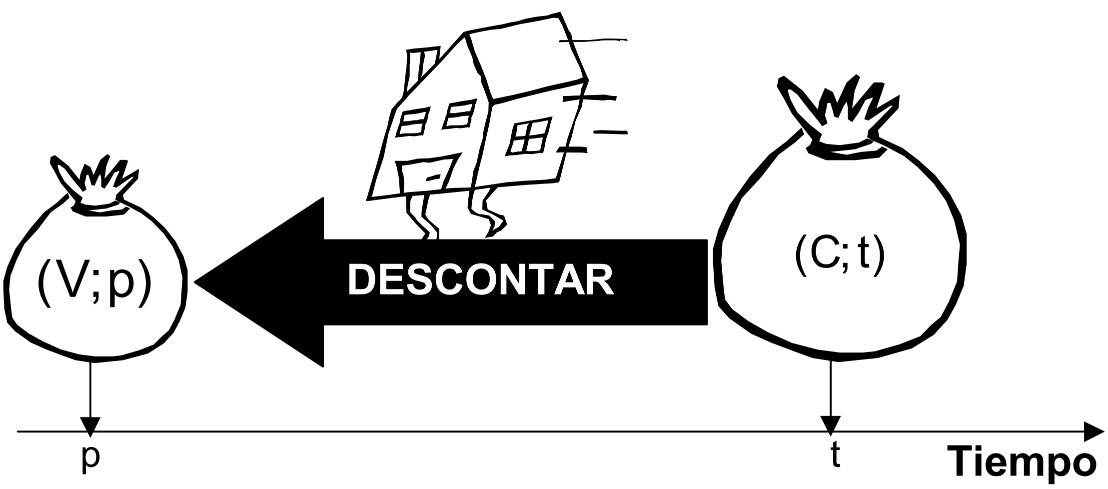
MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

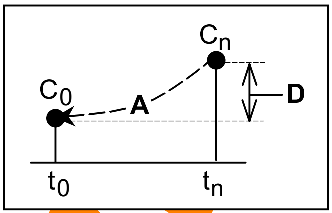
Tema 4

LEYES DE DESCUENTO



4.1 INTRODUCCIÓN

Las operaciones financieras de **descuento o actualización** son aquéllas en que **se cambia un capital futuro** $(C_n;t_n)$ **por uno presente** $(C_0;t_0)$.



Por ejemplo, un cliente te paga con una letra de cambio de 1000 € que vence dentro de 90 días, y como necesitas dinero ya mismo para comprarte un oso de peluche, entregas la letra a un banco, que a cambio te entrega en el acto algo menos de 1000 €. Al vencimiento de la letra, el banco cobra los 1000 € a tu cliente.

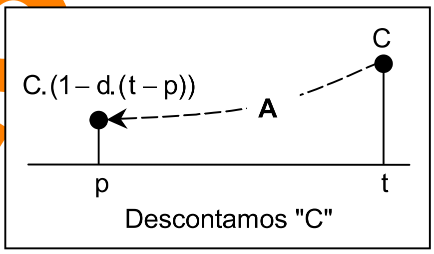
De la cuantía C_n que vence en el instante t_n se dice que es el **nominal o cuantía final**, y de la cuantía C_0 que vence en el instante t_0 se le llama **valor actual, valor efectivo o valor descontado.**

De la diferencia "D" entre el valor nominal C_n y el valor efectivo o descontado se dice que es el **descuento:**

$$D = C_n - C_0$$

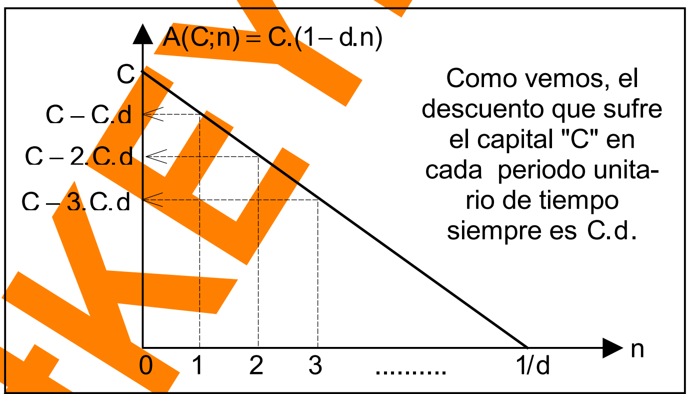
4.2 DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

La ley financiera de descuento simple comercial prescribe que el descuento realizado en un intervalo cualquiera de tiempo es proporcional a la amplitud del intervalo y al capital nominal, siendo el factor "d" de proporcionalidad el que expresa el descuento realizado a una unidad monetaria en una unidad de tiempo. Por tanto, la proyección financiera o montante $A(C;t;p)$ del capital $(C;t)$ en el punto de valoración "p" $(p<t)$ es



$$A(C;t;p) = C - C.d.(t-p) = C.(1-d.(t-p))$$

Denotando "n" a la amplitud "$t-p$" del intervalo $(p;t)$, podemos escribir $A(C;n) = C - C.d.n = C.(1-d.n)$, que es la cuantía del capital financiero equivalente o sustituto del capital $(C;t)$ en el instante de valoración situado "n" unidades de tiempo a la **izquierda** de "t".



Como ha de ser $0 < A(C;n) < C$, se tiene que:

$$0 < C.(1-d.n) < C \Rightarrow 0 < 1 - d.n < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < n < 1/d \\ 0 < d < 1/n \end{cases}$$

Si $C=1$, es $A(1;t;p) \equiv A(t;p) = 1 - d.(t-p)$ ... y como el valor de $A(t;p)$ sólo depende de la amplitud "$t-p$" del intervalo $(p;t)$, si denotamos "n" dicha amplitud (o sea, $n \equiv t-p > 0$), podemos escribir $L(n) = 1 - d.n$, que es la cuantía del capital financiero equivalente o sustituto del capital $(1;t)$ en el instante de valoración situado "n" unidades de tiempo a la izquierda de "t".

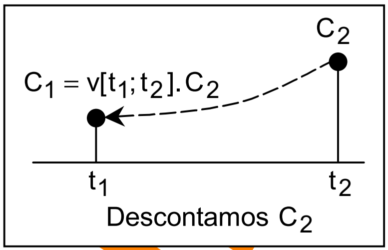
Este sistema de descuento es el que emplean los bancos para operaciones a corto plazo.

4.2.1 MAGNITUDES DERIVADAS

Los componentes "C" y "t" del capital financiero $(C;t)$ se llaman magnitudes primarias o fundamentales, y cualquier otra magnitud obtenida como resultado de operaciones con las fundamentales se llama **magnitud derivada** (normalmente se obtendrán mediante relaciones de proporcionalidad entre capitales).

Factor de descuento

El factor de descuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $v(t_1;t_2)$, y permite conocer el capital C_1 disponible en el instante t_1 si se conoce el capital C_2 disponible en el instante t_2.



$$0 < v[t_1;t_2] = \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2.(1-d.(t_2-t_1))}{C_2} = 1-d.(t_2-t_1) < 1$$

$$\boxed{C_1 = C_2.(1-d.(t_2-t_1))}$$

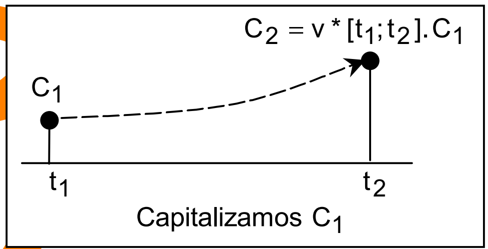
Por tanto, es $C_1 = v(t_1;t_2).C_2$.

Observa que $v(t_1;t_2)$ es la cuantía obtenida al **adelantar** la disponibilidad o vencimiento de **una unidad monetaria** desde t_2 a t_1.

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta $v(n) = 1 - d.n < 1$; y si $n = 1$ es $v(1) = 1 - d$.

Factor de contradescuento

El factor de contradescuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $v^*(t_1;t_2)$, y permite conocer el capital C_2 disponible en el instante t_2 si se conoce el capital C_1 disponible en el instante t_1. Naturalmente, $v^*(t_1;t_2)$ es el inverso de $v(t_1;t_2)$



$$v^*(t_1;t_2) = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{v(t_1;t_2)} = \frac{1}{1-d.(t_2-t_1)} > 1$$

$$\boxed{v(t_1;t_2) = 1-d.(t_2-t_1)}$$

Por tanto, es $C_2 = v^*(t_1;t_2).C_1$. Observa que $v^*(t_1;t_2)$ es la cuantía obtenida al **retrasar** la disponibilidad o vencimiento de **una unidad monetaria** desde t_1 a t_2.

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta $v^*(n) = 1/(1-d.n) > 1$; y si $n = 1$ es $v^*(1) = 1/(1-d)$.

Rédito de descuento

El rédito de descuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $d(t_1;t_2)$, y es el complemento a 1 del factor de descuento:

$$d(t_1;t_2) = 1 - v(t_1;t_2) = d.(t_2-t_1)$$

$$\boxed{v(t_1;t_2) = 1-d.(t_2-t_1)}$$

De otro modo: $d(t_1;t_2)$ es la disminución de capital por cada **unidad monetaria** que **adelante** su disponibilidad o vencimiento desde t_2 a t_1:

$$d(t_1;t_2) = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = 1 - \frac{C_1}{C_2} = 1 - \frac{C_2.(1-d.(t_2-t_1))}{C_2} = d.(t_2-t_1) = 1 - v(t_1;t_2)$$

$$\boxed{C_1 = C_2.(1-d.(t_2-t_1))} \qquad \boxed{v(t_1;t_2) = 1-d.(t_2-t_1)}$$

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, como $v(n) = 1 - d.n$, resulta ser $d(n) = 1 - v(n) = d.n$; y si $n = 1$ es $d(1) = d$.

Rédito de contradescuento

El rédito de contradescuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $d^*(t_1;t_2)$, y es el exceso sobre la unidad del factor de contradescuento.

$$d^*(t_1;t_2) = v^*(t_1;t_2) - 1 = \frac{1}{1-d.(t_2-t_1)} - 1 = \frac{d.(t_2-t_1)}{1-d.(t_2-t_1)}$$

$$\boxed{v^*(t_1;t_2) = \frac{1}{1-d.(t_2-t_1)}}$$

De otro modo: $d^*(t_1;t_2)$ es el aumento de capital por cada **unidad monetaria** que **retrase** su disponibilidad o vencimiento desde t_1 a t_2:

$$d^*(t_1;t_2)=\frac{C_2-C_1}{C_1}=\frac{C_2}{C_1}-1=\frac{C_2}{C_2.(1-d.(t_2-t_1))}-1=\frac{1}{1-d.(t_2-t_1)}-1=v^*(t_1;t_2)-1$$

$$\boxed{C_1=C_2.(1-d.(t_2-t_1))}\qquad \boxed{v^*(t_1;t_2)=\frac{1}{1-d.(t_2-t_1)}}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, como $v^*(n)=1/(1-d.n)$, es $d^*(n)=v^*(n)-1=\dfrac{1}{1-d.n}-1=\dfrac{d.n}{1-d.n}$.

Si $n=1$ es $d^*(1)=\dfrac{d}{1-d}$.

Tanto ordinario de descuento

El tanto ordinario de descuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $\delta(t_1;t_2)$, y es el cociente entre el rédito de descuento y la amplitud del intervalo; por tanto, expresa la disminución de capital por cada **unidad monetaria** y por cada **unidad de tiempo** al **adelantar** su disponibilidad o vencimiento desde t_2 a t_1:

$$\delta(t_1;t_2)=\frac{d(t_1;t_2)}{t_2-t_1}=\frac{d.(t_2-t_1)}{t_2-t_1}=d$$

$$\boxed{d(t_1;t_2)=d.(t_2-t_1)}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, resulta ser $\delta(n)=d$.

Tanto ordinario de contradescuento

El tanto ordinario de contradescuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $\delta^*(t_1;t_2)$, y es el cociente entre el rédito de contradescuento y la amplitud del intervalo; por tanto, expresa el aumento de capital por cada **unidad monetaria** y por cada **unidad de tiempo** al **retrasar** su disponibilidad o vencimiento desde t_1 a t_2:

$$\rho^*(t_1;t_2)=\frac{d^*(t_1;t_2)}{t_2-t_1}=\frac{d}{1-d.(t_2-t_1)}$$

$$\boxed{d^*(t_1;t_2)=\frac{d.(t_2-t_1)}{1-d.(t_2-t_1)}}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, resulta ser $\delta^*(n)=d/(1-d.n)$; y si $n=1$ es $\delta^*(1)=d/(1-d)$.

4.2.2 VALOR ACTUAL, TIEMPO Y TANTO

Consideremos que:

$C_n\equiv$ Valor final o capital nominal
$t_n\equiv$ Vencimiento del capital final
$C_0\equiv$ Valor actual, efectivo o descontado
$t_0\equiv$ Vencimiento del valor efectivo o nominal
$d\equiv$ Tanto de descuento simple comercial
$n=t_n-t_0$

Cálculo del valor actual

Empleamos el factor de descuento $v(t_0;t_n)=1-d.(t_n-t_0)$:

$$C_0=C_n.v(t_0;t_n)=C_n.(1-d.(t_n-t_0))=C_n.(1-d.n)$$

Cálculo del tiempo y el tanto

$$C_0=C_n.(1-d.n)\Rightarrow\begin{cases}n=\dfrac{C_n-C_0}{d.C_n}d\\[2ex] d=\dfrac{C_n-C_0}{n.C_n}\end{cases}$$

4.2.3 CÁLCULO DEL DESCUENTO

En el sistema de descuento simple comercial, **el descuento se produce en el instante de la negociación del efecto;** por tanto la cantidad D_c descontada es:

$$D_c=C_n-C_0=C_n-C_n.(1-d.n)=C_n.d.n$$

4.2.4 EXPRESIONES REDUCIDAS DEL DESCUENTO

Se emplean para calcular el **descuento total que se produce en la negociación de un conjunto de efectos comerciales** (remesas)**, todas negociadas al mismo tanto de descuento "d".**

Siendo $C_1, C_2, \dots, C_k$ los valores nominales de los distintos efectos comerciales y $t_1, t_2, \dots, t_k$ sus respectivos vencimientos, es:

$$D_c^T = \sum_{s=1}^{k} D_c^s = \sum_{s=1}^{k} C_s . d . \frac{t_s}{360/365} = \frac{d}{360/365} . \sum_{s=1}^{k} C_s . t_s = \frac{i}{360/365} . \sum_{s=1}^{k} N_s$$

$$\boxed{C_s . t_s \equiv N_s = \text{número comercial}}$$

Multiplicador fijo: haciendo $M = \dfrac{d}{360/365}$, es: $D_c^T = M . \sum_{s=1}^{k} N_s$.

Divisor fijo: haciendo $D = \dfrac{360/365}{d}$, es: $D_c^T = \dfrac{1}{D} . \sum_{s=1}^{k} N_s$.

4.2.5 UNIFICACIÓN DE CAPITALES

A veces, en un instante $t = 0$, se pacta **sustituir un conjunto de efectos comerciales**

$$(C_1;t_1) \ ; \ (C_2;t_2) \ ; \ \dots\dots \ ; \ (C_k;t_k)$$

por un **único efecto** $(C;z)$ que, según la ley de descuento simple comercial, sea financieramente equivalente a los efectos que sustituye. La valoración de los esos capitales, debe ser el instante del pacto.

Al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en el instante $t = 0$ del pacto coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ..., $(C_k;t_k)$ en dicho instante, resulta:

$$C.(1 - d.z) = \sum_{s=1}^{k} C_s.(1 - d.t_s) \qquad \text{(I)}$$

Vencimiento medio

Si **se desea** que $C = \sum_{s=1}^{k} C_s$, la ecuación (I) se convierte en

$$\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right).(1 - d.z) = \sum_{s=1}^{k} C_s.(1 - d.t_s)$$

Por tanto:

$$z = \frac{\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right) - \left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1 - d.t_s)\right)}{d.\sum_{s=1}^{k} C_s} = \frac{\sum_{s=1}^{k} C_s.t_s}{\sum_{s=1}^{k} C_s} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \text{media aritmética de los vencimientos } t_s \\ \text{ponderados con las cuantías de los capitales} \end{array} \right\}$$

Como el valor de "z" no depende del tipo de interés "i", podemos expresar el tiempo en las unidades que queramos (días, meses, etc.)

Vencimiento común

Si **no se desea** que $C = \sum_{s=1}^{k} C_s$, los valores de "C" y "z" dependen uno de otro.

Si **se fija el valor de "C",** de (I) se deduce que: $z = \dfrac{C - \sum_{s=1}^{k} C_s.(1 - d.t_s)}{d.C}$

Si **se fija el vencimiento "z",** de (I) se deduce que $C = \dfrac{\sum_{s=1}^{k} C_s.(1 - d.t_s)}{1 - d.z}$.

4.2.6 SUSTITUCIÓN DE CAPITALES

A veces, en un instante $t=0$, se plantea **sustituir un único efecto** $(C;t)$ **por un conjunto de efectos** $(C_1;t_1),\ldots,(C_k;t_k)$ que, según la ley de descuento simple comercial, sea financieramente equivalente al efecto $(C;t)$ que sustituye. Si restringimos el problema al caso de dos efectos $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$, considerando que $C_1+C_2=C$, al exigir que la proyección financiera de $(C;t)$ en el instante $t=0$ coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$ en dicho instante, resulta:

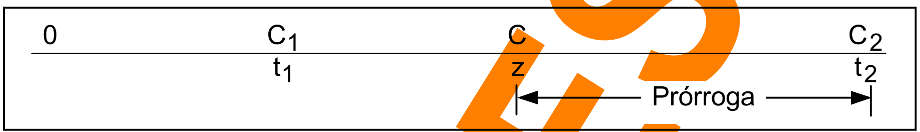
$$C.(1-d.t)=C_1.(1-d.t_1)+C_2.(1-d.t_2)\Rightarrow C-C.d.t=C_1-C_1.d.t_1+C_2-C_2.d.t_2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C.t=C_1.t_1+C_2.t_2$$

Por tanto, los valores de C_1 y C_2 corresponden a la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1.t_1+C_2.t_2=C.t \\ C_1+C_2=C \end{cases}.$$

4.2.7 PRÓRROGA DE VENCIMIENTO

A veces, en un instante $t=0$, y dado un capital financiero $(C;z)$ se plantea **anticipar** una cuantía C_1 al instante $t_1>0$, **prorrogando** la cuantía restante $C_2=C-C_1$ hasta un instante t_2 posterior a "z".

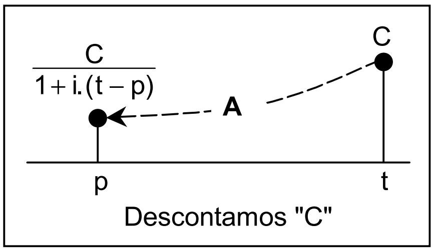


Al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en el instante $t=0$ coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$ en dicho instante, resulta:

$$C_1.(1-d.t_1)+C_2.(1-d.t_2)=C.(1-d.z)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1-C_1.d.t_1+C_2-C_2.d.t_2=C-C.d.z\Rightarrow C_1.t_1+C_2.t_2=C.z\Rightarrow$$
$$\boxed{C_1+C_2=C}$$
$$\Rightarrow t_2=\frac{C.z-C_1.t_1}{C_2}\Rightarrow \text{Prórroga}\equiv(t_2-z)=\frac{C.z-C_1.t_1}{C_2}-z$$

4.3 DESCUENTO SIMPLE RACIONAL

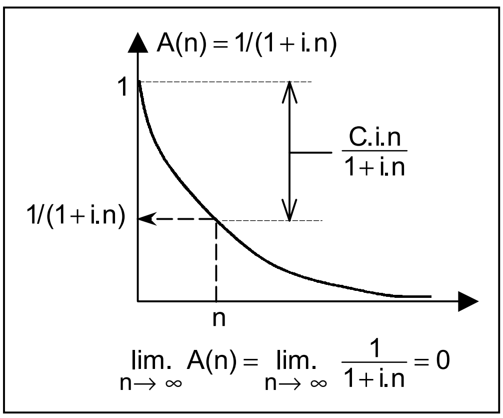
Elegida a priori una ley de capitalización simple "L" con tanto "i", la ley financiera de **descuento simple racional** postula que el valor actual (valor efectivo o valor descontado) $A(C;t;p)$ del capital $(C;t)$ en el punto de valoración "p" $(p<t)$ es aquella que capitalizada con la ley "L" desde el instante "p" al instante "t" produce un montante "C"; o sea, la cantidad descontada $D_R(C;t;p)$ coincide con los intereses que produciría el montante $A(C;t;p)$ capitalizado desde "p" hasta "t" con la ley "L". Así, ha de ser $A(C;t;p).(1+i.(t-p))=C$; por tanto:



$$A(C;t;p)=\frac{C}{1+i.(t-p)}$$

$$D_R=C-A(C;t;p)=C-\frac{C}{1+i.(t-p)}=\frac{C.i.(t-p)}{1+i.(t-p)}$$

Si $C=1$, es $A(1;t;p)\equiv A(t;p)=1/(1+i.(t-p))$ ... y como el valor de $A(t;p)$ sólo depende de la amplitud "$t-p$" del intervalo $(p;t)$, si denotamos "n" dicha amplitud (o sea, $n\equiv t-p>0$), podemos escribir $A(n)=1/(1+i.n)$, que es la cuantía del capital financiero equivalente o sustituto del capital $(1;t)$ en el instante de valoración situado "n" unidades de tiempo a la **izquierda** de "t", siendo $D_R=\frac{i.n}{1+i.n}$.

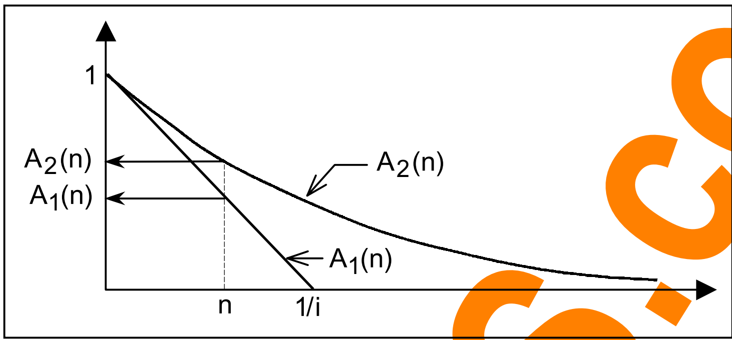


Comparación entre descuento comercial y el racional

La ley A_1 de **descuento comercial** al tanto "d" postula que $A_1(n) = 1 - d.n$, y la ley A_2 de **descuento racional** al tanto "i" postula que $A_2(n) = 1/(1+i.n)$; así, si $d = i$, resulta:

$$A_1(n) - A_2(n) = (1 - i.n) - \frac{1}{1+i.n} = -\frac{i^2.n^2}{1+i.n} < 0 \Rightarrow A_1(n) < A_2(n)$$

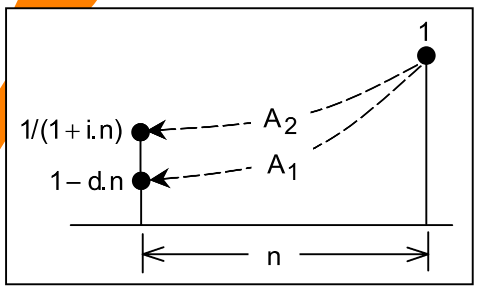
Como vemos, si $d = i$, el montante $A_1(n) = 1 - i.n$ obtenido con el descuento comercial es menor que el $A_2(n) = 1/(1+i.n)$ obtenido con el descuento racional, y por eso los bancos emplean el descuento comercial.



Equivalencia entre el descuento comercial y el racional

Como sabemos, la ley A_1 de descuento comercial al tanto "d" postula que $A_1(n) = 1 - d.n$, y la ley A_2 de descuento racional al tanto "i" postula que $A_2(n) = 1/(1+i.n)$; al exigir que ambas leyes produzcan el mismo montante, resulta:

$$A_1(n) = A_2(n) \Rightarrow 1 - d.n = \frac{1}{1+i.n} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{i}{1+i.n} \\ i = \dfrac{d}{1-d.n} \end{cases}$$



4.4 DESCUENTO COMPUESTO

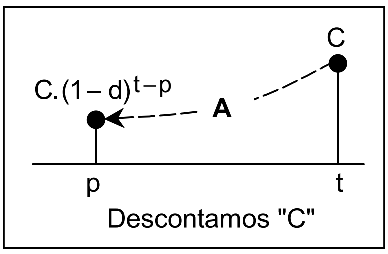
El **sistema de descuento compuesto** postula que la cuantía descontada en cada **periodo unitario** de tiempo se resta al capital a descontar, para, en periodos sucesivos, descontar sobre el capital ya descontado.

Por ejemplo, si descuentas de forma compuesta 1000 € que vencen dentro de 3 años y $d = 0'1$ es la cantidad descontada por cada euro en una unidad de tiempo (un año), el capital (1000;3) es equivalente al (900;2); es decir, pagas 100 € por adelantar un año el vencimiento del capital (1000;3). El capital (900;2) es equivalente al (810;1); es decir, pagas 90 € (el 10% de 900) por adelantar un año el vencimiento del capital (900;2) .... y el capital (810;1) es equivalente al (729;0); es decir pagas 81 € (el 10% de 810) por adelantar un año el vencimiento del capital (810;1).

En general, si "d" es la cantidad descontada por cada unidad monetaria en una unidad de tiempo, la proyección financiera $A(C;t;p)$ del capital $(C;t)$ en el punto de valoración "p" $(p < t)$ es:

$$A(C;t;p) = C.(1-d)^{t-p}$$

$$\boxed{(C;t) \approx (C.(1-d);t-1) \approx \left(C.(1-d)^2;t-2\right) \approx ,,,, \approx \left(C.(1-d)^{t-p};p\right)}$$



Denotando "n" a la amplitud "$t-p$" del intervalo $(p;t)$, podemos escribir $L(C;n) = C.(1-d)^n$, que es la cuantía del capital financiero equivalente o sustituto del capital $(C;t)$ en el instante de valoración situado "n" unidades de tiempo a la **izquierda** de "t" .... y si $C = 1$, es $L(1;n) = (1-d)^n$.

Sabemos que si "i" es el interés producido por una unidad monetaria en una unidad de tiempo, $(1+i)^n$ es el montante obtenido con la ley de capitalización compuesta "L" al capitalizar una unidad monetaria "n" unidades de tiempo; y si "d" el descuento realizado a una unidad monetaria en una unidad de tiempo, $(1-d)^n$ es el montante obtenido con la ley de descuento simple "A" al descontar una unidad monetaria "n" unidades de tiempo. Así:

$$(1;0) \overset{L}{\approx} \left((1+i)^n;n\right) \overset{A}{\approx} ((1+i)^n.(1-d)^n;0)$$

$$(1;0) \overset{A}{\approx} \left((1-d)^n;-n\right) \overset{L}{\approx} ((1-d)^n.(1+i)^n;0)$$

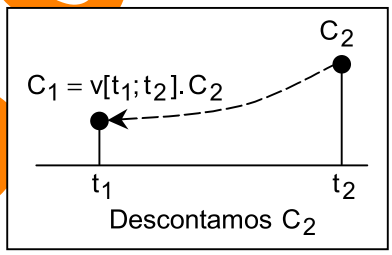
Por tanto "L" y "A" serán equivalentes si $(1-d).(1+i)=1$.

4.4.1 MAGNITUDES DERIVADAS

Los componentes "C" y "t" del capital financiero (C;t) se llaman magnitudes primarias o fundamentales, y cualquier otra magnitud obtenida como resultado de operaciones con las fundamentales se llama **magnitud derivada** (normalmente se obtendrán mediante relaciones de proporcionalidad entre capitales).

Factor de descuento

El factor de descuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $v(t_1;t_2)$, y permite conocer el capital C_1 disponible en el instante t_1 si se conoce el capital C_2 disponible en el instante t_2.



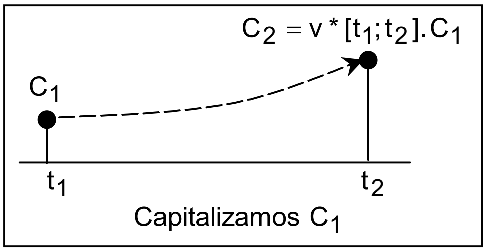
$$0 < v[t_1;t_2] = \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2.(1-d)^{t_2-t_1}}{C_2} = (1-d)^{t_2-t_1} < 1$$

$$\boxed{C_1 = C_2.(1-d)^{t_2-t_1}}$$

Por tanto, es $C_1 = v(t_1;t_2).C_2$. Observa que $v(t_1;t_2)$ es la cuantía obtenida al **adelantar** la disponibilidad o vencimiento de **una unidad monetaria** desde t_2 a t_1. Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta $v(n)=(1-d)^n < 1$; y si $n=1$ es $v(1)=1-d$.

Factor de contradescuento

El factor de contradescuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $v^*(t_1;t_2)$, y permite conocer el capital C_2 disponible en el instante t_2 si se conoce el capital C_1 disponible en el instante t_1. Naturalmente, $v^*(t_1;t_2)$ es el inverso de $v(t_1;t_2)$



$$v^*(t_1;t_2) = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{v(t_1;t_2)} = (1-d)^{-(t_2-t_1)} > 1$$

$$\boxed{v(t_1;t_2) = (1-d)^{t_2-t_1}}$$

Por tanto, es $C_2 = v^*(t_1;t_2).C_1$. Observa que $v^*(t_1;t_2)$ es la cuantía obtenida al **retrasar** la disponibilidad o vencimiento de **una unidad monetaria** desde t_1 a t_2.

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta $v^*(n) = (1-d)^{-n} > 1$; y si $n=1$ es $v^*(1) = 1/(1-d)$.

Rédito de descuento

El rédito de descuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $d(t_1;t_2)$, y es el complemento a 1 del factor de descuento.

$$d(t_1;t_2) = 1 - v(t_1;t_2) = 1-(1-d)^{t_2-t_1}$$

$$\boxed{v(t_1;t_2) = (1-d)^{t_2-t_1}}$$

De otro modo: $d(t_1;t_2)$ es la disminución de capital por cada **unidad monetaria** que **adelante** su disponibilidad o vencimiento desde t_2 a t_1:

$$d(t_1;t_2) = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = 1 - \frac{C_1}{C_2} = 1 - \frac{C_2.(1-d)^{t_2-t_1}}{C_2} = 1-(1-d)^{t_2-t_1} = 1 - v(t_1;t_2)$$

$$\boxed{C_1 = C_2.(1-d)^{t_2-t_1}} \qquad \boxed{v(t_1;t_2) = (1-d)^{t_2-t_1}}$$

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, como $v(n) = (1-d)^n$, resulta ser $d(n) = 1 - v(n) = 1-(1-d)^n$; y si $n=1$ es $d(1)=d$.

Rédito de contradescuento

El rédito de contradescuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $d^*(t_1;t_2)$, y es el exceso sobre la unidad del factor de contradescuento:

$$d^*(t_1;t_2) = v^*(t_1;t_2) - 1 = (1-d)^{-(t_2-t_1)} - 1$$

$$\boxed{v^*(t_1;t_2) = (1-d)^{-(t_2-t_1)}}$$

De otro modo: $d^*(t_1;t_2)$ es el aumento de capital por cada **unidad monetaria** que **retrase** su disponibilidad o vencimiento desde t_1 a t_2:

$$d^*(t_1;t_2) = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1} - 1 = \frac{C_2}{C_2.(1-d)^{t_2-t_1}} - 1 = (1-d)^{-(t_2-t_1)} - 1 = v^*(t_1;t_2) - 1$$

$$\boxed{C_1 = C_2.(1-d)^{t_2-t_1}} \qquad \boxed{v^*(t_1;t_2) = (1-d)^{-(t_2-t_1)}}$$

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, como $v^*(n) = (1-d)^{-n}$, es $d^*(n) = v^*(n) - 1 = (1-d)^{-n} - 1$.
Si $n = 1$ es $d^*(1) = d/(1-d)$.

Tanto ordinario de descuento

El tanto ordinario de descuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $\delta(t_1;t_2)$, y es el cociente entre el rédito de descuento y la amplitud del intervalo; por tanto, expresa la disminución de capital por cada **unidad monetaria** y por cada **unidad de tiempo** al **adelantar** su disponibilidad o vencimiento desde t_2 a t_1:

$$\delta(t_1;t_2) = \frac{d(t_1;t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1-(1-d)^{t_2-t_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{d(t_1;t_2) = 1-(1-d)^{t_2-t_1}}$$

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta ser $\delta(n) = \dfrac{1-(1-d)^n}{n}$.

Tanto ordinario de contradescuento

El tanto ordinario de contradescuento del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $\delta^*(t_1;t_2)$, y es el cociente entre el rédito de contradescuento y la amplitud del intervalo; por tanto, expresa el aumento de capital por cada **unidad monetaria** y por cada **unidad de tiempo al retrasar** su disponibilidad o vencimiento desde t_1 a t_2:

$$\rho^*(t_1;t_2) = \frac{d^*(t_1;t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{(1-d)^{-(t_2-t_1)} - 1}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{d^*(t_1;t_2) = (1-d)^{-(t_2-t_1)} - 1}$$

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta ser $\delta^*(n) = \dfrac{(1-d)^{-n} - 1}{n} - 1$; y si $n = 1$ es $\delta^*(1) = d/(1-d)$.

4.4.2 VALOR ACTUAL, TIEMPO Y TANTO

Consideremos que:

$C_n \equiv$ Valor final o capital nominal
$t_n \equiv$ Vencimiento del capital final
$C_0 \equiv$ Valor actual, efectivo o descontado
$t_0 \equiv$ Vencimiento del valor efectivo o nominal
$d \equiv$ Tanto de descuento compuesto
$n = t_n - t_0$

Cálculo del valor actual

Empleamos el factor de descuento $v(t_0;t_n) = (1-d)^{t_n-t_0}$:

$$C_0 = C_n.v(t_0;t_n) = C_n.(1-d)^{t_n-t_0} = C_n.(1-d)^n$$

Cálculo del tiempo y el tanto

$$C_0 = C_n.(1-d)^n \Rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{\text{Ln } C_0 - \text{Ln } C_n}{\text{Ln } (1-d)} \\ d = 1-(C_0 / C_n)^{1/n} \end{cases}$$

4.4.3 CÁLCULO DEL DESCUENTO

En el sistema de descuento simple compuesto, **el descuento se produce en el instante de la negociación del efecto;** por tanto la cantidad D_c descontada es $D_c = C_n - C_0 = C_n - C_n.(1-d)^n = C_n.\left(1-(1-d)^n\right)$

4.4.4 UNIFICACIÓN DE CAPITALES

A veces, en un instante $t=0$, se pacta **sustituir un conjunto de efectos comerciales** $(C_1;t_1), \ldots, (C_k;t_k)$ por **un único efecto** $(C;z)$ que, según la ley de descuento compuesto, sea financieramente equivalente a los efectos que sustituye. La valoración de los esos capitales, debe ser el instante del pacto.

Al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en el $t=0$ coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1), \ldots, (C_k;t_k)$ en dicho instante, resulta:

$$C.(1-d)^z = \sum_{s=1}^{k} C_s.(1-d)^{t_s} \qquad \text{(I)}$$

Vencimiento medio

Si **se desea** que $C = \sum_{s=1}^{k} C_s$, la ecuación (I) se convierte en $\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right).(1-d)^z = \sum_{s=1}^{k} C_s.(1-d)^{t_s}$; por tanto:

$$z = \frac{\operatorname{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1-d)^{t_s}\right) - \operatorname{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right)}{\operatorname{Ln}(1-d)}$$

Vencimiento común

Si **no se desea** que $C = \sum_{s=1}^{k} C_s$, los valores de "C" y "z" dependen uno de otro.

Si **se fija el valor de "C",** de (I) se deduce que $z = \left(\operatorname{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1-d)^{t_s}\right) - \operatorname{Ln} C\right) / \operatorname{Ln}(1-d)$

Si **se fija el vencimiento "z",** de (I) se deduce que $C = \left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1-d)^{t_s}\right) / (1-d)^z$.

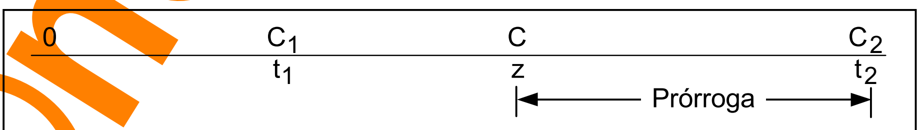
4.4.5 SUSTITUCIÓN DE CAPITALES

A veces, en un instante $t=0$, se plantea **sustituir un único efecto** $(C;t)$ **por un conjunto de efectos** $(C_1;t_1), \ldots, (C_k;t_k)$ que, según la ley de descuento compuesto, sea financieramente equivalente al efecto $(C;t)$ que sustituye. Si restringimos el problema al caso de dos efectos $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$, considerando que $C_1 + C_2 = C$, al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en $t=0$ coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$ en $t=0$, resulta $C_1.(1-d)^{t_1} + C_2.(1-d)^{t_2} = C.(1-d)^z$. Por tanto, los valores de C_1 y C_2 corresponden a la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$C_1.(1-d)^{t_1} + C_2.(1-d)^{t_2} = C.(1-d)^z \ ; \ C_1 + C_2 = C.$$

4.4.6 PRÓRROGA DE VENCIMIENTO

A veces, en un instante $t=0$, y dado un capital financiero $(C;z)$, se plantea **anticipar** una cuantía C_1 al instante $t_1 > 0$, **prorrogando** la cuantía restante $C_2 = C - C_1$ hasta un instante t_2 posterior a "z".



Al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en el instante $t=0$ coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$ en dicho instante, resulta:

$$C_1.(1-d)^{t_1} + C_2.(1-d)^{t_2} = C.(1-d)^z$$

Obtenido el valor de t_2 a partir de la ecuación anterior, la **prórroga** es $t_2 - z$.