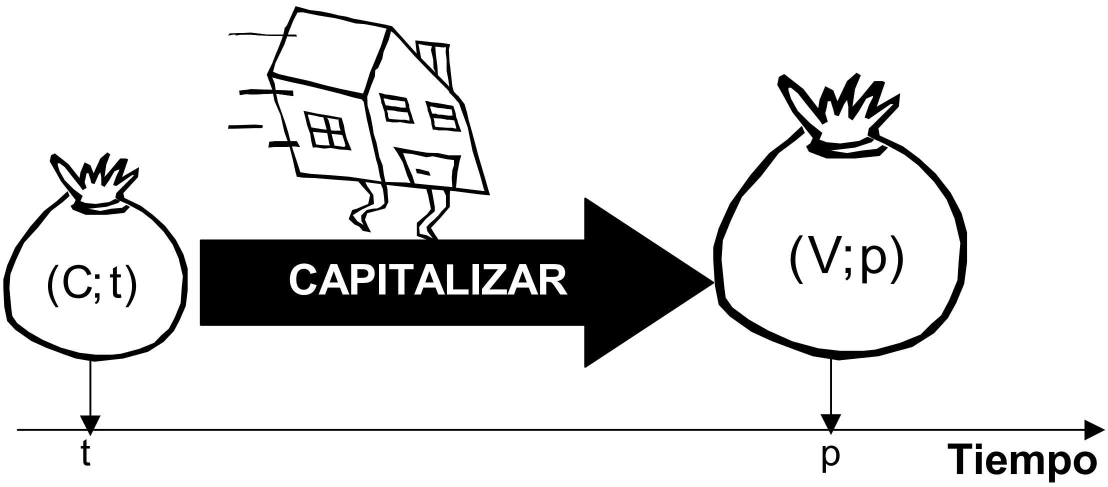
MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Tema 2

CAPITALIZACIÓN SIMPLE



$$V = C.(1+i.(p-t))$$

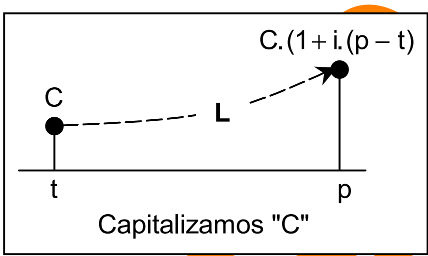
2.1 CAPITALIZACIÓN SIMPLE

Una operación financiera de capitalización es aquélla en que una persona (el acreedor) cede a otra persona (el deudor) un capital "C" durante un periodo de tiempo, y al final de dicho periodo, el deudor se compromete a devolver ese capital "C" más un capital adicional en concepto de precio o alquiler del capital recibido "C". Del capital adicional que se devuelve se dice que es el **interés.**

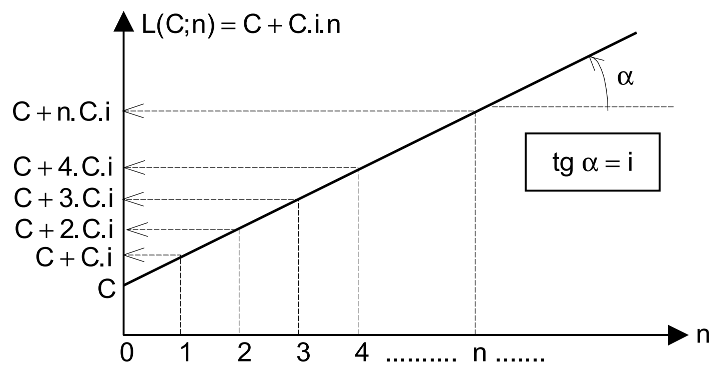
La ley financiera de capitalización simple prescribe que el interés generado en un intervalo cualquiera de tiempo es proporcional a la amplitud del intervalo y al capital "C", siendo el factor "i" de proporcionalidad el que expresa el interés producido por una unidad monetaria en una unidad de tiempo.

Así, la proyección financiera o montante $L(C;t;p)$ del capital $(C;t)$ en el punto de valoración "p" $(p > t)$ es

$$L(C;t;p) = C + \underbrace{C.i.(p-t)}_{\boxed{\text{Alquiler que se paga por disponer de la cuantía "C" desde el instante "t" hasta el "p"}}} = C.(1+i.(p-t))$$

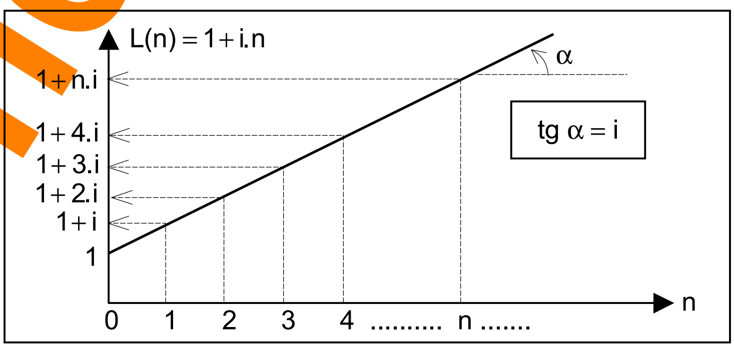


Denotando "n" a la amplitud "$p-t$" del intervalo $(t;p)$, podemos escribir $L(C;n) = C + C.i.n = C.(1+i.n)$, que es la cuantía del capital financiero equivalente o sustituto del capital $(C;t)$ en el instante de valoración situado "n" unidades de tiempo a la **derecha** de "t".



Como vemos, el interés producido por el capital "C" en cada periodo unitario de tiempo siempre es $C.i$; es decir, **el interés producido en cada periodo unitario de tiempo no produce intereses** (no se capitaliza) **en periodos posteriores.**

Si $C = 1$, es $L(1;t;p) \equiv L(t;p) = 1 + i.(p-t)$ ... y como el valor de $L(t;p)$ sólo depende de la amplitud "$p-t$" del intervalo $(t;p)$, si denotamos "n" dicha amplitud (o sea, $n \equiv p - t > 0$), podemos escribir $L(n) = 1 + i.n$, que es la cuantía del capital financiero equivalente o sustituto del capital $(1;t)$ en el instante de valoración situado "n" unidades de tiempo a la **derecha** de "t". De otro modo: $(1;0) \approx (1+i.n;n)$ ó $(C;0) \approx (C.(1+i.n);n)$.

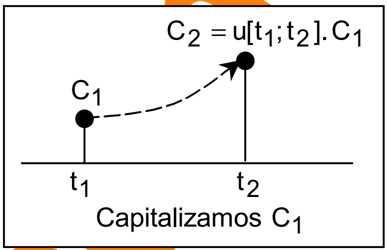


El sistema de capitalización simple se emplea normalmente en operaciones a corto plazo, aunque también puede emplearse a veces en operaciones a medio y largo plazo.

2.2 MAGNITUDES DERIVADAS

Los componentes "C" y "t" del capital financiero (C;t) se llaman magnitudes primarias o fundamentales, y cualquier otra magnitud obtenida como resultado de operaciones con las fundamentales se llama **magnitud derivada** (normalmente se obtendrán mediante relaciones de proporcionalidad entre capitales).

Factor de capitalización



El factor de capitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $u(t_1;t_2)$, y permite conocer el capital C_2 disponible en el instante t_2 si se conoce el capital C_1 disponible en el instante t_1.

$$u[t_1;t_2] = \frac{C_2}{C_1} = \frac{C_1.(1+i.(t_2-t_1))}{C_1} = 1+i.(t_2-t_1) > 1$$

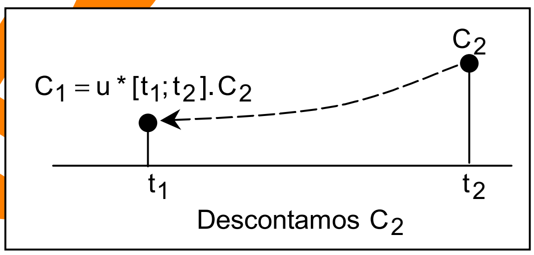
$$\boxed{C_2 = C_1.(1+i.(t_2-t_1))}$$

Por tanto, es $C_2 = u(t_1;t_2).C_1$. Observa que $u(t_1;t_2)$ es la cuantía obtenida al **retrasar** la disponibilidad o vencimiento de **una unidad monetaria** desde t_1 a t_2.

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta $u(n) = 1+i.n > 1$; y si $n = 1$ es $u(1) = 1+i$.

Factor de contracapitalización

El factor de contracapitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $u^*(t_1;t_2)$, y permite conocer el capital C_1 disponible en el instante t_1 si se conoce el capital C_2 disponible en el instante t_2. Naturalmente, $u^*(t_1;t_2)$ es el inverso de $u(t_1;t_2)$



$$0 < u^*(t_1;t_2) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{u(t_1;t_2)} = \frac{1}{1+i.(t_2-t_1)}$$

$$\boxed{u(t_1;t_2) = 1+i.(t_2-t_1)}$$

Por tanto, es $C_1 = u^*(t_1;t_2).C_2$. Observa que $u^*(t_1;t_2)$ es la cuantía obtenida al **adelantar** la disponibilidad o vencimiento de **una unidad monetaria** desde t_2 a t_1.

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, resulta $0 < u^*(n) = 1/(1+i.n) < 1$; y si $n = 1$ es $u^*(1) = 1/(1+i)$.

Rédito de capitalización

El rédito de capitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $i(t_1;t_2)$, y es el exceso sobre la unidad del factor de capitalización.

$$i(t_1;t_2) = u(t_1;t_2) - 1 = i.(t_2-t_1)$$

$$\boxed{u(t_1;t_2) = 1+i.(t_2-t_1)}$$

De otro modo: $i(t_1;t_2)$ es el aumento de capital por cada **unidad monetaria** que **retrase** su disponibilidad o vencimiento desde t_1 a t_2:

$$i(t_1;t_2) = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1} - 1 = \frac{C_1.(1+i.(t_2-t_1))}{C_1} - 1 = 1+i.(t_2-t_1) - 1 = i.(t_2-t_1) = u(t_1;t_2) - 1$$

$$\boxed{C_2 = C_1.(1+i.(t_2-t_1))} \qquad \boxed{u(t_1;t_2) = 1+i.(t_2-t_1)}$$

Haciendo $n \equiv t_2 - t_1$, como $u(n) = 1+i.n$, resulta ser $i(n) = u(n) - 1 = 1+i.n-1 = i.n$; y si $n = 1$ es $i(1) = i$.

Rédito de contracapitalización

El rédito de contracapitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $i^*(t_1;t_2)$, y es el complemento a la unidad del factor de contracapitalización.

$$i^*(t_1;t_2) = 1 - u^*(t_1;t_2) = 1 - \frac{1}{1+i.(t_2-t_1)} = \frac{i.(t_2-t_1)}{1+i.(t_2-t_1)}$$

$$\boxed{u^*(t_1;t_2) = 1/(1+i.(t_2-t_1))}$$

De otro modo: $i^*(t_1;t_2)$ es la disminución de capital por cada **unidad monetaria** que **adelante** su disponibilidad o vencimiento desde t_2 a t_1:

$$i^*(t_1;t_2)=\frac{C_2-C_1}{C_2}=1-\frac{C_1}{C_2}=1-\frac{C_1}{C_1.(1+i.(t_2-t_1))}=\frac{i.(t_2-t_1)}{1+i.(t_2-t_1)}=1-u^*(t_1;t_2)$$

$$\boxed{C_2=C_1.(1+i.(t_2-t_1))} \qquad \boxed{u^*(t_1;t_2)=\frac{1}{1+i.(t_2-t_1)}}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, como $u^*(n)=\frac{1}{1+i.n}$, resulta ser $i^*(n)=1-u^*(n)=1-\frac{1}{1+i.n}=\frac{i.n}{1+i.n}$.
Si $n=1$ es $i^*(1)=i/(1+i)$.

Tanto ordinario de capitalización

El tanto ordinario de capitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $\rho(t_1;t_2)$, y es el cociente entre el rédito de capitalización y la amplitud del intervalo; por tanto, expresa el aumento de capital por cada **unidad monetaria** y por cada **unidad de tiempo** al **retrasar** su disponibilidad o vencimiento desde t_1 a t_2:

$$\rho(t_1;t_2)=\frac{i(t_1;t_2)}{t_2-t_1}=\frac{i.(t_2-t_1)}{t_2-t_1}=i$$

$$\boxed{i(t_1;t_2)=i.(t_2-t_1)}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, resulta ser $\rho(n)=i$.

Tanto ordinario de contracapitalización

El tanto ordinario de contracapitalización del intervalo $(t_1;t_2)$ se denota $\rho^*(t_1;t_2)$, y es el cociente entre el rédito de contracapitalización y la amplitud del intervalo; por tanto, expresa la disminución de capital por cada **unidad monetaria** y por cada **unidad de tiempo** al **adelantar** su disponibilidad o vencimiento desde t_2 a t_1:

$$\rho^*(t_1;t_2)=\frac{i^*(t_1;t_2)}{t_2-t_1}=\frac{i}{1+i.(t_2-t_1)}$$

$$\boxed{i^*(t_1;t_2)=\frac{i.(t_2-t_1)}{1+i.(t_2-t_1)}}$$

Haciendo $n\equiv t_2-t_1$, resulta ser $\rho^*(n)=i/(1+i.n)$; y si $n=1$ es $\rho^*(1)=i/(1+i)$.

2.3 MONTANTE, VALOR ACTUAL, TIEMPO Y TANTO

Consideremos que:

$C_0\equiv$ Valor actual
$t_0\equiv$ Vencimiento del capital actual
$C_n\equiv$ Valor final o montante
$t_n\equiv$ Instante de valoración
$i\equiv$ Tanto de interés
$n=t_n-t_0$

Cálculo del montante

Empleamos el factor de capitalización $u(t_0;t_n)=1+i.(t_n-t_0)$:

$$C_n=C_0.u(t_0;t_n)=C_0.(1+i.(t_n-t_0))=C_0.(1+i.n)$$

Cálculo del valor actual

Empleamos el factor de contracapitalización $u^*(t_0;t_n)=\frac{1}{1+i.(t_n-t_0)}$:

$$C_0=C_n.u^*(t_0;t_n)=C_n.\frac{1}{1+i.(t_n-t_0)}=C_n.\frac{1}{1+i.n}=C_n.(1+i.n)^{-1}$$

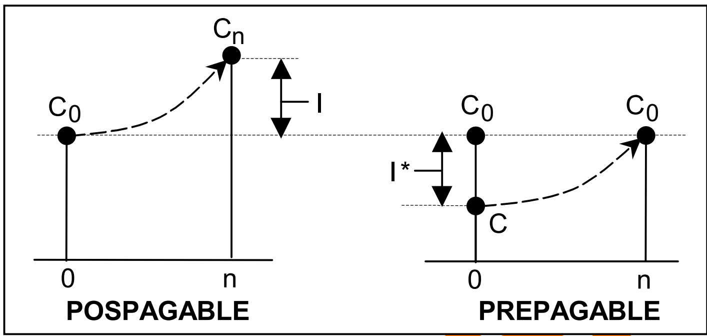
Cálculo del tiempo y el tanto

$$C_n=C_0.(1+i.n)\Rightarrow\begin{cases}n=\dfrac{C_n-C_0}{i.C_0}\\[2mm] i=\dfrac{C_n-C_0}{n.C_0}\end{cases}$$

2.4 CÁLCULO DE LOS INTERESES GENERADOS

Como sabemos, una **operación financiera de capitalización** consiste en que una persona (el acreedor) cede a otra persona (el deudor) un capital durante un periodo de tiempo, y al final de dicho periodo, el deudor se compromete a devolver ese capital más un capital adicional en concepto de precio o alquiler del capital recibido.

Del capital adicional que se devuelve se dice que es el **interés,** y su vencimiento puede ser al final de la operación (interés **pospagable** o aplazable "I"), al inicio de la misma (interés **prepagable** o anticipado I*) o en un instante cualquiera "p".



Interés pospagable

Siendo "i" el tanto de interés pospagable pactado, es:

$$I = C_n - C_0 = (C_0.(1+i.n)) - C_0 = C_0.i.n$$

Interés prepagable

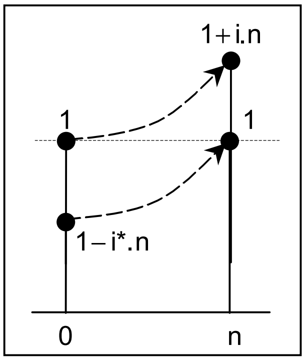
Siendo i^* el tanto de interés prepagable pactado, es $C = C_0.(1-i^*.n)$, o sea $(C_0.(1-i^*.n);0) \approx (C_0;n)$; por tanto:

$$I^* = C_0 - C = C_0 - (C_0.(1-i^*.n)) = C_0.i^*.n$$

Que quede claro: si $i = i^*$, la cuantía $C_0.i.n$ del interés pospagable coincide con la cuantía $C_0.i^*.n$ del prepagable, pero financieramente no son equivalentes, pues el vencimiento de $C_0.i.n$ es "n", y el de $C_0.i^*.n$ es "0"; por tanto, si $i = i^*$ es preferible el interés prepagable

Relación de equivalencia entre el tanto pospagable y el prepagable

Si queremos determinar la relación que debe existir entre "i" e i^* para que sea indiferente pactar intereses postagables o prepagables, podemos marear la perdiz de dos modos:



- Si el tanto pospagable es "i", los capitales $(1;0)$ y $(1+i.n;n)$ son equivalentes, y si i^* es el tanto prepagable, los capitales $(1+i.n;n)$ y $((1+i.n).(1-i^*.n);0)$ también son equivalentes; por tanto, si $(1;0) \approx (1+i.n;n) \approx ((1+i.n).(1-i^*.n);0)$, es $(1+i.n).(1-i^*.n) = 1$.
- Si el tanto prepagable es i^*, los capitales $(1;n)$ y $(1-i^*.n;0)$ son equivalentes, y si "i" es el tanto pospagable, los capitales $(1-i^*.n;0)$ y $((1-i^*.n).(1+i.n);1)$ también son equivalentes; por tanto, si $(1;n) \approx (1-i^*.n;0) \approx ((1-i^*.n).(1+i.n);n)$, es $(1-i.n^*).(1+i.n) = 1$.

Naturalmente:

$$(1+i.n).(1-i^*.n) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1+i.n = \dfrac{1}{1-i^*.n} \Rightarrow i = \left(\dfrac{1}{1-i^*.n} - 1\right).\dfrac{1}{n} = \dfrac{i^*.n}{1-i^*.n} \\ 1-i^*.n = \dfrac{1}{1+i.n} \Rightarrow i^* = \left(1 - \dfrac{1}{1+i.n}\right).\dfrac{1}{n} = \dfrac{i.n}{1+i.n} < i \end{cases}$$

2.5 EXPRESIONES REDUCIDAS DEL INTERÉS SIMPLE

Se emplean para calcular los intereses generados por un conjunto de capitales financieros, invertidos todos a un mismo tanto "i". Las emplearemos para la liquidación de cuentas corrientes, por lo que, normalmente el tiempo se expresará en días, **considerando el año natural si nos dan fechas concretas, y el año comercial si nos dan periodos de 30, 60, 90 días.**

Siendo $C_1, C_2, \dots, C_k$ los capitales invertidos y $t_1, t_2, \dots, t_k$ las respectivas duraciones, es:

$$I_T = \sum_{s=1}^{k} I_s = \sum_{s=1}^{k} C_s . i . \frac{t_s}{360/365} = \frac{i}{360/365} . \sum_{s=1}^{k} C_s . t_s = \frac{i}{360/365} . \sum_{s=1}^{k} N_s$$

$$\boxed{C_s . t_s \equiv N_s = \text{número comercial}}$$

Multiplicador fijo: haciendo $M = \dfrac{i}{360/365}$, es: $I_T = M . \sum_{s=1}^{k} N_s$.

Divisor fijo: haciendo $D = \dfrac{360/365}{i}$, es: $I_T = \dfrac{1}{D} . \sum_{s=1}^{k} N_s$.

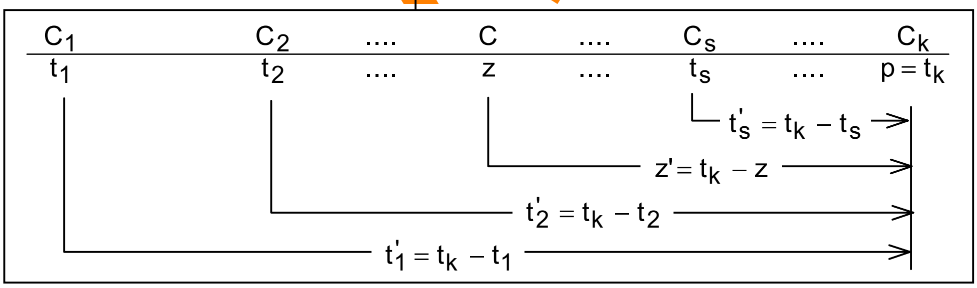
2.6 UNIFICACIÓN DE CAPITALES

Siendo $t_1 \le t_2 \le \dots \le t_k$, a veces se plantea la necesidad de **sustituir un conjunto de capitales financieros** $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ..., $(C_k;t_k)$ por un **único capital** $(C;z)$ que, según la ley de capitalización simple, sea equivalente a los capitales que sustituye. De inmediato surge el problema de elegir el instante "p" de valoración de todos esos capitales, pero el Banco de España establece que "p" debe ser el instante t_k. Así, si:

$$p = t_k \;\; ; \;\; t'_1 = t_k - t_1 \;\; ; \;\; t'_2 = t_k - t_2 \;\; ; \;\; t'_3 = p - t_k \;\; ; \;\; t'_k = p - t_k \;\; ; \;\; z' = t_k - z$$

al exigir que la proyección financiera de $(C;z)$ en el instante t_k coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ..., ..., $(C_k;t_k)$ en dicho instante t_k, resulta:

$$C.(1 + i.z') = \sum_{s=1}^{k} C_s .(1 + i.t'_s) \qquad \text{(I)}$$



Vencimiento medio

Si **se desea** que $C = \sum_{s=1}^{k} C_s$, la ecuación (I) se convierte en $\left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right).(1 + i.z') = \sum_{s=1}^{k} C_s .(1 + i.t'_s)$. Por tanto:

$$z' = \frac{\left(\sum_{s=1}^{k} C_s .(1 + i.t'_s)\right) - \left(\sum_{s=1}^{k} C_s\right)}{i.\sum_{s=1}^{k} C_s} = \frac{\sum_{s=1}^{k} C_s . t'_s}{\sum_{s=1}^{k} C_s} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \text{media aritmética de los vencimientos } t'_s \\ \text{ponderados con las cuantías de los capitales} \end{array} \right\}$$

Así, el **vencimiento "z"** del capital $C = \sum_{s=1}^{k} C_s$ que sustituye a los capitales $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ..., $(C_k;t_k)$ es

$$z = t_k - z' = t_k - \frac{\sum_{s=1}^{k} C_s . t'_s}{\sum_{s=1}^{k} C_s}$$

Como el valor de "z" no depende del tipo de interés "i", podemos expresar el tiempo en las unidades que queramos (días, meses, etc.)

Vencimiento común

Si **no se desea** que $C = \sum_{s=1}^{k} C_s$, los valores de "C" y z' dependen uno de otro.

Si **se fija el valor de "C",** de (I) se deduce que:

$$z' = \frac{\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i.t'_s)\right) - C}{i.C} \Rightarrow z = t_k - z' = t_k - \frac{\left(\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i.t'_s)\right) - C}{i.C}$$

Si **se fija el vencimiento "z"** ($\Leftrightarrow$ se fija el valor de valor de $z' = t_k - z$), de (I) se deduce que:

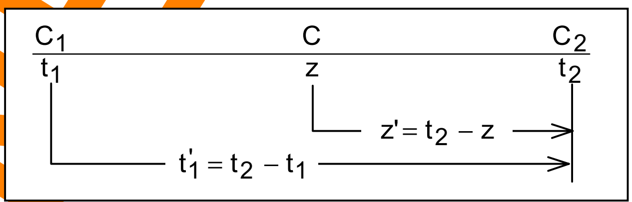
$$C = \frac{\sum_{s=1}^{k} C_s.(1+i.t'_s)}{1+i.z'}$$

2.7 SUSTITUCIÓN DE CAPITALES

A veces se plantea la necesidad de **sustituir un único capital financiero** (C;z) por un conjunto de capitales financieros $(C_1;t_1)$, $(C_2;t_2)$, ... ,$(C_k;t_k)$ que, según la ley de capitalización simple, sea financieramente equivalente al capital (C;z) que sustituye.

Si restringimos el problema al caso de dos capitales $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$, considerando que $t_1 < t_2$ y que $C_1 + C_2 = C$, y siendo

$$p = t_2 \;\; ; \;\; t'_1 = t_2 - t_1 \;\; ; \;\; z' = t_2 - z \;\; ; \;\; t'_2 = p - t_2$$



al exigir que la proyección financiera de (C;z) en el instante t_2 coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$ en dicho instante t_2, resulta:

$$C.(1+i.z') = C_1.(1+i.t'_1) + C_2.(1+i.t'_2) \Rightarrow C + C.i.z' = C_1 + C_1.i.t'_1 + C_2 + C_2.i.t'_2 \Rightarrow$$

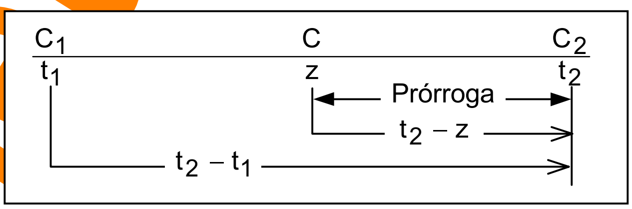
$$\Rightarrow C.i.z' = C_1.i.t'_1 + C_2.i.t'_2 \Rightarrow C.z' = C_1.t'_1 + C_2.t'_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{pues } t'_2 = p - t_2 = 0}$$

$$\Rightarrow C.z' = C_1.t'_1 \Rightarrow C_1 = \frac{C.z'}{t'_1} \Rightarrow C_2 = C - C_1 = C - \frac{C.z'}{t'_1} = \frac{C.(t'_1 - z')}{t'_1}$$

2.8 PRÓRROGA DE VENCIMIENTO

A veces, dado un capital financiero (C;z), se plantea la necesidad de **anticipar** una cuantía C_1 al instante t_1, **prorrogando** la cuantía restante $C_2 = C - C_1$ hasta un instante t_2 posterior a "z".



Al exigir que la proyección financiera de (C;z) en el instante t_2 coincida con la suma de las respectivas proyecciones financieras de $(C_1;t_1)$ y $(C_2;t_2)$ en dicho instante t_2, resulta:

$$C_1.(t_2 - t_1) + C_2.0 = C.(t_2 - z) \Rightarrow z = t_2 - \frac{C_1.(t_2 - t_1)}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Prórroga} \equiv (t_2 - z) = \frac{C_1.(t_2 - t_1)}{C}$$