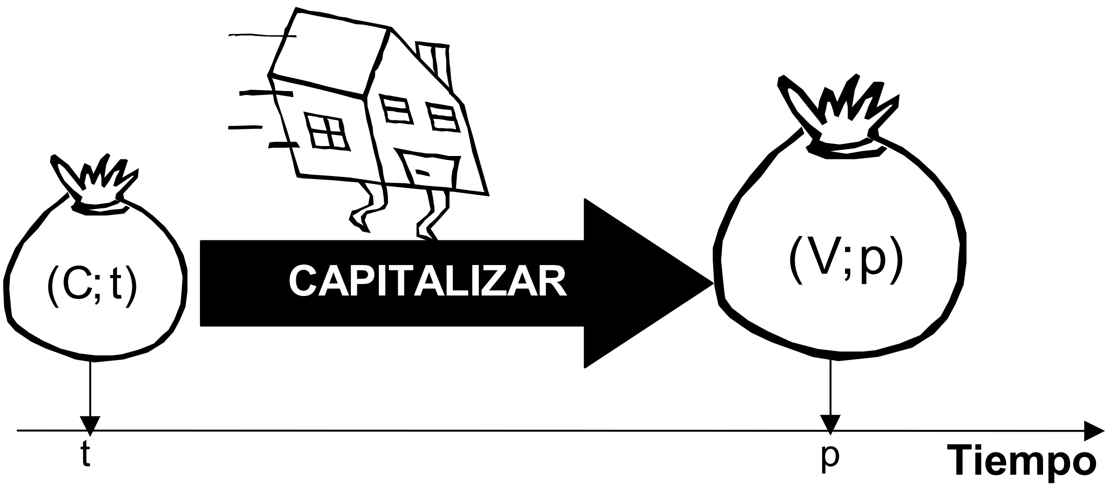
MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Tema 3

CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

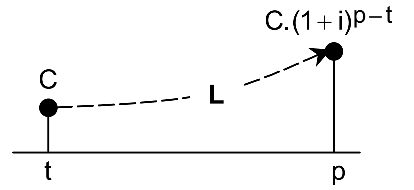


$$V = C.(1+i)^{p-t}$$

3.1 CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Como sabemos, en un sistema de capitalización simple al tanto "i" ($\Leftrightarrow L(C;t;p) = C.(1+i.(p-t)),\ p>t$), el interés producido por el capital "C" en cada periodo unitario de tiempo no produce intereses (no se capitaliza) en periodos posteriores.

El sistema de capitalización compuesta postula que los intereses producidos en cada <u>periodo unitario</u> de tiempo se suman al capital inicial de dicho periodo, y la suma de ambos es el capital que produce intereses en el siguiente periodo de tiempo. Por tanto, siendo "i" el interés producido por una unidad monetaria en una unidad de tiempo, la proyección financiera o montante $L(C;t;p)$ del capital $(C;t)$ en el punto de valoración "p" ($p>t$) es:



Capitalizamos "C"

$$L(C;t;p) = C.(1+i)^{p-t}$$

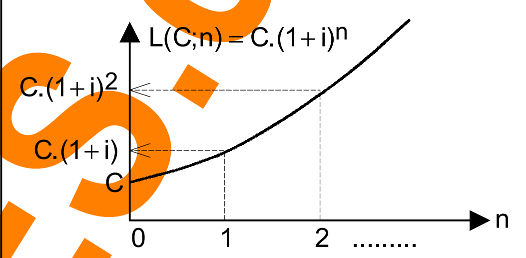
$$\boxed{(C;t) \approx (C.(1+i);t+1) \approx \left(C.(1+i)^2;t+2\right) \approx ,,,, \approx \left(C.(1+i)^{p-t};p\right)}$$

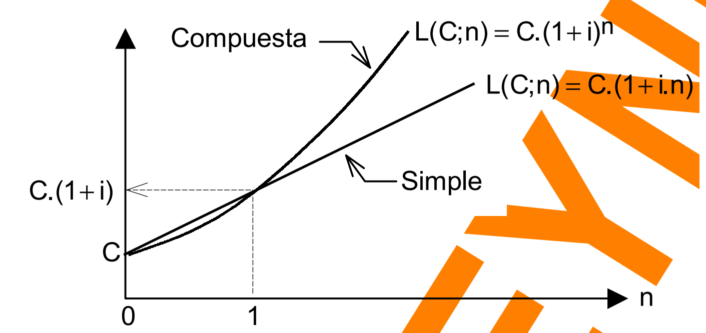
Denotando "n" a la amplitud "$p-t$" del intervalo $(t;p)$, podemos escribir

$$L(C;n) = C.(1+i)^n$$

que es la cuantía del capital financiero equivalente o sustituto del capital $(C;t)$ en el instante de valoración situado "n" unidades de tiempo a la **derecha** de "t".

Si $C=1$, es $L(n) = (1+i)^n$; o sea: $(1;0) \approx \left((1+i)^n;n\right)$.





Como se ve en la figura, la capitalización compuesta $C.(1+i)^n$ es superior (inferior) a la simple $C.(1+i.n)$ si la duración "n" es superior (inferior) a la unidad de tiempo. Por eso, en la vida real, cuando $n>1$ suele usarse la compuesta, empleando la simple si $n<1$. Cuando $n=1$, son indiferentes.

3.2 MAGNITUDES DERIVADAS

Los componentes "C" y "t" del capital financiero $(C;t)$ se llaman magnitudes primarias o fundamentales, y cualquier otra magnitud obtenida como resultado de operaciones con las fundamentales se llama **magnitud derivada** (normalmente se obtendrán mediante relaciones de proporcionalidad entre capitales).

Factor de capitalización

El factor de capitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $u(t_1;t_2)$, y permite conocer el capital C_2 disponible en el instante t_2 si se conoce el capital C_1 disponible en el instante t_1.

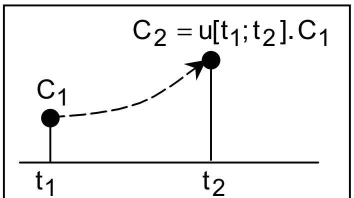
$$u[t_1;t_2] = \frac{C_2}{C_1} = \frac{C_1.(1+i)^{t_2-t_1}}{C_1} = (1+i)^{t_2-t_1} > 1$$

$$\boxed{C_2 = C_1.(1+i)^{t_2-t_1}}$$

Por tanto, es $C_2 = u(t_1;t_2).C_1$.

Observa que $u(t_1;t_2)$ es la cuantía obtenida al **retrasar** la disponibilidad o vencimiento de **una unidad monetaria** desde t_1 a t_2.

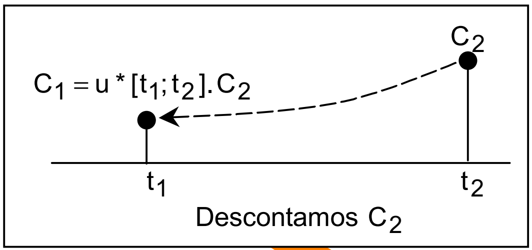
Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta $u(n) = (1+i)^n > 1$; y si $n=1$ es $u(1) = 1+i$.



Capitalizamos C_1

Factor de contracapitalización

El factor de contracapitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $u^*(t_1;t_2)$, y permite conocer el capital C_1 disponible en el instante t_1 si se conoce el capital C_2 disponible en el instante t_2. Naturalmente, $u^*(t_1;t_2)$ es el inverso de $u(t_1;t_2)$



$$0<u^*(t_1;t_2)=\frac{C_1}{C_2}=\frac{1}{u(t_1;t_2)}=(1+i)^{-(t_2-t_1)}$$

$$\boxed{u(t_1;t_2)=(1+i)^{t_2-t_1}}$$

Por tanto, es $C_1=u^*(t_1;t_2).C_1$. Observa que $u^*(t_1;t_2)$ es la cuantía obtenida al **adelantar** la disponibilidad o vencimiento de **una unidad monetaria** desde t_2 a t_1.

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, resulta $0<u^*(n)=(1+i)^{-n}<1$ ..... y si $n=1$ es $u^*(1)=(1+i)^{-1}$.

Rédito de capitalización

El rédito de capitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $i(t_1;t_2)$, y es el exceso sobre la unidad del factor de capitalización:

$$i(t_1;t_2)=u(t_1;t_2)-1=(1+i)^{t_2-t_1}-1$$

$$\boxed{u(t_1;t_2)=(1+i)^{t_2-t_1}}$$

De otro modo: $i(t_1;t_2)$ es el aumento de capital por cada **unidad monetaria** que **retrase** su disponibilidad o vencimiento desde t_1 a t_2:

$$i(t_1;t_2)=\frac{C_2-C_1}{C_1}=\frac{C_2}{C_1}-1=\frac{C_1.(1+i)^{t_2-t_1}}{C_1}-1=(1+i)^{t_2-t_1}-1=u(t_1;t_2)-1$$

$$\boxed{C_2=C_1.(1+i)^{t_2-t_1}}\qquad\boxed{u(t_1;t_2)=(1+i)^{t_2-t_1}}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, como $u[n]=(1+i)^n$, es $i(n)=u(n)-1=(1+i)^n-1$; y si $n=1$ es $i(1)=i$.

Rédito de contracapitalización

El rédito de contracapitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $i^*(t_1;t_2)$, y es el complemento a la unidad del factor de contracapitalización:

$$i^*(t_1;t_2)=1-u^*(t_1;t_2)=1-(1+i)^{-(t_2-t_1)}$$

$$\boxed{u^*(t_1;t_2)=(1+i)^{-(t_2-t_1)}}$$

De otro modo: $i^*(t_1;t_2)$ es la disminución de capital por cada **unidad monetaria** que **adelante** su disponibilidad o vencimiento desde t_2 a t_1:

$$i^*(t_1;t_2)=\frac{C_2-C_1}{C_2}=1-\frac{C_1}{C_2}=1-\frac{C_1}{C_1.(1+i)^{t_2-t_1}}=1-(1+i)^{-(t_2-t_1)}=1-u^*(t_1;t_2)$$

$$\boxed{C_2=C_1.(1+i)^{t_2-t_1}}\qquad\boxed{u^*(t_1;t_2)=(1+i)^{-(t_2-t_1)}}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, como $u^*(n)=(1+i)^{-n}$, es $i^*(n)=1-u^*(n)=1-(1+i)^{-n}$. Si $n=1$ es $i^*(1)=1-(1+i)^{-1}$.

Tanto ordinario de capitalización

El tanto ordinario de capitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $\rho(t_1;t_2)$, y es el cociente entre el rédito de capitalización y la amplitud del intervalo; por tanto, expresa el aumento de capital por cada **unidad monetaria** y por cada **unidad de tiempo** al **retrasar** su disponibilidad o vencimiento desde t_1 a t_2:

$$\rho(t_1;t_2)=\frac{i(t_1;t_2)}{t_2-t_1}=\frac{(1+i)^{t_2-t_1}-1}{t_2-t_1}=i$$

$$\boxed{i(t_1;t_2)=(1+i)^{t_2-t_1}-1}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, resulta $\rho(n)=\left((1+i)^n-1\right)/n$; y si $n=1$ es $\rho(1)=i$.

Tanto ordinario de contracapitalización

El tanto ordinario de contracapitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $\rho^*(t_1;t_2)$, y es el cociente entre el rédito de capitalización y la amplitud del intervalo; por tanto, expresa la disminución de capital por cada **unidad monetaria** y por cada **unidad de tiempo** al **adelantar** su disponibilidad o vencimiento desde t_2 a t_1:

$$\rho^*(t_1;t_2) = \frac{i^*(t_1;t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1-(1+i)^{-(t_2-t_1)i}}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{i^*(t_1;t_2) = 1-(1+i)^{-(t_2-t_1)}}$$

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta ser $\rho^*(n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{n}$; y si $n=1$ es $\rho^*(1) = i/(1+i)$.

3.3 MONTANTE, VALOR ACTUAL, TIEMPO Y TANTO

Consideremos que:

$C_0 \equiv$ Valor actual
$t_0 \equiv$ Vencimiento del capital actual
$C_n \equiv$ Valor final o montante
$t_n \equiv$ Instante de valoración
$i \equiv$ Tanto de interés
$n = t_n - t_0$

Los componentes "C" y "t" del capital financiero (C;t) se llaman magnitudes primarias o fundamentales, y cualquier otra magnitud obtenida como resultado de operaciones con las fundamentales se llama **magnitud derivada** (normalmente se obtendrán mediante relaciones de proporcionalidad entre capitales).

Cálculo del montante

Empleamos el factor de capitalización $u(t_0;t_n) = (1+i)^{t_n - t_0}$:

$$C_n = C_0 . u(t_0;t_n) = C_0.(1+i)^{t_n - t_0} = C_0.(1+i)^n$$

Cálculo del valor actual

Empleamos el factor de contracapitalización $u^*(t_0;t_n) = (1+i)^{-(t_n - t_0)}$:

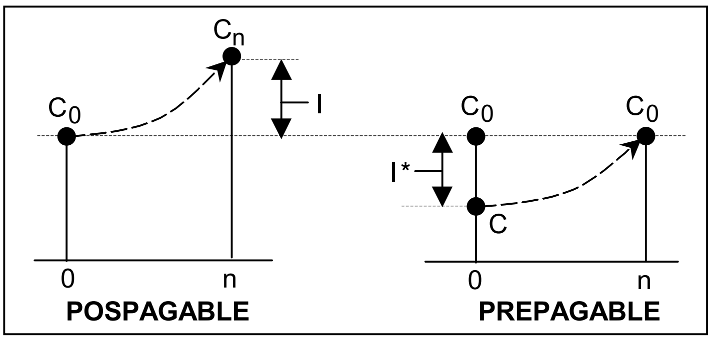
$$C_0 = C_n.u^*(t_0;t_n) = C_n.(1+i)^{-(t_n-t_0)} = C_n.(1+i)^{-n}$$

Cálculo del tiempo y el tanto

$$C_n = C_0.(1+i)^n \Rightarrow \begin{cases} \text{Ln } C_n = (\text{Ln } C_0) + (n.\text{Ln } (1+i)) \Rightarrow n = \dfrac{\text{Ln } C_n - \text{Ln } C_0}{\text{Ln } (1+i)} \\ \dfrac{C_n}{C_0} = (1+i)^n \Rightarrow i = \left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)^{1/n} - 1 \end{cases}$$

3.4. CÁLCULO DE LOS INTERESES GENERADOS

Como sabemos, una **operación financiera de capitalización** consiste en que una persona (el acreedor) cede a otra persona (el deudor) un capital durante un periodo de tiempo, y al final de dicho periodo, el deudor se compromete a devolver ese capital más un capital adicional en concepto de precio o alquiler del capital recibido.



Del capital adicional que se devuelve se dice que es el **interés**, y su vencimiento puede ser al final de la operación (interés **pospagable** o aplazable "I"), al inicio de la misma (interés **prepagable** o anticipado I*) o en un instante cualquiera "p".

Interés pospagable

Siendo "i" el tanto de interés pospagable, es: $I = C_n - C_0 = C_0.(1+i)^n - C_0 = C_0\left((1+i)^n - 1\right)$

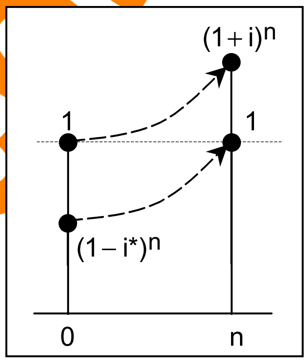
Interés prepagable

Siendo i^* el tanto de interés prepagable, es $C = C_0.(1-i^*)^n$, o sea $(C_0.(1-i^*)^{-n};0) \approx (C_0;n)$; por tanto:

$$I^* = C_0 - C = C_0 - (C_0.(1-i^*)^n) = C_0.(1-i^*)^{-n}$$

Relación de equivalencia entre el tanto pospagable y el prepagable

Podemos determinar la relación entre "i" e i^* mareando la perdiz de dos modos:



- Si el tanto **pospagable** es "i", los capitales (1;0) y $((1+i)^n;n)$ son equivalentes, y siendo i^* el tanto **prepagable,** los capitales $((1+i)^n;n)$ y $((1+i)^n.(1-i^*)^n;0)$ también son equivalentes; así, si $(1;0) \approx ((1+i)^n;n) \approx ((1+i)^n.(1-i^*)^n;0)$, es $(1+i)^n.(1-i^*)^n = 1$, por lo que $(1+i).(1-i^*) = 1$.
- Si el tanto **prepagable** es i*, los capitales (1;n) y $((1-i^*)^n;0)$ son equivalentes, y si "i" es el tanto **pospagable,** los capitales $((1-i^*)^n;0)$ y $((1-i^*)^n.(1+i)^n);1)$ también son equivalentes; así, si $(1;n) \approx ((1-i^*)^n;0) \approx ((1-i^*)^n.(1+i)^n);n)$, es $(1-i^*)^n.(1+i)^n = 1$, por lo que $(1-i^*).(1+i) = 1$.

Naturalmente:

$$(1+i).(1-i^*) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1+i = \dfrac{1}{1-i^*} \Rightarrow i = \dfrac{1}{1-i^*} - 1 = \dfrac{i^*}{1-i^*} \\ 1-i^* = \dfrac{1}{1+i} \Rightarrow i^* = 1 - \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{i}{1+i} \end{cases}$$

3.5 CAPITALIZACIÓN COMPUESTA CON PERIODOS FRACCIONARIOS

Por su definición, el régimen de capitalización compuesta es discontinuo, pues si la capitalización se inicia en el instante "0", los intereses se van añadiendo al capital en los instantes 1, 2, 3, ...

Siendo "n" un número natural y $\mu \in (0;1)$, si nos planteamos la capitalización compuesta del capital $(C_0;t)$ durante n+μ unidades de tiempo, para determinar la proyección financiera de (C;t) en el instante t+n+μ debemos elegir una de las siguientes dos opciones.

- ## Convenio lineal

  Capitalizamos a **interés compuesto** durante "n" unidades de tiempo, y el montante $C_0.(1+i)^n$ lo capitalizamos a **interés simple** durante la fracción $\mu \in (0;1)$; así el montante resultante $C_0.(1+i)^n.(1+i.\mu)$.

  Por ejemplo, si la unidad de medida de tiempo es el año y capitalizamos durante 7 años y 5 meses, el montante resultante es $C_0.(1+i)^7.\left(1+i.\frac{5}{12}\right)$.

- ## Convenio exponencial

  Generaliza la ley de capitalización compuesta para toda duración de ésta; así el montante de capitalizar C_0 durante n+μ unidades de tiempo es $C_0.(1+i)^{n+\mu}$.

  Por ejemplo, si la unidad de medida de tiempo es el año y capitalizamos durante 7 años y 5 meses, el montante resultante es $C_0.(1+i)^{7+(5/12)}$.

Si $\mu \in (0;1)$ es $1+i.\mu > (1+i)^\mu$; por tanto, el montante $C_0.(1+i)^n.(1+i.\mu)$ obtenido con mediante el convenio lineal es mayor que el $C_0.(1+i)^{n+\mu}$ obtenido mediante el convenio exponencial.

Salvo indicación expresa en sentido contrario, siempre usaremos el convenio exponencial.

3.6 TANTOS EQUIVALENTES EN CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

El sistema de capitalización compuesta postula que los intereses producidos en cada <u>periodo unitario</u> de tiempo se suman al capital inicial de dicho periodo, y la suma de ambos es el capital que produce intereses en el siguiente periodo de tiempo. Por tanto, si "i" es el interés producido por una unidad monetaria en una unidad de tiempo, el montante de "C" al cabo de "n" unidades de tiempo es $C.(1+i)^n$. Así, si la unidad de medida de tiempo es el año e "i" es el interés producido por una unidad monetaria en un año, el montante del "C" al cabo de "n" años es $C.(1+i)^n$ ...... y si la unidad de medida de tiempo es el trimestre e "i" es el interés producido por una unidad monetaria en un trimestre, el montante de "C" al cabo de "n" trimestres es $C.(1+i)^n$ ..... y si la unidad de medida de tiempo es el mes e "i" es el interés producido por una unidad monetaria en un mes, el montante de "C" al cabo de "n" meses es $C.(1+i)^n$.

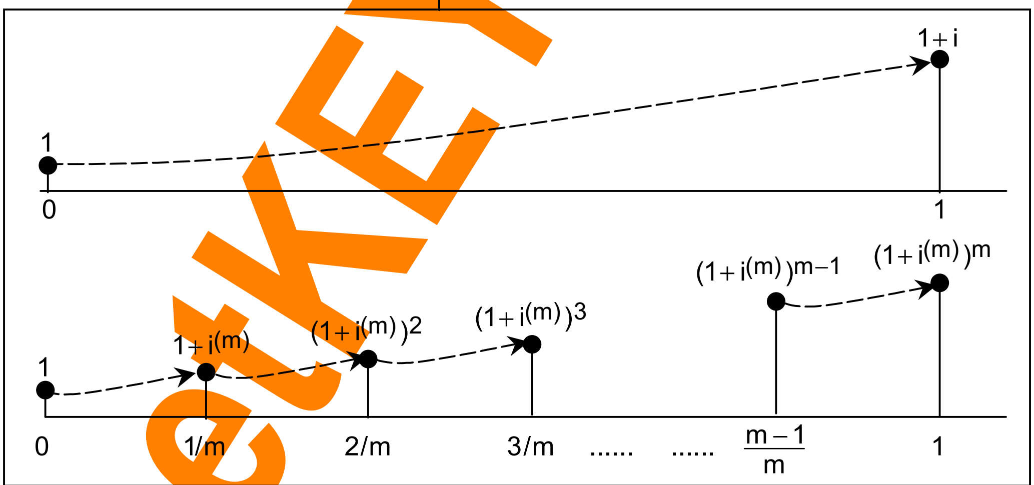
A veces se pacta que los intereses se añadan al capital (se capitalicen) con una frecuencia distinta a la unidad de medida del tiempo. Por ejemplo, la unidad de medida de tiempo es el año, pero se pacta la capitalización de intereses mensualmente, o diariamente, o trimestralmente.

Siendo "m" la **frecuencia de capitalización** (o sea, "m" es el número de veces que se capitalizan los intereses en una unidad de tiempo), llamamos **tanto real o efectivo de interés,** y denotamos $i^{(m)}$, al interés producido por una unidad monetaria durante 1/m unidades de tiempo.

Por ejemplo, si la unidad de medida de tiempo es el año, y los intereses se capitalizan semestralmente ($\Leftrightarrow m=2$), el tanto real o efectivo $i^{(2)}$ es el interés producido por una unidad monetaria durante un semestre .... y si los intereses se capitalizan bianualmente ($\Leftrightarrow m=1/2$), el tanto real o efectivo $i^{(1/2)}$ es el interés producido por una unidad monetaria durante dos años.

Se dice que dos tipos de interés referidos a frecuencias de capitalización distintas son equivalentes si al final de la operación producen el mismo montante. Así, si "i" es el interés producido por una unidad monetaria en una unidad de tiempo y los intereses se capitalizan "m" veces en dicha unidad de tiempo, para que "i" e $i^{(m)}$ sean equivalentes debe suceder que:

$$1+i=(1+i^{(m)})^m$$



Por ejemplo, si la unidad de medida de tiempo es el año e $i \equiv i^{(1)} = 0'1$ es el interés producido por una unidad monetaria en un año (tanto real o efectivo anual), al capitalizar trimestralmente ($\Leftrightarrow m=4$), el tanto real o efectivo trimestral $i^{(4)}$ equivalente a $i=0'1$ se obtiene resolviendo la ecuación $1+0'1=(1+i^{(4)})^4$, es decir: $i^{(4)}=(1+0'1)^{1/4}-1=0'024113689$. Por tanto, con capitalización compuesta, capitalizar anualmente al 10% equivale a capitalizar trimestralmente al 2'4113689%.

Por ejemplo, si la unidad de medida de tiempo es el año e $i^{(12)}=0'01$ es el interés producido por una unidad monetaria en un mes (tanto real o efectivo mensual), el tanto real o efectivo anual "i" equivalente a $i^{(12)}=0'01$ se obtiene resolviendo la ecuación $1+i=(1+0'01)^{12}$, es decir $i=(1+0'01)^{12}-1=0'12682503$. Por tanto, con el sistema de capitalización compuesta, capitalizar mensualmente al 1% equivale a capitalizar anualmente al 12'682503.%.

Naturalmente, $i^{(m)}$ e $i^{(k)}$ son equivalentes si al final de la operación producen el mismo montante; o sea, si: $(1+i^{(m)})^m = (1+i^{(k)})^k$

Por ejemplo, si $i^{(12)} = 0'01$ es el interés producido por una unidad monetaria en un mes, el tanto efectivo $i^{(3)}$ de capitalización cuatrimestral equivalente a $i^{(12)} = 0'01$ se obtiene resolviendo la ecuación $(1+0'01)^{12} = (1+i^{(3)})^3$, es decir $i = (1+0'01)^{12/3} - 1 = 0'04060401$. Por tanto, con el sistema de capitalización compuesta, capitalizar mensualmente al 1% equivale a capitalizar cuatrimestralmente al 4'060401%.

Del producto $m.i^{(m)}$ se dice que es el **tanto nominal,** y se denota j_m.

Por ejemplo, si el tanto efectivo trimestral $i^{(4)}$ es 0'02, el correspondiente tanto nominal es $j_4 = 4.i^{(4)} = 0'08$. El tanto efectivo mensual $i^{(12)}$ que corresponde al tanto nominal $j_{12} = 0'18$ es $i^{(12)} = j_{12}/12 = 0'015$.

Como $j_m = m.i^{(m)}$ y $1+i = (1+i^{(m)})^m$, la relación entre "i" y j_m se obtiene trivialmente:

$$1+i = (1+i^{(m)})^m = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m \Rightarrow \begin{cases} i = \left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^m - 1 \\ j_m = m.\left((1+i)^{1/m} - 1\right) \end{cases}$$

$$\boxed{j_m = m.i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{j_m}{m}}$$

Por ejemplo, si se capitaliza trimestralmente al tanto nominal $j_4 = 0'08$, el tanto efectivo trimestral es $i^{(4)} = j_4/4 = 0'02$, y el tanto anual equivalente a $i^{(4)} = 0'02$ es la solución la ecuación $1+i = (1+0'02)^4$; o sea: $i = (1+0'02)^4 - 1 = 0'08243216$.

Por ejemplo, si se capitaliza semestralmente al tanto efectivo $i^{(2)} = 0'05$, el tanto nominal es $j_2 = 2.i^{(2)} = 0'1$, y el tanto anual equivalente es la solución de la ecuación $1+i = (1+0'05)^2$; o sea: $i = (1+0'05)^2 - 1 = 0'1025$.

Por ejemplo, si se capitaliza anualmente tanto efectivo $i = 0'11 \equiv i^{(1)}$, el tanto efectivo de capitalización trimestral equivalente $i^{(4)}$ es la solución de $1+0'11 = (1+i^{(4)})^4$; o sea: $i = (1+0'11)^{1/4} - 1 = 0'026433327$, y el tanto nominal j_4 correspondiente es $j_4 = 4.i^{(4)} = 4.0'026433327 = 0'105733309$.

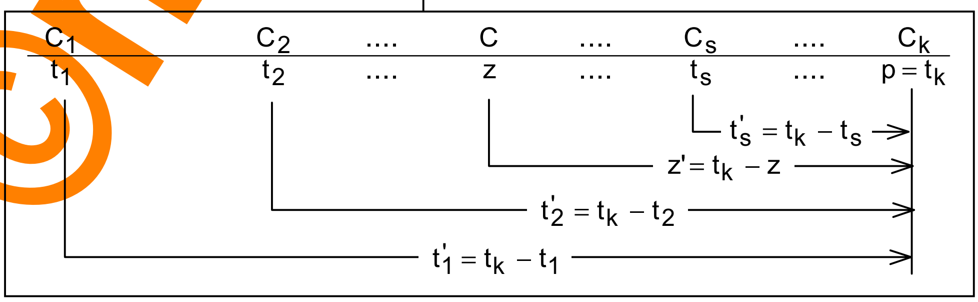
3.7 UNIFICACIÓN DE CAPITALES

Siendo $t_1 \le t_2 \le ... \le t_k$, a veces se plantea la necesidad de **sustituir un conjunto de capitales financieros** $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ... , $(C_k;t_k)$ por un **único capital** $(C;z)$ que, según la ley de capitalización compuesta, sea financieramente equivalente a los capitales que sustituye. De inmediato surge el problema de elegir el instante "p" de valoración de todos esos capitales, pero el problema desaparece al hacer caso al Banco de España, que establece que "p" debe ser el instante t_k. Siendo

$$p = t_k \;;\; t'_1 = t_k - t_1 \;;\; t'_2 = t_k - t_2 \;;\; t'_3 = p - t_k \;; ..... ;\; t'_k = p - t_k \;;\; z' = t_k - z$$

al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en el instante t_k coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ... ,$(C_k;t_k)$ en dicho instante t_k, resulta:

$$C.(1+i)^{z'} = \sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s} \qquad \text{(I)}$$



Vencimiento medio

Si **se desea** que $C=\sum_{s=1}^{k} C_s$, la ecuación (I) se convierte en:

$$\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right).(1+i)^{z'}=\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s}$$

Tomando neperianos:

$$\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right)+z'.\text{Ln}\,(1+i)=\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s}\right)$$

En consecuencia:

$$z'=\frac{\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s}\right)-\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right)}{\text{Ln}\,(1+i)}$$

Así, el vencimiento "z" del capital $C=\sum_{s=1}^{k} C_s$ que sustituye a los capitales $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ... ,$(C_k;t_k)$ es

$$z=t_k-z'=t_k-\frac{\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s}\right)-\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right)}{\text{Ln}\,(1+i)}$$

Vencimiento común

Si **no se desea** que $C=\sum_{s=1}^{k} C_s$, los valores de "C" y z' dependen uno de otro.

Si **se fija el valor de "C",** tomando neperianos en (I), resulta:

$$(\text{Ln}\,C)+z'.\text{Ln}\,(1+i)=\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s}\right)\Rightarrow z'=\frac{\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s}\right)-\text{Ln}\,C}{\text{Ln}\,(1+i)}\Rightarrow$$

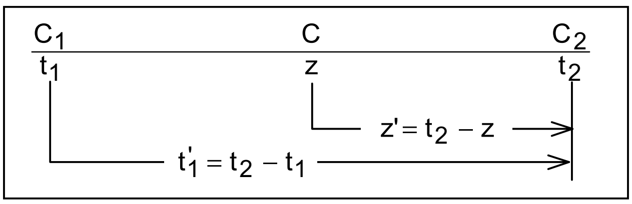
$$\Rightarrow z=t_k-z'=t_k-\frac{\text{Ln}\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s}\right)-\text{Ln}\,C}{\text{Ln}\,(1+i)}$$

Si **se fija el vencimiento "z"** ($\Leftrightarrow$ se fija el valor de $z'=t_k-z$), de (I) se deduce que $C=\dfrac{\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i)^{t'_s}}{(1+i)^{z'}}$.

3.8 SUSTITUCIÓN DE CAPITALES

A veces se plantea la necesidad de **sustituir un único capital financiero** $(C;z)$ **por un conjunto de capitales financieros** $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ... ,$(C_k;t_k)$ que, según la ley de capitalización compuesta, sea financieramente equivalente al capital $(C;z)$ que sustituye.

Si restringimos el problema al caso de dos capitales $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$, considerando que $t_1<t_2$ y que $C_1+C_2=C$, y siendo



$$p=t_2\ ;\ t'_1=t_2-t_1\ ;\ z'=t_2-z\ ;\ t'_2=p-t_2$$

al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en el instante t_2 coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$ en dicho instante t_2, resulta:

$$C.(1+i)^{z'}=C_1.(1+i)^{t'_1}+C_2.(1+i)^{t'_2}\Rightarrow C.(1+i)^{z'}=C_1.(1+i)^{t'_1}+C_2$$

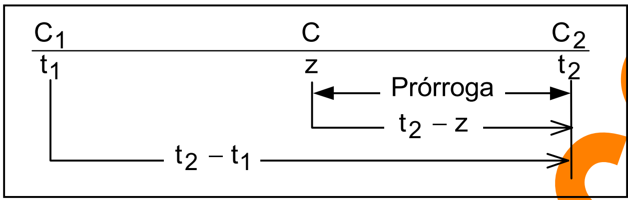
$$\boxed{\text{pues } t'_2=0}$$

Por tanto, los valores de C_1 y C_2 corresponden a la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} C.(1+i)^{z'} = C_1.(1+i)^{t'_1} + C_2 \\ C_1 + C_2 = C \end{matrix}\right\}$$

3.9 PRÓRROGA DE VENCIMIENTO

A veces, dado un capital financiero $(C;z)$, se plantea la necesidad de **anticipar** una cuantía C_1 al instante t_1, **prorrogando** la cuantía restante $C_2 = C - C_1$ hasta un instante t_2 posterior a "z".



Empleando capitalización compuesta, al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en el instante t_2 coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$ en t_2, resulta:

$$C_1.(1+i)^{t_2-t_1} + C_2.(1+i)^{t_2-t_2} = C.(1+i)^{t_2-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1.(1+i)^{t_2-t_1} + C_2 = C.(1+i)^{t_2-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ln}\left(C_1.(1+i)^{t_2-t_1} + C_2\right) = (\text{Ln } C) + (t_2 - z).\text{Ln }(1+i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Prórroga} \equiv (t_2 - z) = \frac{\text{Ln}\left(C_1.(1+i)^{t_2-t_1} + C_2\right) - \text{Ln } C}{\text{Ln }(1+i)}$$