MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Tema 7

RENTAS CONSTANTES

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

7.1 CONCEPTO DE RENTA

Consideremos una distribución o conjunto de capitales definido en un intervalo "I" que se ha particionado en "n" subintervalos I_r de modo que $I = \bigcup_{r=1}^{n} I_r$, no siendo vacío ningún subintervalo $(I_r \neq \varnothing, \forall r)$, y siendo vacía la intersección de dos subintervalos consecutivos $(I_r \cap I_{r+1} = \varnothing)$.

A cada subintervalo le asociamos un capital único, como engendrado o producido en él, y recíprocamente, conocido un capital, queda automáticamente conocido el intervalo en que dicho capital vence.

Así las cosas, llamamos renta a una distribución o conjunto de capitales asociado a una partición, de modo que a cada subintervalo le corresponde un único capital como engendrado o producido en él, y recíprocamente.

	C_1	C_2	...	C_3	....		C_n
t_0	t_1	t_2		t_3	....	t_{n-1}	t_n

Los capitales $(C_r ; t_r)$ son los términos de la renta, y $(t_r ; t_{r+1})$ el periodo.

El toda renta distinguimos dos instantes relevantes:

- **Origen de la renta:** es el instante t_0 de disponibilidad del primer capital.
- **Final de la renta:** es el instante t_n de disponibilidad del último capital.

El objetivo del estudio de la rentas es la obtención de su valor en un momento determinado; para ello valoraremos cada término en dicho momento, bajo el sistema de capitalización compuesta a un determinado tanto de interés.

7.2 VALOR FINANCIERO DE UNA RENTA

Se entiende por valor capital o financiero de una renta en un determinado instante "α", al valor financiero que en ese instante tiene la distribución de capitales que forman la renta. Si este valor se calcula en el instante t_0 (el origen de la renta) se llama **valor actual,** y se denota V_0. Si dicho valor se calcula en el instante t_n (final de la renta), se llama **valor final,** y se denota V_n.

7.3 CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS

Teniendo en cuenta los diferentes elementos en la definición de renta, podemos clasificarlas atendiendo a seis criterios distintos:

- **Atendiendo a la cuantía de los términos**

  ♣ **Rentas constantes:** la cuantía de los todos los términos es constante; o sea: $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = C$.

  ♣ **Rentas variables:** la cuantía no es igual en todos los términos. Pueden ser:

  ♦ **Rentas variables en progresión aritmética:** la cuantía de los términos sigue una progresión aritmética de razón "d", de forma que un término cualquiera es $C_s = C_{s-1} \pm d$.

  ♦ **Rentas variables en progresión geométrica:** la cuantía de los términos sigue una progresión aritmética de razón "q", de forma que un término cualquiera es $C_s = q.C_{s-1}$.

  ♦ **Rentas de variación arbitraria:** la cuantía de los términos no sigue una ley especial de variación.

- **Atendiendo a disponibilidad o vencimiento de los términos**

  ♣ **Pospagables:** el vencimiento de cada término coincide con el extremo superior del periodo correspondiente; es decir, todos los capitales vencen al final de los periodos.

	C_1	C_2	C_3	...	C_{n-1}	C_{n-1}	C_n
t_0	t_1	t_2	t_3	...	t_{n-2}	t_{n-1}	t_n

  ♣ **Prepagables:** el vencimiento de cada término coincide con el extremo inferior del periodo correspondiente; es decir, todos los capitales vencen al principio de los periodos.

C_1	C_2	C_3	C_4	...	C_{n-1}	C_n	
t_0	t_1	t_2	t_3	...	t_{n-2}	t_{n-1}	t_n

- **Atendiendo a la amplitud de los periodos**
  - **Discretas:** si la amplitud de los periodos es finita. Pueden ser:
    - **Discretas de periodo uniforme:** la amplitud de todos los periodos es constante e igual:
      $$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1}$$
    - **Discretas de periodo no uniforme:** la amplitud de cada periodo no es constante ni igual:
      $$t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1 \neq \dots \neq t_n - t_{n-1}$$
  - **Continuas:** si la amplitud de cada periodo tiende a cero.

- **Atendiendo al punto de valoración**
  - **Inmediatas:** si el instante de valoración "α" coincide con el origen o el final de la renta.

V_0	V_n
$t_0 = \alpha$	$t_n = \alpha$

  - **Diferidas:** si el instante de valoración "α" es anterior al origen de la renta. La diferencia entre t_0 y "α", que denotamos "h", son los periodos de diferimiento.

V_0			V_n
α	$\xleftrightarrow{h}$	t_0	t_n

  - **Anticipadas:** si el instante de valoración "α" es posterior al final de la renta. La diferencia entre "α" y t_n, que denotamos "p", son los periodos de anticipo.

V_0			V_n
t_0	t_n	$\xleftrightarrow{p}$	α

- **Atendiendo a la duración de la renta**
  - **Temporales:** si la duración de la renta es finita ($t_n - t_0 = n$)
  - **Perpetuas:** si la duración de la renta es indefinida; es decir, sabemos cuando empieza pero no cuando acaba.

- **Atendiendo a la naturaleza de los capitales**
  - **Ciertas:** si la cuantía y el vencimiento son ciertos.
  - **Aleatorias:** si la cuantía o el vencimiento o ambos son aleatorios; es decir, dependen de alguna variable.

7.4 RENTAS DISCRETAS CONSTANTES

7.4.1 Renta inmediata y temporal

POSPAGABLE

	C	C	C	...	C	C	C
t_0	t_1	t_2	t_3	...	t_{n-2}	t_{n-1}	t_n
V_0							V_n

El **valor actual** V_0 lo obtenemos descontando todos los términos de la renta hasta el instante t_0:

$$V_0 = C.(1+i)^{-1} + C.(1+i)^{-2} + C.(1+i)^{-3} + \dots + C.(1+i)^{-(n-1)} + C.(1+i)^{-n} =$$

$$= C.\left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right) =$$

$$= C.\left(\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}.(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}\right) =$$

$$= C.\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = C.a_{\overline{n|}i}$$

$$\boxed{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \equiv a_{\overline{n|}i} \equiv \text{valor actual de una renta unitaria pospagable de "n" periodos al tanto "i"}}$$

El **valor final** V_n lo obtenemos capitalizando todos los términos de la renta hasta el instante t_n:

$$V_n = C + C.(1+i) + C.(1+i)^2 + \dots + C.(1+i)^{n-1} = C.\left(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}\right) =$$
$$= C.\left(\frac{1-(1+i)^{n-1}.(1+i)}{1-(1+i)}\right) = C.\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) = C.s_{\overline{n|}i}$$

$$\boxed{\frac{(1+i)^n - 1}{i} \equiv s_{\overline{n|}i} \equiv \text{valor final de una renta unitaria pospagable de "n" periodos al tanto "i"}}$$

De cajón: V_n se obtiene capitalizando V_0 durante "n" periodos ($\Rightarrow V_n = V_0.(1+i)^n$), y V_0 se obtiene descontando V_n durante "n" periodos ($\Rightarrow V_0 = V_n.(1+i)^{-n}$):

$$V_0.(1+i)^n = \left(C.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right).(1+i)^n = C.\frac{(1+i)^n - 1}{i} = V_n$$
$$V_n.(1+i)^{-n} = \left(C.\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right).(1+i)^{-n} = C.\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = V_0$$

PREPAGABLE

C	C	C	C	...	C	C	
t_0	t_1	t_2	t_3	...	t_{n-2}	t_{n-1}	t_n
$\overline{V}_0$							$\overline{V}_n$

El **valor actual** $\overline{V}_0$ lo obtenemos descontando todos los términos de la renta hasta el instante t_0:

$$\overline{V}_0 = C + C.(1+i)^{-1} + C.(1+i)^{-2} + \dots + C.(1+i)^{-(n-1)} =$$
$$= C.\left(1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-1)}\right) =$$
$$= C.\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}.(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}\right) = C.\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right).(1+i) = C.a_{\overline{n|}i}.(1+i) = C.\overline{a}_{\overline{n|}i}$$

$$\boxed{a_{\overline{n|}i}.(1+i) = \overline{a}_{\overline{n|}i} \equiv \text{valor actual de una renta unitaria prepagable de "n" periodos al tanto "i"}}$$

Observa: como $V_0 = C.a_{\overline{n|}i} \Rightarrow \overline{V}_0 = V_0.(1+i) > V_0$.

AVISO NOTACIONAL

Con las rentas prepagables, lo habitual en la notación de la Matemática Financiera es escribir $\ddot{a}_{\overline{n|}i}$ en lugar de $\overline{a}_{\overline{n|}i}$ ..... pero como los dos puntitos encima de la "a" se ven con dificultad, en todo lo que sigue los sustituimos por un sombrero, y lo mismo vale para cualquier otro símbolo que denotemos con sombrero.

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} \equiv \overline{a}_{\overline{n|}i} \quad ; \quad \ddot{\text{Pío}}_{\overline{n|}i} \equiv \overline{\text{Pío}}_{\overline{n|}i}$$

El **valor final** $\overline{V}_n$ lo obtenemos capitalizando todos los términos de la renta hasta el instante t_n:

$$\overline{V}_n = C.(1+i) + C.(1+i)^2 + \dots + C.(1+i)^n =$$
$$= C.(1+i).\left(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}\right) =$$
$$= C.(1+i).\frac{1-(1+i)^{n-1}.(1+i)}{1-(1+i)} =$$
$$= C.(1+i).\frac{(1+i)^n - 1}{i} = C.(1+i).s_{\overline{n|}i} = C.\overline{s}_{\overline{n|}i}$$

$$\boxed{s_{\overline{n|}i}.(1+i) = \overline{s}_{\overline{n|}i} \equiv \text{valor final de una renta unitaria prepagable de "n" periodos al tanto "i"}}$$

De cajón: $\overline{V}_n$ se obtiene capitalizando $\overline{V}_0$ durante "n" periodos ($\Rightarrow \overline{V}_n = \overline{V}_0.(1+i)^n$), y $\overline{V}_0$ se obtiene descontando $\overline{V}_n$ durante "n" periodos ($\Rightarrow \overline{V}_0 = \overline{V}_n.(1+i)^{-n}$):

$$\overline{V}_0.(1+i)^n = \left(C.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.(1+i)\right).(1+i)^n = C.\frac{(1+i)^n-1}{i}.(1+i) = \overline{V}_n$$

$$\overline{V}_n.(1+i)^{-n} = \left(C.(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{i}\right).(1+i)^{-n} = C.(1+i).\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = \overline{V}_0$$

Observa: como $V_n = C.s_{\overline{n}|i} \Rightarrow \overline{V}_n = V_n.(1+i) > V_n$.

Toma buena nota:

$$\overline{V}_0 = V_0.(1+i) \ ; \ \overline{V}_n = V_n.(1+i)$$

7.4.2 Renta inmediata y perpetua

Denominamos rentas perpetuas a las de duración indefinida; o sea, consideramos que el número "n" de términos tiende a infinito, es decir, sabemos cuando comienza a generarse la renta, pero no cuando finaliza. Por ello **sólo tiene sentido hablar del valor actual y nunca del valor final.** Pueden ser prepagables o postpagables.

El **valor actual** es el límite cuando "n" tiende a infinito del valor actual de una renta temporal de las mismas características.

POSPAGABLE

Valor actual V_0: $$V_0 = C.a_{\overline{\infty}|i} = C.\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = C.\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{C}{i}$$

PREPAGABLE

Valor actual $\overline{V}_0$: $$\overline{V}_0 = C.(1+i).a_{\overline{\infty}|i} = C.(1+i).\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C.\frac{1+i}{i}$$

7.4.3 Renta diferida y temporal

El instante "α" de valoración de la renta se sitúa "h" periodos antes del inicio t_0 de la renta. El diferimiento sólo afecta al valor actual de la renta, no así al valor final, que es el de la renta inmediata de iguales características.

POSPAGABLE

El **valor actual** h/V_0 lo obtenemos descontando "h" periodos el valor actual $V_0 = C.a_{\overline{n}|i}$ de la renta inmediata de iguales características; o sea:

$$h/V_0 = V_0.(1+i)^{-h} = C.a_{\overline{n}|i}.(1+i)^{-h} = C.h/a_{\overline{n}|i}$$

$$\boxed{\text{por comodidad, el pedrusco } a_{\overline{n}|i}.(1+i)^{-h} \text{ lo denotamos } h/a_{\overline{n}|i}}$$

De otro modo: descontamos todos los términos de la renta hasta el instante "α":

$$h/V_0 = C.(1+i)^{-(h+1)} + C.(1+i)^{-(h+2)} + C.(1+i)^{-(h+3)} + \ldots + C.(1+i)^{-(h+n)} =$$
$$= C.(1+i)^{-h}.\left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n}\right) =$$
$$= C.(1+i)^{-h}.\left(\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}.(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}\right) =$$
$$= C.(1+i)^{-h}.\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) =$$
$$= C.(1+i)^{-h}.a_{\overline{n}|i} = C.h/a_{\overline{n}|i} = V_0.(1+i)^{-h}$$

PREPAGABLE

$\longleftarrow$ "h" periodos $\longrightarrow$						
	C	C	C	...	C	
α	t_0	t_1	t_2	...	t_{n-1}	t_n
$h/\bar{V}_0$	$\bar{V}_0 = C.\ddot{a}_{\overline{n}\vert i}$					$\bar{V}_n = h/\bar{V}_n$

El valor actual $h/\bar{V}_0$ lo obtenemos descontando "h" periodos el valor actual $\bar{V}_0 = C.\ddot{a}_{\overline{n}\vert i}$ de la renta inmediata de iguales características; o sea:

$$h/\bar{V}_0 = \bar{V}_0.(1+i)^{-h} = V_0.(1+i).(1+i)^{-h} = C.a_{\overline{n}\vert i}.(1+i)^{-(h-1)} = V_0.(1+i)^{-(h-1)}$$

El mismo resultado se obtiene descontando todos los términos de la renta hasta el instante "α".

7.4.4 Renta diferida y perpetua

POSPAGABLE

El **valor actual** h/V_0 lo obtenemos descontando "h" periodos el valor actual $V_0 = C/i$ de la renta inmediata de iguales características; o sea: $h/V_0 = \frac{C}{i}.(1+i)^{-h}$.

PREPAGABLE

El **valor actual** $h/\bar{V}_0$ lo obtenemos descontando "h" periodos el valor actual $\bar{V}_0 = C.(1+i)/i$ de la renta inmediata de iguales características; o sea: $h/\bar{V}_0 = \frac{C.(1+i)}{i}.(1+i)^{-h} = \frac{C}{i}.(1+i)^{-(h-1)}$.

7.4.5 Renta anticipada y temporal

El instante "α" de valoración de la renta se sitúa "p" periodos después del final t_n de la renta. La anticipación sólo afecta al valor final de la renta, no así al valor actual, que es el de la renta inmediata de iguales características.

POSPAGABLE

					$\longleftarrow$ "p" periodos $\longrightarrow$	
	C	C	...	C	C	
t_0	t_1	t_2	...	t_{n-1}	t_n	α
V_0					$V_n = C.s_{\overline{n}\vert i}$	p/V_n

El **valor final** p/V_n lo obtenemos capitalizando "p" periodos el valor final $V_n = C.s_{\overline{n}\vert i}$ de la renta inmediata de iguales características; o sea:

$$p/V_n = V_n.(1+i)^p = C.s_{\overline{n}\vert i}.(1+i)^p = C.p/s_{\overline{n}\vert i}$$

por comodidad, el pedrusco $s_{\overline{n}\vert i}.(1+i)^p$ lo denotamos $p/s_{\overline{n}\vert i}$

De otro modo: capitalizamos todos los términos de la renta hasta el instante "α":

$$p/V_n = C.(1+i)^p + C.(1+i)^{p+1} + C.(1+i)^{p+2} + \ldots + C.(1+i)^{(p+n-1)} =$$
$$= C.(1+i)^p.\left(1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-1}\right) = C.(1+i)^p.\left(\frac{1-(1+i)^{n-1}.(1+i)}{1-(1+i)}\right) =$$
$$= C.(1+i)^p.\left(\frac{(1+i)^n-1}{i}\right) = C.(1+i)^p.s_{\overline{n}\vert i} = C.p/s_{\overline{n}\vert i} = V_n.(1+i)^p$$

PREPAGABLE

					$\longleftarrow$ "p" periodos $\longrightarrow$	
C	C	C	...	C		
t_0	t_1	t_2	...	t_{n-1}	t_n	α
$\bar{V}_0$					$\bar{V}_n = C.\ddot{s}_{\overline{n}\vert i}$	$p/\bar{V}_n$

El valor final $p/\bar{V}_n$ lo obtenemos capitalizando "p" periodos el valor final $\bar{V}_n = C.\ddot{s}_{\overline{n}\vert i}$ de la renta inmediata de iguales características; o sea: $p/\bar{V}_n = \bar{V}_n.(1+i)^p = V_n.(1+i)^{p+1}$. El mismo resultado se obtiene capitalizando todos los términos de la renta hasta en instante "α".