

$$\overline{A}(C;q)_{\overline{n|}i} = A(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i) = C.n.(1+i)^{-1}.(1+i) = C.n$$

$$\boxed{q = 1+i \Rightarrow A(C;q)_{\overline{n|}i} = C.n.(1+i)^{-1}}$$

El **valor final** $\overline{S}(C;q)_{\overline{n|}i}$ de una renta variable en progresión geométrica inmediata, prepagable y temporal de primer término "C" y razón "q" lo obtenemos empleando la relación entre los valores finales de rentas pospagables y prepagables; o sea, $\overline{S}(C;q)_{\overline{n|}i}$ se obtiene capitalizando $S(C;q)_{\overline{n|}i}$ un periodo. Así, si $q \neq 1+i$, es:

$$\overline{S}(C;q)_{\overline{n|}i} = S(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i) = C.\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}.(1+i)$$

$$\boxed{S(C;q)_{\overline{n|}i} = C.\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}}$$

Si $q = 1+i$, es:

$$\overline{S}(C;q)_{\overline{n|}i} = S(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i) = C.n.(1+i)^{n-1}.(1+i) = C.n.(1+i)^n$$

$$\boxed{\text{si } q = 1+i \Rightarrow S(C;q)_{\overline{n|}i} = C.n.(1+i)^{n-1}}$$

8.4.2 Renta en PG, inmediata y perpetua

PREPAGABLE

El **valor actual** $A(C;q)_{\overline{\infty|}i}$ de una renta variable en progresión geométrica, inmediata, pospagable y perpetua es el límite cuando "n" tiende a infinito del valor actual de una renta temporal de las mismas características.

$$A(C;q)_{\overline{\infty|}i} = \lim_{n\to\infty} A(C;q)_{\overline{n|}i} = \frac{C}{1+i-q}.\lim_{n\to\infty}\left(1-q^n.(1+i)^{-n}\right) = \frac{C}{1+i-q}.\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n\right)$$

$$\boxed{q\neq 1+i \Rightarrow A(C;q)_{\overline{n|}i} = C.\frac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}}$$

Si $q<1+i$ es $q/(1+i)<1$, y así:

$$A(C;q)_{\overline{\infty|}i} = \frac{C}{1+i-q}.\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n\right) = \frac{C}{1+i-q}.(1-0) = \frac{C}{1+i-q}$$

Si $q>1+i$ es $q/(1+i)>1$, y así no tiene sentido hablar del valor actual $A(C;q)_{\overline{\infty|}i}$ de una renta variable en progresión geométrica, inmediata, pospagable y perpetua, pues:

$$A(C;q)_{\overline{\infty|}i} = \frac{C}{1+i-q}.\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n\right) = \frac{C}{1+i-q}.(1-(+\infty)) = +\infty$$

Si $q=1+i$ tampoco tiene sentido hablar del valor actual $A(C;q)_{\overline{\infty|}i}$ de una renta variable en progresión geométrica, inmediata, pospagable y perpetua, pues:

$$A(C;q)_{\overline{\infty|}i} = \lim_{n\to\infty} A(C;q)_{\overline{n|}i} = C.(1+i)^{-1}.\lim_{n\to\infty}(n) = +\infty$$

$$\boxed{q=1+i \Rightarrow A(C;q)_{\overline{n|}i} = C.n.(1+i)^{-1}}$$

POSPAGABLE

Si la renta es prepagable, su **valor actual** $\overline{A}(C;q)_{\overline{\infty|}i}$ lo obtenemos empleando la relación entre los valores actuales de rentas pospagables y prepagables; o sea, $\overline{A}(C;q)_{\overline{\infty|}i}$ se obtiene capitalizando $A(C;q)_{\overline{\infty|}i}$ un periodo, lo que sólo tiene sentido si $q<1+i$:

$$\overline{A}(C;q)_{\overline{\infty|}i} = A(C;q)_{\overline{\infty|}i}.(1+i) = \frac{C}{1+i-q}.(1+i)$$

$$\boxed{q<1+i \Rightarrow A(C;q)_{\overline{\infty|}i} = \frac{C}{1+i-q}}$$

8.5 RENTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DIFERIDAS

El punto "α" de valoración de la renta se sitúa "h" periodos antes del inicio t_0 de la renta. **El diferimiento sólo afecta al valor actual de la renta, no así al valor final, que es el de la renta inmediata de iguales características. Para calcular el valor actual de una renta diferida "h" periodos contracapitalizaremos "h" periodos el valor actual de la renta inmediata de iguales características.**

8.5.1 Renta en PG, diferida y temporal

POSPAGABLE

Valor actual $h/A(C;q)_{\overline{n|}i}$:

$$h/A(C;q)_{\overline{n|}i} = A(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i)^{-h} = \begin{cases} C.\dfrac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}.(1+i)^{-h}, & \text{si } q\neq 1+i \\ C.n.(1+i)^{-(h+1)}, & \text{si } q=1+i \end{cases}$$

$$\boxed{A(C;q)_{\overline{n|}i} = \begin{cases} C.\dfrac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}, & \text{si } q\neq 1+i \\ C.n.(1+i)^{-1}, & \text{si } q=1+i \end{cases}}$$

Como queda dicho, el **valor final** $h\,/\,S(C;q)_{\overline{n|}i}$ coincide con $S(C;q)_{\overline{n|}i}$:

$$h\,/\,S(C;q)_{\overline{n|}i}=S(C;q)_{\overline{n|}i}=\begin{cases}C.\left(\dfrac{(1+i)^n-q^n}{1+i-q}\right), & \text{si } q\neq 1+i\\ C.n.(1+i)^{n-1}, & \text{si } q=1+i\end{cases}$$

<u>PREPAGABLE</u>

Valor actual $h\,/\,\overline{A}(C;q)_{\overline{n|}i}$:

$$h\,/\,\overline{A}(C;q)_{\overline{n|}i}=\overline{A}(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i)^{-h}=A(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i)^{-(h-1)}=\begin{cases}C.\dfrac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}.(1+i)^{-(h-1)}, & \text{si } q\neq 1+i\\ C.n.(1+i)^{-h}, & \text{si } q=1+i\end{cases}$$

Como queda dicho, el **valor final** $h\,/\,\overline{S}(C;q)_{\overline{n|}i}$ coincide con $\overline{S}(C;q)_{\overline{n|}i}$:

$$h\,/\,\overline{S}(C;q)_{\overline{n|}i}=\overline{S}(C;q)_{\overline{n|}i}=S(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i)=\begin{cases}C.\dfrac{(1+i)^n-q^n}{1+i-q}.(1+i), & \text{si } q\neq 1+i\\ C.n.(1+i)^{n}, & \text{si } q=1+i\end{cases}$$

8.5.2 Renta en PG, diferida y perpetua

<u>POSPAGABLE</u>

Sólo tiene sentido hablar del **valor actual** $h\,/\,A(C;q)_{\overline{\infty|}i}$ si $q<1+i$; en tal caso:

$$h\,/\,A(C;q)_{\overline{\infty|}i}=A(C;q)_{\overline{\infty|}i}.(1+i)^{-h}=\frac{C}{1+i-q}.(1+i)^{-h}$$

<u>PREPAGABLE</u>

Sólo tiene sentido hablar del **valor actual** $h\,/\,\overline{A}(C;q)_{\overline{\infty|}i}$ si $q<1+i$; en tal caso:

$$h\,/\,\overline{A}(C;q)_{\overline{\infty|}i}=\overline{A}(C;q)_{\overline{\infty|}i}.(1+i)^{-h}=A(C;d)_{\overline{\infty|}i}.(1+i)^{-(h-1)}=\frac{C}{1+i-q}.(1+i)^{-(h-1)}$$

8.6 RENTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA ANTICIPADAS

El punto "α" de valoración de la renta se sitúa "p" periodos después del final t_n de la renta. **La anticipación sólo afecta al valor final de la renta, no así al valor actual, que es el de la renta inmediata de iguales características. Para calcular el valor final de una renta anticipada "p" periodos capitalizaremos "p" periodos el valor actual de la renta inmediata de iguales características.**

8.6.1 Renta en PG, anticipada y temporal

<u>POSPAGABLE</u>

Valor final $p\,/\,S(C;q)_{\overline{n|}i}$:

$$p\,/\,S(C;q)_{\overline{n|}i}=S(C;q)_{\overline{n|}i}.(1+i)^p=\begin{cases}C.\left(\dfrac{(1+i)^n-q^n}{1+i-q}\right).(1+i)^p, & \text{si } q\neq 1+i\\ C.n.(1+i)^{p+n-1}, & \text{si } q=1+i\end{cases}$$

$$\boxed{S(C;q)_{\overline{n|}i}=\begin{cases}C.\left(\dfrac{(1+i)^n-q^n}{1+i-q}\right), & \text{si } q\neq 1+i\\ C.n.(1+i)^{n-1}, & \text{si } q=1+i\end{cases}}$$

Como queda dicho, el **valor actual** $p\,/\,A(C;q)_{\overline{n|}i}$ coincide con $A(C;q)_{\overline{n|}i}$:

$$p\,/\,A(C;q)_{\overline{n|}i}=A(C;q)_{\overline{n|}i}=\begin{cases}C.\left(\dfrac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}\right), & \text{si } q\neq 1+i\\ C.n.(1+i)^{-1}, & \text{si } q=1+i\end{cases}$$

PREPAGABLE

El **valor final** es:

$$p/\overline{S}(C;q)_{\overline{n}|i} = \overline{S}(C;q)_{\overline{n}|i}.(1+i)^p = S(C;q)_{\overline{n}|i}.(1+i)^{p+1} = \begin{cases} C.\left(\dfrac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}\right).(1+i)^{p+1}, \text{ si } q \neq 1+i \\ C.n.(1+i)^{p+n}, \text{ si } q = 1+i \end{cases}$$

Como queda dicho, el **valor actual** $p/\overline{A}(C;q)_{\overline{n}|i}$ coincide con $\overline{A}(C;q)_{\overline{n}|i}$:

$$p/\overline{A}(C;q)_{\overline{n}|i} = \overline{A}(C;q)_{\overline{n}|i} = A(C;q)_{\overline{n}|i}.(1+i) = \begin{cases} C.\left(\dfrac{1-q^n.(1+i)^{-n}}{1+i-q}\right).(1+i), \text{ si } q \neq 1+i \\ C.n, \text{ si } q = 1+i \end{cases}$$

8.6.2 Renta en PG, anticipada y perpetua

POSPAGABLE

Sólo tiene sentido hablar del **valor actual** $p/A(C;q)_{\overline{\infty}|i}$ si $q < 1+i$; en tal caso:

$$p/A(C;q)_{\overline{\infty}|i} = A(C;q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{1+i-q}$$

PREPAGABLE

Sólo tiene sentido hablar del **valor actual** $p/\overline{A}(C;q)_{\overline{\infty}|i}$ si $q < 1+i$; en tal caso:

$$p/\overline{A}(C;q)_{\overline{\infty}|i} = \overline{A}(C;q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{1+i-q}.(1+i)$$

8.7 RENTAS VARIABLES EN GENERAL

8.7.1 Renta variable sin seguir una ley conocida

Es una renta en que las cuantías de sus términos varían sin seguir ninguna ley.

	C_1	C_2	C_3	...	C_{n-1}	C_n
t_0	t_1	t_2	t_3	...	t_{n-1}	t_n

El **valor actual** es $V_0 = C_1.(1+i)^{-1} + C_2.(1+i)^{-2} + ... + C_n.(1+i)^{-n}$.

El **valor final** es $V_n = C_n + C_{n-1}.(1+i) + C_{n-2}.(1+i)^2 + ... + C_1.(1+i)^{n-1}$.

8.7.2 Renta variable en tanto de valoración

Es una renta en que, con independencia de que sus términos sean constantes o variables, pospagables o prepagables, el tanto de valoración de los mismos varía de unos periodos a otros.

Para valorar estas rentas las descomponemos en tantos tramos (rentas) como tipos de interés distintos haya. Por ejemplo, consideremos una renta constante de término "C", inmediata, pospagable y temporal de "n" periodos y tal que los n_1 primeros periodos se valoran al tanto i_1, los siguientes n_2 periodos se valoran al tanto i_2 y los siguientes n_3 periodos se valoran al tanto i_3.

	C	C	...	C	C	C	...	C	...	C
0	1	2	...	$n_1 - 1$	n_1	$n_1 + 1$	...	$n_1 + n_2$	...	$n_1 + n_2 + n_3$

El **valor actual** es:

$$V_0 = C.a_{\overline{n_1}|i_1} + C.a_{\overline{n_2}|i_2}.(1+i_1)^{-n_1} + C.a_{\overline{n_3}|i_3}.(1+i_2)^{-n_2}.(1+i_1)^{-n_1} =$$
$$= C.\left(a_{\overline{n_1}|i_1} + a_{\overline{n_2}|i_2}.(1+i_1)^{-n_1} + C.a_{\overline{n_3}|i_3}.(1+i_2)^{-n_2}.(1+i_1)^{-n_1}\right)$$

El **valor final** es:

$$V_n = C.s_{\overline{n_1}|i_1}.(1+i_2)^{n_2}.(1+i_3)^{n_3} + C.s_{\overline{n_2}|i_2}.(1+i_3)^{n_3} + C.a_{\overline{n_3}|i_3} =$$
$$= C.\left(s_{\overline{n_1}|i_1}.(1+i_2)^{n_2}.(1+i_3)^{n_3} + C.s_{\overline{n_2}|i_2}.(1+i_3)^{n_3} + C.a_{\overline{n_3}|i_3}\right)$$