OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN

Ejercicio 1

El banco de la Señorita Pepis te concede un préstamo de 6000 € a 10 años, al 6% anual y amortización por el sistema americano. Para hacer frente a la deuda, formas un fondo donde realizas imposiciones semestrales para conseguir el montante que extinga la deuda, a un interés del 5% nominal anual. Determínese la cuota de interés del sexto año del préstamo y la cuantía constante que hay que imponer en el fondo.

Solución

Si se amortiza por el sistema americano, durante los 9 primeros años sólo se pagan intereses, efectuándose la amortización total del préstamo el décimo año; por tanto: $A_1 = A_2 = ... = A_9 = 0$ y $A_{10} = 6000$. Si el tipo de interés es el 6% durante toda la operación, todas las cuotas de interés son iguales:

$$I_1 = I_2 = ... = I_{10} = 6000.0'06 = 360 \text{ €}$$

Los términos amortizativos de los 9 primeros periodos se componen únicamente de la cuota de interés:

$$a_1 = a_2 = ... = a_9 = 360 \text{ €} \; ; \; a_{10} = 360 + 6000 = 6360 \text{ €}$$

Al no amortizarse nada en los 9 primeros periodos, es:

$$C_1 = C_2 = ... = C_9 = 6000 \;\; ; \;\; C_{10} = 0$$

$$m_1 = m_2 = ... = m_9 = 0 \;\; ; \;\; m_{10} = 6000$$

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					6000
1	360	360	0	0	6000
2	360	360	0	0	6000
3	360	360	0	0	6000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	360	360	0	0	6000
10	6360	360	6000	6000	0

	360	360	360	360	360	360	360	360	360	6360
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	0

Si el tanto de valoración de los capitales del fondo es $i^{(2)} = j_2/2 = 0'05/2 = 0'025$ y "F" es la cuantía semestralmente ingresada en él, el valor final de esta renta constante de 20 semestres (10 años) es $F.s_{\overline{20}|0'025}$, que saldará la deuda si $F.s_{\overline{20}|0'025} = 6000$, o sea:

$$F = \frac{6000}{s_{\overline{20}|0'025}} = \frac{6000}{(1'025^{10} - 1)/0'025} = 234'88 \text{ €}$$

NOTA: en este ejercicio, la renta que se constituye para extinguir la deuda es constante, pero podría ser aritmética o geométrica .... y en tal caso podrían jugar a darte el primer término y pedirte la razón, o darte la razón y pedirte el primer término.

Por ejemplo, si la renta semestral es aritmética, siendo el primero término de $C_2 = 100$ € e incrementándose los sucesivos términos en d_2 euros respecto al anterior, para calcular la razón d_2 basta exigir que:

$$6000 = \left(100 + \frac{d_2}{0'025}\right).s_{\overline{20}|0'025} - \frac{20.d_2}{0'025}$$

$$\boxed{S(C_m\,;d_m)_{\overline{m.n}|i^{(m)}} = \left(C_m + \frac{d_m}{i^{(m)}}\right).s_{\overline{m.n}|i^{(m)}} - \frac{d_m.m.n}{i^{(m)}}}$$

Por ejemplo, si la renta semestral es aritmética, incrementándose los sucesivos términos en $d_2 = 3$ € respecto al anterior, para calcular el primer término C_2 basta exigir que:

$$6000 = \left(C_2 + \frac{3}{0'025}\right).s_{\overline{20}|0'025} - \frac{20.3}{0'025}$$

$$\boxed{S(C_m\,;d_m)_{\overline{m.n}|i^{(m)}} = \left(C_m + \frac{d_m}{i^{(m)}}\right).s_{\overline{m.n}|i^{(m)}} - \frac{d_m.m.n}{i^{(m)}}}$$

Por ejemplo, si la renta semestral es geométrica, siendo la razón semestral $q_2 = 1'025 = 1 + i^{(2)}$, para calcular el primer término C_2 basta exigir que:

$$6000 = 20.1'025^{19}.C_2$$

$$\boxed{S(C_m\,;q_m)_{\overline{m.n}|i^{(m)}} = C_m.m.n.\left(1+i^{(m)}\right)^{m.n-1}, \text{ si } q_m = 1 + i^{(m)}}$$

Ejercicio 2

Cuadro de amortización de 10000 € en 4 anualidades al 10%. Método francés.

Solución

1) Calculamos la cuantía "a" del término amortizativo constante, y para ello basta plantear la equivalencia de capitales en el instante inicial:

$$C_0 = a.a_{\overline{n|}i} \Rightarrow a = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}i}} = 3154'71 \text{ €}$$

	a	a	a	....	a
0	1	2	3	....	n
C_0					

$C_0 = 10000$; $n = 4$; $i = 0'1$

2) Calculamos la primera cuota de interés: $I_1 = C_0.i = 10000.0'1 = 1000$ €.

3) Calculamos a primera cuota de amortización: $A_1 = a - I_1 = 3154'71 - 1000 = 2154'71$ €.

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					10000
1	3154'71	1000	2154'71	2154'71	
2	3154'71				
3	3154'71				
4	3154'71				

4) Calculamos las restantes cuotas de amortización, que varían progresión geométrica de razón "1+i"; o sea: $A_s = A_{s-1}.(1+i) = A_1.(1+i)^{s-1}$. Por tanto:

$$A_2 = A_1.1'1 = 2370'18 \;\; ; \;\; A_3 = A_2.1'1 = 2607'20 \;\; ; \;\; A_4 = A_3.1'1 = 2867'19$$

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					10000
1	3154'71	1000	2154'71	2154'71	
2	3154'71		2370'18		
3	3154'71		2607'20		
4	3154'71		2867'19		

5) Calculamos las restantes cuotas de interés: $I_s = a - A_s$.

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					10000
1	3154'71	1000	2154'71	2154'71	
2	3154'71	784'53	2370'18		
3	3154'71	547'51	2607'20		
4	3154'71	287'52	2867'19		

6) Calculamos el capital amortizado: $m_s = m_{s-1} + A_s$.

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					10000
1	3154'71	1000	2154'71	2154'71	
2	3154'71	784'53	2370'18	4524'89	
3	3154'71	547'51	2607'20	7132'09	
4	3154'71	287'52	2867'19	10000	

7) Calculamos el capital pendiente de amortizar: $C_s = C_0 - m_s = C_{s-1} - A_s$

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					10000
1	3154'71	1000	2154'71	2154'71	7845'29
2	3154'71	784'53	2370'18	4524'89	5475'11
3	3154'71	547'51	2607'20	7132'09	2867'91
4	3154'71	287'52	2867'19	10000	0

Ejercicio 3

Se desean amortizar 90000 € en 12 años, abonando intereses anuales al 10'5%. Determínese:

1) La anualidad constante que amortiza el préstamo.
2) La descomposición de la octava anualidad en sus cuotas de interés y de amortización.
3) El capital pendiente después del sexto pago.
4) El capital amortizado al principio del quinto año.

Solución

1) Planteando la equivalencia de capitales en el instante inicial, se tiene que:

$$C_0 = a.a_{\overline{n}\rceil i} \Rightarrow a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}\rceil i}} = 13533'91\ €$$

	a	a	a	....	a
0	1	2	3	....	n
C_0					

$$\boxed{C_0 = 90000\ ;\ n = 12\ ;\ i = 0'105}$$

2) La primera cuota de interés es $I_1 = C_0.i = 90000.0'105 = 9450$ €; así, la primera cuota de amortización es $A_1 = a - I_1 = 13533'91 - 9450 = 4083'91$ €. Por tanto, según la ley de recurrencia de las cuotas de amortización $(A_s = A_1.(1+i)^{s-1})$, es $A_8 = A_1.(1+i)^7 = 4083'91.1'105 = 8215'09$ €, siendo:

$$I_8 = a - A_8 = 13533'91 - 8215'09 = 5318'82\ €$$

3) El capital vivo C_6 después del sexto pago, cuando aún deben pagarse 6 anualidades de cuantía "a", es $C_6 = a.a_{\overline{6}\rceil 0'105} = 13533'91.a_{\overline{6}\rceil 0'105} = 58089'97$ €

	a	a	a	a	a	a
6	7	8	9	10	11	12
C_6						

4) El total m_4 amortizado en los 4 primeros años es $m_4 = C_0 - C_4 = C_0 - a.a_{\overline{8}\rceil 0'105}$.

También así:

$$m_4 = \sum_{h=1}^{4} A_h = A_1 + 1'105.A_1 + 1'105^2.A_1 + 1'105^3.A_1 = A_1.\underbrace{\left(1 + 1'105 + 1'105^2 + 1'105^3\right)}_{s_{\overline{4}\rceil 0'105}} = A_1.s_{\overline{4}\rceil 0'105}$$

Ejercicio 4

Se desean amortizar 6500 € en 10 años, abonando intereses anuales al 5'5%. Si la amortización se realiza mediante términos constantes, determínese:

1) La cuantía de la anualidad constante que amortiza el préstamo.
2) El capital pendiente al principio del cuarto año.
3) El capital amortizado en los siete primeros años.
4) La cuota de amortización del sexto año.
5) La cuota de interés del octavo año.

Solución

1) Valorando los capitales en el instante inicial, se tiene que:

$$C_0 = a.a_{\overline{n}\rceil i} \Rightarrow a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}\rceil i}} = 862'34\ €$$

	a	a	a	....	a
0	1	2	3	....	n
C_0					

$$\boxed{C_0 = 6500\ ;\ n = 10\ ;\ i = 0'055}$$

2) El capital C_3 pendiente después del tercer pago, cuando aún faltan por pagar 7 anualidades de cuantía "a", es $C_3 = a.a_{\overline{7}\rceil 0'055} = 862'34.a_{\overline{7}\rceil 0'055} = 4900'65$ €

	a	a	a	a	a	a	a
3	4	5	6	7	8	9	10
C_3							

3) El total m_7 amortizado en los 7 primeros años es $m_7 = C_0 - C_7 = C_0 - a.a_{\overline{3}|0'055}$.

También así:

$$m_7 = \sum_{h=1}^{7} A_h = A_1 + 1'055.A_1 + 1'055^2.A_1 + \ldots + 1'055^6.A_1 =$$

$$= A_1.\underbrace{\left(1 + 1'055 + 1'055^2 + \ldots + 1'055^6\right)}_{s_{\overline{7}|0'055}} = A_1.s_{\overline{7}|0'055} \overset{\uparrow}{=} 504'84.s_{\overline{7}|0'055}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A_1 = a - I_1 \overset{\uparrow}{=} 862'34 - 357'5 = 504'84 \\ \boxed{I_1 = C_0.i = 6500.0'055 = 357'5} \end{array}}$$

4) Según la ley de recurrencia de las cuotas de amortización ($A_s = A_1.(1+i)^{s-1}$), es:

$$A_6 = A_1.(1 + 0'055)^5 = 504'84.1'055^5 = 659'81 \text{ €}$$

Por tanto, la sexta cuota de interés es $I_6 = a - A_6 = 862'34 - 659'81 = 202'53$ €.

5) Según la ley de recurrencia de las cuotas de amortización ($A_s = A_1.(1+i)^{s-1}$), es:

$$A_8 = A_1.(1 + 0'055)^7 = 504'84.1'055^7 = 734'38 \text{ €}$$

Por tanto, la octava cuota de interés es $I_8 = a - A_8 = 862'34 - 734'38 = 127'96$ €.

Ejercicio 5

Determínese el importe de un préstamo otorgado en las siguientes condiciones:

- Duración: 10 años
- Tipo de interés anual del 7% los 3 primeros años, el 8% los años 4 siguientes y el 10% los últimos 3 años.
- Término amortizativo constante de 700 € durante los 10 años.

Solución

Siendo C_0 el importe del préstamo, al plantear la equivalencia de capitales en el instante inicial, se tiene que:

$$C_0 = 700.a_{\overline{3}|0'07} + 700.a_{\overline{4}|0'08}.1'07^{-3} + 700.a_{\overline{3}|0'1}.1'08^{-4}.1'07^{-3}$$

C_0	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0'07				0'08				0'10	

Ejercicio 6

Determínese el término amortizativo constante de un préstamo en las siguientes condiciones:

- Capital prestado: 30000 €.
- Duración: 7 años
- Tipo de interés anual del 10% los 4 primeros años, y el 12% los últimos 3 años.

Solución

Siendo "a" el término amortizativo constante, al plantear la equivalencia de capitales en el instante inicial, se tiene que:

$$30000 = a.a_{\overline{4}|0'1} + a.a_{\overline{3}|0'12}.1'1^{-4} \Rightarrow a = \frac{30000}{a_{\overline{4}|0'1} + a_{\overline{3}|0'12}.1'1^{-4}} = 6236'55 \text{ €}$$

30000	a	a	a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7
		0'1			0'12		

Ejercicio 7

Hace dos años se concedió un préstamo al 6% de interés nominal anual que ha ido amortizando mediante semestralidades constantes de 656'49 €, siendo 3556'33 € la deuda viva en estos momentos. Determínese:

1) La duración del préstamo.
2) La cuantía del capital prestado.
3) Las cuantías de las cuotas de amortización y de interés de los tres primeros semestres.

Solución

1) Siendo $i^{(2)} = j_2/2 = 0'06/2 = 0'03$ y "n" la duración del préstamo (en semestres), exijamos que el capital C_4 vivo tras el cuarto pago sea 3556'33 €:

$$3556'33 = 656'49.\underbrace{\frac{1-1'03^{-(n-4)}}{0'03}}_{a_{\overline{n-4}|0'03}} \Rightarrow n-4=6 \Rightarrow n=10 \text{ semestres}$$

	656'49	656'49	656'49	656'49	656'49	....	656'49
0	1	2	3	4	5	....	n
C_0				$C_4 = 3556'33$			

2) Es $C_0 = a.a_{\overline{10}|0'03} = 656'49.a_{\overline{10}|0'03} = 5600$ €.

3) La primera cuota de interés es $I_1 = C_0.i = 5600.0'03 = 168$ €; así, la primera cuota de amortización es $A_1 = a - I_1 = 656'49 - 168 = 488'49$ €. Por tanto, según la ley de recurrencia de las cuotas de amortización $(A_s = A_1.(1+i)^{s-1})$, es:

$$A_2 = A_1.1'03 = 488'49.1'03 = 503'14 \text{ €} \; ; \; A_3 = A_1.1'03^2 = 488'49.1'03^2 = 518'24 \text{ €}$$

siendo:

$$I_2 = a - A_2 = 656'49 - 503'14 = 153'34 \text{ €} \; ; \; I_3 = a - A_3 = 656'49 - 518'24 = 138'25 \text{ €}$$

Ejercicio 8

De un préstamo amortizado por el método francés se sabe que $I_1 = 612$ €, $I_2 = 581'61$ € y $A_n = 871'21$ €. Determínese el capital prestado, la anualidad constante y el tipo de interés.

Solución

En general, conocidos I_{k-1}, I_k y la última cuota de amortización A_n, es:

$$I_k = I_{k-1} - A_{k-1}.i = I_{k-1} - (a - I_{k-1}).i =$$

$$= I_{k-1} - (A_n.(1+i) - I_{k-1}).i = I_{k-1} + (I_{k-1} - A_n).i - A_n.i^2$$

$$\boxed{a = A_n.(1+i)}$$

Por tanto:

$$I_2 = I_1 + (I_1 - A_n).i - A_n.i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 581'61 = 612 + (612 - 871'21).i - 871'21.i^2 \Rightarrow i = \begin{cases} -0'38 \Rightarrow \text{pasar} \\ 0'09 \end{cases}$$

Es $C_0 = I_1/i = 612/0'09 = 6800$ € y $a = A_n.(1+i) = 871'21.1'09 = 949'62$ €.

Ejercicio 9

De un préstamo amortizado por el método francés se conocen los siguientes datos:

$$I_1 = 700\ € \ ;\ I_2 = 656'02\ € \ ;\ A_n = 1504'34\ €$$

Determínese el capital prestado, la anualidad constante y el tipo de interés.

Solución

En general, conocidos I_{k-1}, I_k y la última cuota de amortización A_n, es:

$$I_k = I_{k-1} - A_{k-1}.i = I_{k-1} - (a - I_{k-1}).i =$$

$$= I_{k-1} - (A_n.(1+i) - I_{k-1}).i = I_{k-1} + (I_{k-1} - A_n).i - A_n.i^2$$

$$\boxed{a = A_n.(1+i)}$$

Por tanto:

$$I_2 = I_1 + (I_1 - A_n).i - A_n.i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 656'02 = 700 + (700 - 1504'34).i - 1504'34.i^2 \Rightarrow i = \begin{cases} -0'58 \Rightarrow \text{pasar} \\ 0'05 \end{cases}$$

Es $C_0 = I_1/i = 700/0'05 = 14000$ € y $a = A_n.(1+i) = 1504'34.1'05 = 1579'56$ €.

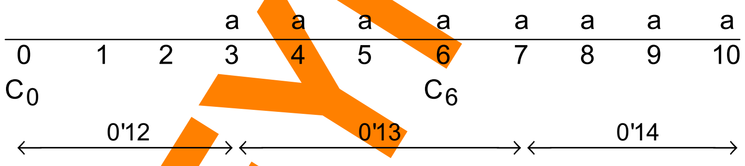
Ejercicio 10

Se ha concedido un préstamo e las siguientes condiciones:

- Duración: 10 años
- Tanto anual del 12% los 3 primeros años, del 13% los 4 años siguientes y del 14% los 3 últimos años.
- Amortización con anualidades constantes, con dos años de carencia en cuota de amortización e intereses.

Determínese el principal del préstamo sabiendo que el capital pendiente de amortizar después de pagar la anualidad correspondiente al sexto año es de 7650'04 €

Solución



La anualidad constante "a" se determina al exigir que el capital C_6 vivo tras pagar la anualidad del sexto año, cuando aún faltan cuatro anualidades de cuantía "a" por pagar, sea 7650'04 €:

$$7650'04 = a.1'13^{-1} + a.a_{\overline{3}|0'14}.1'13^{-1} \Rightarrow a = 2602'49\ €$$

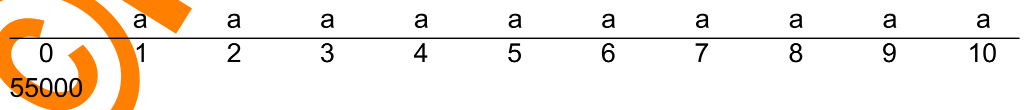
El principal C_0 del préstamo es $C_0 = a.1'12^{-3} + a.a_{\overline{4}|0'13}.1'12^{-3} + a.a_{\overline{3}|0'14}.1'13^{-4}.1'12^{-3} = 9999'94$ €

Ejercicio 11

Un banco concede un préstamo de 55000 €, al 9% de interés anual, para ser amortizado mediante en diez anualidades constantes. Llegado el vencimiento de la quinta anualidad, para rebajar la deuda, el prestatario propone la entrega de 10000 € además del importe anual correspondiente al vencimiento, y para que el préstamo quede cancelado antes de lo previsto, propone que las cantidades anuales que viene entregando sigan siendo las mismas. Determínese la cantidad con que se cancela el préstamo y la fecha de entrega.

Solución

La operación pactada inicialmente es la siguiente:



Planteando la equivalencia de capitales en el instante inicial, se tiene que:

$$55000 = a.a_{\overline{10}|0'09} \Rightarrow a = \frac{55000}{a_{\overline{10}|0'09}} = 8570'1\ €$$

El capital vivo C_5 al inicio de la sexta anualidad, cuando aún faltan por pagar 5 anualidades de cuantía "a", es $C_5 = 8570'1 . a_{\overline{5|}0'09} = 33334'7$ €, que queda reducido a $C'_5 = 33334'7 - 10000 = 23334'7$ € si el prestatario entrega 10000 € con la quinta anualidad:

	8570'1	8570'1	....	8570'1
5	5 + 1	5 + 2	....	5 + x
23334'7				

Debe ser: $$23334'7 = 8570'1 . a_{\overline{x|}0'09} \Rightarrow 23334'7 = 8570'1 . \frac{1 - 1'09^{-x}}{0'09} \Rightarrow x = 3'23 \approx 4 \text{ años}$$

Por tanto, las anualidades sexta, séptima y octava serán de 8570'1 €, y la novena y última será la cuantía a' que equilibra el pacto:

$$23334'7 = 8570'1 . a_{\overline{3|}0'09} + a' . 1'09^{-4} \Rightarrow a' = 2316'76 \text{ €}$$

	8570'1	8570'1	8570'1	a'
5	6	7	8	9
23334'7				

Ejercicio 12

De un préstamo a 25 años amortizado por el método francés se conocen los siguientes datos:

$$A_7 = 13023'91 \text{ €} ; \; A_{10} = 16406'37 \text{ €}$$

Determínese la anualidad constante que lo amortiza. Si al final del quinceavo año de vida del préstamo, junto con el término amortizativo correspondiente, se hace una amortización parcial de 60.000 €, determínese el importe de la nueva anualidad que amortiza la nueva deuda viva.

Solución

	a	a	a	a	a	a	a	a	....	a
0	1	2	3	4	5	6	7	8	....	25
C_0										

Según la ley de recurrencia de las cuotas de amortización ($A_{s+1} = A_s . (1+i)$), es:

$$A_{10} = A_7 . (1+i)^3 \Rightarrow i = 0'08$$

La última cuota de amortización es $A_{25} = A_{10} . (1+i)^{15} = 16406'37 . 1'08^{15} = 52043'78$ €, por lo que

$$a = A_{25} . (1+i) = 52043'78 . 1'08 = 56207'28$$

También así: como $A_7 = A_1 . (1+i)^6$, es $A_1 = 8207'27$ €, por lo que $C_0 = A_1 . s_{\overline{25|}0'08} = 600000'19$ €, siendo:

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{25|}0'08}} = 56207'28 \text{ €}$$

El capital C_{15} vivo al inicio de la decimosexta anualidad, cuando aún faltan por pagar 10 anualidades de cuantía "a", es $C_{15} = a . a_{\overline{10|}0'08} = 377155'42$ €, que se reduce a $C'_{15} = 377155'42 - 60000 = 317155'42$ € si el prestatario entrega 60000 € con la decimoquinta anualidad. Así, debe ser:

$$317155'42 = a' . a_{\overline{10|}0'08} \Rightarrow a' = 47265'51 \text{ €}$$

	a'	a'	....	a'
15	16	17	....	25
317155'42				

Ejercicio 13

De un préstamo amortizado por el método francés se conocen los siguientes datos:

- Tipo de interés anual: 7%
- Última cuota de amortización: $A_n = 33891'48$ €.
- Capital amortizado durante los 15 primeros años: 119711'65 €.
- Capital pendiente de amortizar al inicio del undécimo año: 384180'1 €

Determínese la anualidad constante, el capital prestado y la duración de la operación.

Si al final del vigésimo año de vida del préstamo, junto con el término amortizativo correspondiente, se hace una amortización parcial de 120.000 €, determínese el importe de la nueva anualidad que amortiza la nueva deuda viva.

Solución

	a	a	a	a	a	a	a	a	....	a
0	1	2	3	4	5	6	7	8	....	n
C_0										

Es $a = A_n.(1+i) = 33891'48.1'07 = 36263'88$ €

Es $m_{15} = 119711'65 = A_1.\left(1+1'07+1'07^2+...+1'07^{14}\right) = A_1.s_{\overline{15|}0'07}$, por lo que $A_1 = 4763'88$ €.

Como $A_n = A_1.(1+i)^{n-1}$, ha de ser $33891'48 = 4763'88.1'07^{-n}$, lo que sucede cuando $n = 30$.

Es $C_0 = a.a_{\overline{n|}i} = 36263'88.a_{\overline{30|}0'07} = 450000$ €

El capital C_{20} vivo al inicio del año 21, cuando aún faltan por pagar 10 anualidades de cuantía $a = 36263'88$ es $C_{20} = 36263'88.a_{\overline{10|}0'07} = 254702'32$ €, que se reduce a $C'_{20} = 254702'32 - 120000 = 134702'32$ € si el prestatario entrega 120000 € con la vigésima anualidad. Así, debe ser:

$$134702'32 = a'.a_{\overline{10|}0'07} \Rightarrow a' = 19178'58 \text{ €}$$

	a'	a'	....	a'
20	21	22	....	30
134702'32				

Ejercicio 14

En el balance de una empresa aparece contabilizado un préstamo concedido hace 8 años, para ser amortizado por el método francés. Se sabe que:

- Tipo de interés anual del 8%.
- Capital amortizado en estos momentos: 35256'8 €.
- Duración: 15 años.

1) Determínense los elementos del cuadro de amortización correspondientes al final del octavo año.
2) Si hoy se cambia el tipo de interés, pasando a ser del 6% anual, €, determínese el importe de la nueva anualidad que amortiza la deuda viva.

Solución

1) Es $m_8 = 35256'8 = A_1.\left(1+1'08+1'08^2+...+1'08^7\right) = A_1.s_{\overline{8|}0'08}$, por lo que $A_1 = 3314'66$ €.

   Es $C_0 = A_1.\left(1+1'08+1'08^2+...+1'08^{14}\right) = A_1.s_{\overline{15|}0'08} = 3314'66.s_{\overline{15|}0'08} = 90000$ €.

   Es $a = C_0/a_{\overline{15|}0'08} = 90000/a_{\overline{15|}0'08} = 10514'66$ €.

   Es $A_8 = A_1.1'08^7 = 3314'66.1'08^7 = 5680'74$ €.

   Es $I_8 = a - A_8 = 10514'66 - 5680'74 = 4833'91$ €.

   Es $C_8 = C_0 - m_8 = 90000 - 35256'8 = 54743'2$ €.

2) La anualidad a' pedida ha de ser tal que $C_8 = 54743'2 = a'.a_{\overline{7|}0'06} \Rightarrow a' = 9806'42$ €.

Ejercicio 15

Hace 4 años se solicitó un préstamo hipotecario del que conocemos:

- Capital prestado: 50000 €. Duración: 7 años.
- Tipo de interés: 8% anual los tres primeros años y 7% anual los cuatro últimos años.
- Amortización mediante anualidades constantes, con un año de carencia en cuota de amortización y de interés.

Hoy, inicio del quinto año, se solicita al banco una bajada del tipo de interés, que pasa a ser del 6% anual.

1) Determínese la anualidad constante pagada durante los cuatro primeros años.
2) Determínese la cuantía de la deuda viva en este momento.
3) Determínese la nueva anualidad constante que debe pagarse a partir de este momento.

Solución

1) Planteando la equivalencia de capitales al final del primer año, cuando debido a la carencia de un año en cuota de amortización y de interés, la deuda viva es $50000.1'08 = 54000$ €, ha de ser:

$$54000 = a.a_{\overline{2}|0'08} + a.a_{\overline{4}|0'07}.1'08^{-2} \Rightarrow a = 11520'61$$

		a	a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7
	0'08				0'07		

2) El capital C_4 vivo al inicio del quinto año, cuando aún deben pagarse 3 anualidades de cuantía "a", es $C_4 = a.a_{\overline{3}|0'07} = 30233'72$ €

3) La anualidad a' pedida ha de ser tal que $C_4 = 30233'72 = a'.a_{\overline{3}|0'06} \Rightarrow a' = 11310'73$ €.

Ejercicio 16

Se concede un préstamo de 6000 €, con una duración de 10 años al 7% anual y amortización por anualidades constantes, recibiéndose la primera a los tres años de concertada la operación. El prestatario tiene gastos iniciales de 60 € y el sistema impositivo detrae el 1% de las anualidades. Obténganse los tantos efectivos del prestamista y del prestatario. Si el préstamo se rescinde después de vencido el sexto pago y eso ocasiona una penalización del 0'5% de la deuda pendiente, determínese el tanto de coste para el prestatario.

Solución

La operación es la siguiente:

			a	a	a	a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6000										0

Al plantear la equivalencia de capitales en el origen, resulta $6000 = a.a_{\overline{8}|0'07}.1'07^{-2}$; así: $a = 1150'4$ €.

Tanto efectivo del prestatario: $6000 - 60 = a.a_{\overline{8}|i_p}.(1+i_p)^{-2}$

Tanto efectivo del prestamista

Como de impuestos paga un 1% de las cantidades recibidas, todas deben multiplicarse por 0'99; o sea:

$$6000 = a.a_{\overline{8}|i_a}.(1+i_a)^{-2}.0'99$$

Cancelación anticipada: el capital vivo C_8 al inicio del noveno año, cuando faltan por pagar 2 anualidades de cuantía "a", es $C_8 = a.a_{\overline{2}|0'07} = 2079'94$ €.

			a	a	a	a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_0								C_8		0

Si la comisión por cancelación es $C_8.0'005 = 2079'94.0'005 = 10'4$ €, la ecuación de tanto efectivo para el prestatario resulta ser:

$$6000 - 60 = a.a_{\overline{6}|i_p}.(1+i_p)^{-2} + \underbrace{(2079'94 + 10'4)}_{C_8.(1+0'005)}.(1+i_p)^{-8}$$

Ejercicio 17

Hace tres años se concedió un préstamo hipotecario de 60000 €, para amortizarlo en 8 años mediante mensualidades constantes, al 4'8% de interés nominal anual. Hoy, al inicio del cuarto año, el tipo pasa a ser del 3'9% nominal anual. Determínese el importe de la mensualidad constante que amortiza el préstamo, el capital vivo en este momento y la nueva la mensualidad constante a pagar a partir de hoy. Si se mantiene la mensualidad inicial, calcúlese el número de mensualidades que quedarán y el importe de la última.

Solución

- Siendo $i^{(12)} = j_{12}/12 = 0'048/12 = 0'004$, como $C_0 = 60000 = a.a_{\overline{96}|0'004}$, es $a = 753'9$€.
- El capital vivo C_3 al inicio de cuarto año, cuando aún deben pagarse 60 mensualidades de $a = 753'9$ € es $C_3 = 753'9.a_{\overline{60}|0'004} = 40144'32$ €.
- Si al inicio del cuarto año pasa a ser $i^{(12)} = 0'039/12 = 0'00325$, la nueva la mensualidad constante a' que debe pagarse ha de ser tal que $C_3 = 40144'32 = a'.a_{\overline{60}|0'00325}$, y sucede tal cosa si $a' = 737'51$ €.
- Si se mantiene la mensualidad $a = 753'9$ €, el número "x" de meses que aún deben pagarse ha de ser tal que $C_3 = 40144'32 = 753'9.a_{\overline{x}|0'00325} \Rightarrow x = 58'563$. Así, deben pagarse 58 mensualidades de 753'9 €, y una última de cuantía a'' tal que $C_3 = 40144'32 = a.a_{\overline{58}|0'00325} + a''.1'00325^{-59} \Rightarrow a'' = 424'88$ €.

Ejercicio 18

Hace tres años se concedió un hipotecario de 50000 €, para amortizarlo en 8 años mediante mensualidades constantes, al 4'5% de interés nominal anual. Hoy, al inicio del cuarto año, se propone al banco la renegociación de la deuda, de modo que durante los próximos tres años se abonarán semestralidades constantes capaces de amortizar 3/5 de la deuda viva en estos momentos, y durante los dos últimos años se abonarán semestralidades constantes que extingan la deuda. El banco acepta el cambio, pero el tipo de interés pasará a ser el 5% anual con capitalización semestral los dos próximos años, y el 6% anual con capitalización semestral años siguientes. Determínese el importe de la mensualidad constante que amortiza el préstamo, el capital vivo antes de la reestructuración y el importe de los nuevos términos amortizativos pactados.

Solución

- Siendo $i^{(12)} = j_{12}/12 = 0'045/12 = 0'00375$, como $C_0 = 50000 = a.a_{\overline{96}|0'00375}$, es $a = 621'16$€.
- El capital vivo C_3 al inicio de cuarto año, cuando aún deben pagarse 60 mensualidades de $a = 621'16$ € es $C_3 = 621'16.a_{\overline{60}|0'00375} = 33318'64$ €. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "3'5", "4", "4'5", "5", "5'5" y "6" logra que $C_6 = 2.C_3/5 = 13227'46$€ es $a' = 3991'95$ €, pues valorando capitales en el instante "7", ha de ser:

$$C_3.1'025^4.1'03^2 = a'.\left(s_{\overline{4}|0'025}.1'03^2 + s_{\overline{2}|0'03}\right) + \frac{2.C_3}{5} \Rightarrow a' = 3991'95 \text{ €}$$

	a'	a'	a'	a'	a'	a'
3	3'5	4	4'5	5	5'5	6
33318'64						13227'46

$i^{(2)} = 0'025$ (de 3 a 5) $\quad i^{(2)} = 0'03$ (de 5 a 6)

- Siendo $C_6 = 2.C_3/5 = 13227'46$€ el capital vivo al inicio del séptimo año, la cuantía a'' que pagada en los instantes "6'5", "7", "7'5" y "8" logra cancelar la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "6"; o sea: $13227'46 = a''.a_{\overline{4}|0'03} \Rightarrow a'' = 3585'45$ €.

	a''	a''	a''	a''
6	6'5	7	7'5	8
13227'46				0

$i^{(2)} = 0'03$

Ejercicio 19

En el balance de una empresa aparece un préstamo concedido hace 4 años en las siguientes condiciones:

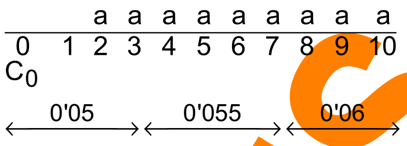
- Duración 10 años.
- Tipo de interés: 5% anual los 3 primeros años, 5'5% anual los 4 años siguientes y 6% anual los 3 últimos.
- Amortización mediante el método francés, con un año de carencia en cuota de amortización y de interés.
- Término amortizativo anual de 9046'49 €

Hoy, al inicio del quinto año, se propone al banco la renegociación de la deuda, basada en que el tipo de interés pasará a ser el 5% anual en los tres próximos años, el 4'5% anual los dos años siguientes, y el 6% nominal anual el último año. El banco acepta la reestructuración, pero exigiendo que:

- Durante los próximos tres años se pague una anualidad constante capaz de amortizar 3/5 de la deuda viva en estos momentos.
- Durante los años octavo y noveno se paguen anualidades constantes que permitan amortizar 2/3 del capital vivo al inicio del octavo año.
- Durante el último año se entregarán semestralidades constantes que extingan la deuda.

Determínese el capital prestado y los distintos términos amortizativos a partir de la reestructuración.

Solución



- Si a = 9046'49 €, valorando capitales en el instante "1", cuando debido al año de carencia en cuota de amortización y de interés el capital vivo es $1'05.C_0$, ha de ser:

$$1'05.C_0 = 9046'49.\left(a_{\overline{3|}0'05} + a_{\overline{4|}0'055}.1'05^{-2} + a_{\overline{3|}0'06}.1'055^{-4}.1'05^{-2}\right) \Rightarrow C_0 = 60273'59€$$

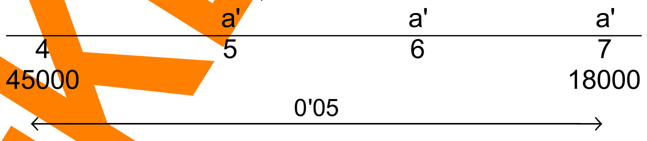
- El capital vivo C_4 al inicio de quinto año, calculado mediante el método retrospectivo, es:

$$C_4 = \underbrace{C_0.1'05^3.1'055}_{\text{Prestación}} - \underbrace{a.\left(s_{\overline{2|}0'05}.1'055+1\right)}_{\text{Contraprestación}} = 45000\ €$$

Si para calcular C_4 se emplea el método prospectivo, es $C_4 = \underbrace{a.\left(a_{\overline{3|}0'055} + a_{\overline{3|}0'06}.1'055^{-2}\right)}_{\text{Contraprestación}} = 45000$ €.

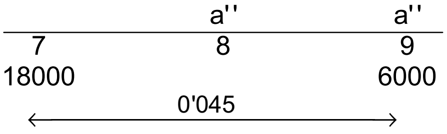
La cuantía a' que pagada en los instantes "5", "6" y "7" logra que el capital vivo al final del séptimo año sea $2.C_4/5 = 18000€$ es a' = 10814'63 €, pues valorando capitales en el instante "7", ha de ser:

$$45000.1'05^3 = a'.s_{\overline{3|}0'05} + 18000 \Rightarrow a' = 10814'63\ €$$

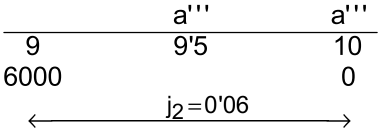


- Como $C_7 = 18000$ €, la cuantía a'' que pagada en los instantes "8" y "9" logra que el capital vivo al final del noveno año sea $C_7/3 = 6000€$ es a'' = 6677'97 €, pues valorando capitales en el instante "9", es:

$$18000.1'045^2 = a''.s_{\overline{2|}0'045} + 6000 \Rightarrow a'' = 6677'97€$$



- Siendo $C_9 = C_7/3 = 6000$ € el capital vivo al inicio del décimo año, la cuantía a''' que pagada en los instantes "9'5" y "10" cancela la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "9"; o sea: $6000 = a'''.a_{\overline{2|}0'03} \Rightarrow a''' = 3135'66€$.



Ejercicio 20

Hace tres años nos concedieron un hipotecario de 75000 € a 10 años, para amortizarlo mediante mensualidades constantes, al 6% nominal anual. Hoy, inicio del cuarto año, solicitamos la reestructuración de las condiciones del préstamo, que se basa en:

- La deuda pendiente se amortizará en cinco años.
- Durante los próximos tres años se abonarán anualidades constantes que amorticen tres cuartas partes de la deuda pendiente en este momento.
- Durante los dos últimos años se abonarán semestralidades constantes que extingan la deuda.

El banco acepta, pero exigiendo el 6'5% anual para los dos próximos años, y el 7% nominal anual con capitalización semestral para los tres años siguientes.

1) Determínense los distintos términos amortizativos.
2) Si hoy, inicio del cuarto año, se entregan 10000 € para rebajar la deuda y no se solicita la reestructuración del préstamo, determínese la nueva mensualidad que debe pagarse.

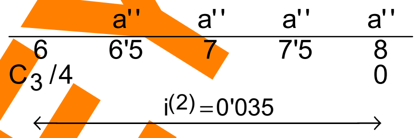
Solución

1) Siendo $i^{(12)} = j_{12}/12 = 0'005$, ha de ser $75000 = a.a_{\overline{120}|0'005} \Rightarrow a = \dfrac{75000}{a_{\overline{120}|0'005}}$.

- El capital vivo C_3 al inicio de cuarto año, cuando aún deben pagarse 84 mensualidades de cuantía "a" es $C_3 = a.a_{\overline{84}|0'005}$. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "4", "5" y "6" logra que el capital vivo al final del sexto año sea $C_3/4$ es la solución de la ecuación de equivalencia financiera en el instante "6":

$$C_3.1'065^2.1'071225 = a'.s_{\overline{2}|0'065}.1'071225 + a' + \frac{C_3}{4}$$

- Siendo $C_6 = C_3/4$ el capital vivo al inicio del séptimo año, la cuantía a'' que pagada en los instantes "6'5", "7", "7'5" y "8" logra cancelar la deuda es la solución de la ecuación $C_3/4 = a''.a_{\overline{4}|0'035}$ de equivalencia en el instante "6".



2) Si al inicio del cuarto año se entregan 10000 € para rebajar la deuda, el nuevo capital vivo es $C_3 - 10000$, que debe amortizarse con 84 mensualidades de cuantía a^* al 6% nominal anual ($\Rightarrow i^{(12)} = 0'05$); así, ha de ser $C_3 - 10000 = a^*.a_{\overline{84}|0'005}$.

Ejercicio 21

De un préstamo amortizado en 5 años por el método francés se sabe que $I_4 = 95'98$ €, $I_2 = 183'87$ € y $A_3 = 998'07$€. Determínese el capital prestado, la anualidad constante y el tipo de interés.

Solución

$$\left.\begin{cases} a = I_2 + A_2 \\ a = I_4 + A_4 \end{cases}\right\} \Rightarrow I_2 + A_2 = I_4 + A_4 \Rightarrow I_2 + A_3.(1+i)^{-1} = I_4 + A_3.(1+i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2.(1+i) + A_3 = I_4.(1+i) + A_3.(1+i)^2 \Rightarrow i = 0'045 \Rightarrow$$

$$\boxed{I_4 = 95'98 \;\;;\;\; I_2 = 183'87 \;\;;\;\; A_3 = 998'07}$$

$$\Rightarrow a = I_4 + A_3.(1+i) = 1138'96 \Rightarrow C_0 = 1138'96.a_{\overline{5}|0'045} = 5000$$

Ejercicio 22

En el balance de una empresa aparece un préstamo concedido hace 4 años en las siguientes condiciones:

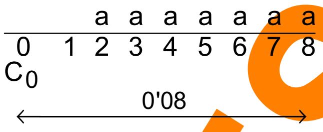
- Duración 8 años.
- Tipo de interés: 8% anual.
- Amortización mediante el método francés, con un año de carencia en cuota de amortización y de interés.
- Término amortizativo anual de 12446'29 €

Hoy, al inicio del quinto año, se propone al banco la renegociación de la deuda, ampliando dos años la duración del préstamo, y el tipo de interés pasará a ser el 7% anual los dos próximos años, el 6% anual los dos años siguientes, y el 4% nominal anual con capitalización semestral los dos últimos años. El banco acepta la reestructuración, pero exigiendo que:

- Durante los próximos tres años se pague una anualidad constante capaz de amortizar 3/5 de la deuda viva en estos momentos.
- Durante los años octavo y noveno se paguen anualidades constantes que permitan amortizar 2/3 del capital vivo al inicio del octavo año.
- Durante el último año se entregarán semestralidades constantes que extingan la deuda.

Determínese el capital prestado y los distintos términos amortizativos a partir de la reestructuración.

Solución

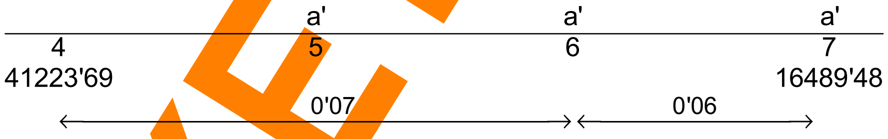


- Si a = 12446'29 €, valorando capitales en el instante "1", cuando debido al año de carencia en cuota de amortización y de interés el capital vivo es $1'08.C_0$, ha de ser:

$$1'08.C_0 = 12446'29.a_{\overline{7}|0'08} \Rightarrow C_0 = 60000€$$

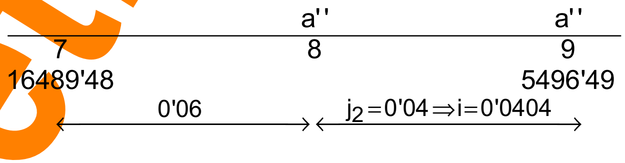
- El capital vivo C_4 al inicio del quinto año, cuando aún deben pagarse 4 anualidades de cuantía "a", es $C_4 = a.a_{\overline{4}|0'08} = 12446'29.a_{\overline{4}|0'08} = 41223'69$ €. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "5", "6" y "7" logra que el capital vivo al final del séptimo año sea $C_7 = 2.C_4/5 = 16489'48€$ es a' = 10500 €, pues valorando capitales en el instante "7", ha de ser:

$$41223'69.1'07^2.1'06 = \left(a'.s_{\overline{2}|0'07}.1'06 + a'\right) + 16489'48 \Rightarrow a' = 10500\ €$$

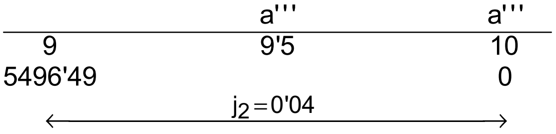


- Siendo $C_7 = 16489'48$ € el capital vivo al inicio del octavo año, la cuantía a'' que pagada en los instantes "8" y "9" logra que el capital vivo al inicio del décimo año sea $C_9 = C_7/3 = 5496'49€$ es a'' = 6218'68 €, pues valorando capitales en el instante "9", ha de ser:

$$16489'48.1'06.1'0404 = a''.(1'0404 + 1) + 5496'49 \Rightarrow a'' = 6218'68\ €$$



- Siendo $C_9 = C_7/3 = 5496'49$ € el capital vivo al inicio del décimo año, la cuantía a''' que pagada en los instantes "9'5" y "10" cancela la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "9"; o sea: $5496'49 = a'''.a_{\overline{2}|0'02} \Rightarrow a''' = 2830'96$ €.



Ejercicio 23

En el balance de una empresa aparece un préstamo concedido hace 2 años, con una duración de 8 años al 6% anual, con amortización mediante el método francés y un año de carencia en cuota de amortización y de interés, siendo el término amortizativo anual de 18898'31 €. Hoy, al inicio del tercer año, se propone al banco la renegociación de la deuda, de modo que:

- El tipo de interés pasará a ser el 5'5% efectivo anual los dos próximos años, el 4'5% efectivo anual los dos años siguientes, y el 4% nominal anual con capitalización semestral los dos últimos años.
- Durante los próximos tres años se pagará una anualidad constante capaz de amortizar 1/3 de la deuda viva en estos momentos.
- Durante los dos años siguientes se pagarán anualidades constantes que permitan amortizar 1/2 del capital vivo al inicio del sexto año.
- Durante el último año se entregarán semestralidades constantes que extingan la deuda.

1) Determínese el capital prestado y los distintos términos amortizativos a partir de la reestructuración.
2) Si el prestatario tiene unos gastos iniciales de 750 €, plantéese la ecuación de su tanto efectivo.

Solución

1) Si $a = 18988'31$ €, valorando capitales en el instante "1", cuando debido al año de carencia en cuota de amortización y de interés el capital vivo es $1'06.C_0$, ha de ser:

$$1'06.C_0 = 18988'31.a_{\overline{7}|0'06} \Rightarrow C_0 = 100000 €$$

- El capital vivo C_2 al inicio del tercer año, cuando aún deben pagarse 6 anualidades de cuantía "a", es $C_2 = a.a_{\overline{6}|0'06} = 18988'31.a_{\overline{6}|0'06} = 93371'68$ €. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "3", "4" y "5" logra que el capital vivo al inicio del sexto año sea $C_5 = 2.C_2/3 = 62247'79$€ es $a' = 14727'31$ €, pues valorando capitales en el instante "6", ha de ser:

$$93371'68.1'055^2.1'045 = \left(a'.s_{\overline{2}|0'055}.1'045 + a'\right) + 62247'79 \Rightarrow a' = 14727'31 €$$

	a'	a'	a'
2	3	4	5
93371'68			62247'79
←	0'055	→ ←	0'045 →

- Siendo $C_5 = 2.C_2/3 = 62247'79$ € el capital vivo al inicio del sexto año, la cuantía a'' que pagada en los instantes "6" y "7" logra que el capital vivo al inicio del octavo año sea $C_7 = C_5/2 = 31123'9$ € es $a'' = 17914'63$ €, pues valorando capitales en el instante "9", ha de ser:

$$62247'79.1'045.1'0404 = a''.s_{\overline{2}|0'0404} + 31123'9 \Rightarrow a'' = 17914'63 €$$

	a''	a''
5	6	7
62247'79		31123'9
← 0'045	→ ←	$j_2 = 0'04 \Rightarrow i = 0'0404$ →

- Siendo $C_7 = C_5/2 = 31123'9$ € el capital vivo al inicio del octavo año, la cuantía a''' que pagada en los instantes "7'5" y "8" cancela la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "8"; o sea: $31123'9 = a'''.a_{\overline{2}|0'02} \Rightarrow a''' = 16030'35$ €.

	a'''	a'''
7	7'5	8
31123'9		0
←	$j_2 = 0'04$	→

2) La ecuación del tanto efectivo del prestatario es:

$$100000 - 750 = a.(1+i_p)^{-2} + a'.a_{\overline{3}|i_p}.(1+i_p)^{-2} + a''.a_{\overline{2}|i_p}.(1+i_p)^{-5} + a'''.a_{\overline{2}|i_p^{(2)}}.(1+i_p)^{-7}$$

		a	a'	a'	a'	a''	a''	a'''	a'''
0	1	2	3	4	5	6	7	7'5	8
100000 –750									

Ejercicio 24

En el balance de una empresa aparece un préstamo concedido hace 3 años, con duración de 8 años, al 6% anual. Se amortiza mediante el método francés, con un año de carencia en cuota de amortización y de interés, siendo de 17089'48 € el término amortizativo. Hoy, al inicio del cuarto año, se propone la renegociación de la deuda, de modo que se amplía la duración del préstamo en 2 años, el tipo de interés pasará a ser el 5% anual los dos próximos años, el 4% anual los dos años siguientes y el 4% nominal anual los restantes años; durante los próximos tres años se pagará una anualidad constante capaz de amortizar 1/3 de la deuda viva al inicio del cuarto, durante los dos años siguientes se pagará una anualidad constante capaz de amortizar 1/2 de la deuda viva al inicio del séptimo año, y durante los dos últimos años se pagarán semestralidades constantes que extingan la deuda.

1) Determínese el capital prestado y los distintos términos amortizativos a partir de la reestructuración.
2) Plantéese la ecuación del tanto efectivo del prestatario si al inicio de la operación pagó 350 € en concepto de gastos.

Solución

1) El capital vivo C_3 al inicio del cuarto año, cuando aún deben pagarse 5 anualidades de 17089'48 € es $C_3 = 17089'48 . a_{\overline{5}|0'06} \Rightarrow C_3 = 71987'11$ €. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "4", "5" y "6" logra que el capital vivo al inicio del séptimo año sea $C_6 = 2.C_3/3 = 47991'41$ € es $a' = 11030'97$ €, pues valorando capitales en el instante "6", ha de ser:

$$71987'11.1'05^2.1'04 = a'.s_{\overline{2}|0'05}.1'04 + a' + 47991'41 \Rightarrow a' = 11030'97 \text{ €}$$

	a'	a'	a'
3	4	5	6
71987'11			47991'41
	0'05		0'04

- Siendo $C_6 = 2.C_3/3 = 47991'41$ € el capital vivo al inicio del séptimo año, la cuantía a'' que pagada en los instantes "7" y "8" y "8" logra que el capital vivo al inicio del noveno año sea $C_8 = C_6/2 = 23995'7$ € es $a'' = 13689'36$ €, pues valorando capitales en el instante "8", ha de ser:

$$47991'41.1'04.1'0404 = a''.a_{\overline{2}|0'0404} + 23995'7 \Rightarrow a'' = 13689'36 \text{ €}$$

	a''	a''
6	7	8
47991'41		23995'7
0'04		$j_2 = 0'04 \Rightarrow i = 0'0404$

- Siendo $C_8 = 23995'7$ € el capital vivo al inicio del noveno año, la cuantía a''' que pagada en los instantes "8'5", "9", "9'5" y "10" y "8" logra cancelar la deuda es $a''' = 6301'84$ €, pues valorando capitales en el instante "8", ha de ser:

$$23995'7 = a'''.a_{\overline{4}|0'02} \Rightarrow a''' = 6301'84 \text{ €}$$

	a'''	a'''	a'''	a'''
8	8'5	9	9'5	10
23995'7				0
		$i^{(2)} = 0'02$		

2) El nominal del préstamo es $C_0 = a.a_{\overline{7}|0'06}.1'06^{-1} = 17089'48.a_{\overline{7}|0'06}.1'06^{-1} = 90000$ €, así, la ecuación del tanto efectivo del prestatario es:

$$C_0 - 350 = a.a_{\overline{2}|i_p}.(1+i_p)^{-1} + a'.a_{\overline{3}|i_p}.(1+i_p)^{-3} + a''.a_{\overline{2}|i_p}.(1+i_p)^{-6} + a'''.a_{\overline{4}|i_p^{(2)}}.(1+i_p)^{-8}$$

		a	a	a'	a'	a'	a''	a''	a'''	a'''	a'''	a'''
0	1	2	3	4	5	6	7	8	8'5	9	9'5	10
C_0 –350												

Ejercicio 25

En el balance de una empresa aparece un préstamo concedido hace 4 años, con duración de 8 años, al 4'5% anual los tres primeros años y al 5% anual los años restantes. Se amortiza mediante el método francés, con un año de carencia en cuota de amortización. Hoy, al inicio del quinto año, cuando el capital vivo es de 36447'87 €, se propone la renegociación de la deuda, de modo que el tipo de interés pasará a ser el 5'5% anual los dos próximos años, y el 5% nominal anual los años siguientes; en este momento se amortiza la cuarta parte de la deuda viva; durante los próximos dos años se pagará una anualidad constante capaz de amortizar 3/5 de la nueva deuda viva, y durante los dos años siguientes se pagarán semestralidades constantes que extingan la deuda.

1) Determínese el capital prestado y los distintos términos amortizativos a partir de la reestructuración.
2) Plantéese la ecuación del tanto efectivo del prestatario si al inicio de la operación pagó el 1'5% del capital prestado en concepto de gastos, y que al final de la misma pagará 1200 € en concepto de gastos, existiendo una comisión del 1% por cancelación anticipada.

Solución

1) Al exigir que el capital vivo C_4 al inicio del quinto año, cuando aún deben pagarse 4 anualidades de cuantía "a", sea 36447'87 €, resulta $36447'87 = a.a_{\overline{4}|0'05} \Rightarrow a = 10278'73$ €. Así, valorando capitales en el instante "1", cuando debido al año de carencia en cuota de amortización el capital vivo es C_0, ha de ser:

$$C_0 = a.a_{\overline{2}|0'045} + a.a_{\overline{5}|0'05}.1'045^{-2} \Rightarrow C_0 = 60000 \text{ €}$$

	$C_0.0'045$	a	a	a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7	8
C_0								
	0'045				0'05			

Si en el instante 4' amortizamos $C_4/4 = 9111'97$ €, el capital vivo al inicio del quinto año queda reducido a $C_4' = 3.C_4/4 = 27335'9$ €. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "5" y "6" logra que el capital vivo al inicio del séptimo año sea $C_6 = 2.C_4'/5 = 10934'36$ € es $a' = 9484'76$ €, pues valorando capitales en el instante "6", ha de ser:

$$27335'9.1'055^2 = a'.s_{\overline{2}|0'055} + 10934'36 \Rightarrow a' = 9484'76 \text{ €}$$

	a'	a'
4'	5	6
27335'9		10934'36
	0'055	

- Siendo $C_6 = 10934'36$ € el capital vivo al inicio del séptimo año, la cuantía a'' que pagada en los instantes "6'5", "7", "7'5" y "8" logra cancelar la deuda es $a'' = 2906'35$ €, pues valorando capitales en el instante "6", ha de ser:

$$10934'36 = a''.a_{\overline{4}|0'025} \Rightarrow a'' = 2906'35 \text{ €}$$

	a''	a''	a''	a''
6	6'5	7	7'5	8
10934'36				0
		$i^{(2)} = 0'025$		

2) La ecuación del tanto efectivo del prestatario es:

$$C_0 - 0'015.C_0 = 0'045.C_0.(1+i_p)^{-1} + a.a_{\overline{3}|i_p}.(1+i_p)^{-1} + (9111'97 + 9111'97.0'01).(1+i_p)^{-4} +$$
$$+a'.a_{\overline{2}|i_p}.(1+i_p)^{-4} + a''.a_{\overline{4}|i_p^{(2)}}.(1+i_p)^{-6} + 1200.(1+i_p)^{-8}$$

	$0'045.C_0$	a	a	a 9111'97 9111'97.0'01	a'	a'	a''	a''	a''	a'' 1200
0	1	2	3	4	5	6	6'5	7	7'5	8
C_0 $-0'015.C_0$										

Ejercicio 26

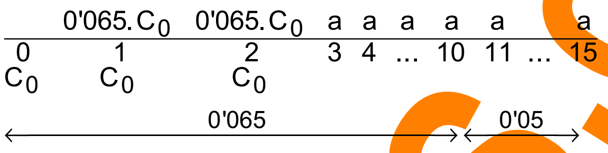
En el balance de una empresa aparece contabilizado un préstamo concedido hace 10 años en las siguientes condiciones:

- Duración 15 años.
- Tipo de interés: 6'5% anual los 10 primeros años, y 5% anual los restantes años.
- Amortización mediante el método francés, con dos años de carencia en la cuota de amortización.
- Término amortizativo pagado hoy, al final del décimo año: 13858'49 €

Ante la bajada de los tipos de interés, se propone al banco la renegociación de la deuda, de modo que el tipo de interés pasará a ser el 4% anual en los tres próximos años y el 6% nominal anual para los dos últimos. El banco acepta la reestructuración, pero exigiendo que durante los próximos tres años se pague una anualidad constante capaz de amortizar 2/3 de la deuda viva en estos momentos, y durante los dos últimos años se entreguen semestralidades constantes que extingan la deuda.

Determínese el capital prestado y el cuadro de amortización a partir de la reestructuración.

Solución

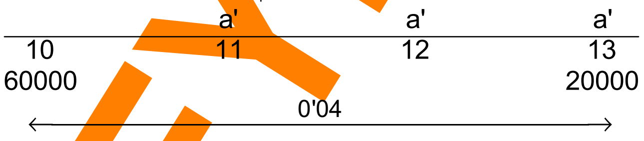


- Si $a = 13858'49$ €, valorando capitales en el instante "2", cuando debido a los dos años de carencia en cuota de amortización el capital vivo es C_0, ha de ser:

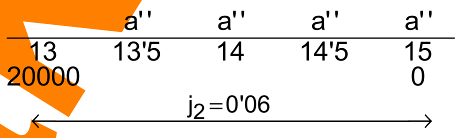
$$C_0 = 13858'49.a_{\overline{8}|0'065} + 13858'49.a_{\overline{5}|0'05}.1'065^{-8} = 120634'77$$

- El capital vivo C_{10} al inicio de undécimo año, cuando aún deben pagarse 5 anualidades de 13858'49 € al 5% es $C_{10} = 13858'49.a_{\overline{5}|0'05} = 60000$ €. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "11", "12" y "13" logra que el capital vivo al inicio del decimocuarto año sea $C_{13} = C_{10}/3 = 20000$€ es $a' = 15213'94$ €, pues valorando capitales en el instante "13", ha de ser:

$$60000.1'04^3 = a'.s_{\overline{3}|0'04} + 20000 \Rightarrow a' = 15213'94 \text{ €}$$



- Siendo $C_{13} = C_{10}/3 = 20000$ € el capital vivo al inicio del decimocuarto año, la cuantía a'' que pagada en los instantes "13'5", "14", "14'5" y "15" cancela la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "13"; o sea: $20000 = a''.a_{\overline{4}|0'03} \Rightarrow a'' = 5380'54$€.



Cuadro de amortización

La cuota de interés que se paga en el instante "3" es $I_3 = C_0.i = 120634'77.0'065 = 7841'26$, por lo que $A_3 = a - I_3 = 13858'49 - 7841'26 = 6017'23$, siendo

$$A_{10} = A_3.(1+i)^7 = 6017'23.1'065^7 = 9350'69$$
$$I_{10} = a - A_{10} = 13858'49 - 9350'69 = 4507'80$$
$$m_{10} = C_0 - C_{10} = 120634'77 - 60000 = 60634'77$$

Es $I_{11} = C_{10}.0'04 = 2400$ €, y como $a_{11} = 15213'94$ €, entonces:

$$A_{11} = a_{11} - I_{11} = 12813'94 \text{ €} ;\ C_{11} = C_{10} - A_{11} = 47186'06 \text{ €} ;\ m_{11} = m_{10} + A_{11} = 73448'71 \text{ €}$$

Es $I_{12} = C_{11}.0'04 = 1887'44$ €, y como $a_{12} = 15213'94$ €, entonces:

$$A_{12} = a_{12} - I_{12} = 13326'50 \text{ €} ;\ C_{12} = C_{11} - A_{12} = 33859'56 \text{ €} ;\ m_{12} = m_{11} + A_{11} = 86775'21 \text{ €}$$

Es $I_{13} = C_{12}.0'04 = 1354'38$ €, y como $a_{13} = 15213'94$ €, entonces:

$$A_{13} = a_{13} - I_{13} = 13859'56 \text{ €} ;\ C_{13} = C_{12} - A_{13} = 20000 \text{ €} ;\ m_{13} = m_{12} + A_{13} = 100634'77 \text{ €}$$

Es $I_{13'5} = C_{13}.0'03 = 600$ €, y como $a_{13'5} = 5380'54$ €, entonces:

$$A_{13'5} = a_{13'5} - I_{13'5} = 4780'54 \text{ €}$$
$$C_{13'5} = C_{13} - A_{13'5} = 15219'46 \text{ €} ;\ m_{13'5} = m_{13} + A_{13'5} = 105415'31 \text{ €}$$

Es $I_{14} = C_{13'5}.0'03 = 456'58$ €, y como $a_{14} = 5380'54$ €, entonces:

$$A_{14} = a_{14} - I_{14} = 4923'96 \text{ €} ;\ C_{14} = C_{13'5} - A_{14} = 10295'50 \text{ €} ;\ m_{14} = m_{13'5} + A_{14} = 110339'27 \text{ €}$$

Es $I_{14'5} = C_{14}.0'03 = 308'86$ €, y como $a_{14'5} = 5380'54$ €, entonces:

$$A_{14'5} = a_{14'5} - I_{14'5} = 5071'67 \text{ €}$$
$$C_{14'5} = C_{14} - A_{14'5} = 5223'82 \text{ €} ;\ m_{14'5} = m_{14} + A_{14'5} = 115410'94 \text{ €}$$

Es $I_{15} = C_{14'5}.0'03 = 156'71$ €, y como $a_{15} = 5380'54$ €, entonces:

$$A_{15} = a_{15} - I_{15} = 5223'82 \text{ €} ;\ C_{15} = C_{14'5} - A_{15} = 0 \text{ €} ;\ m_{15} = m_{14'5} + A_{15} = 120634'77 \text{ €}$$

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s	
10	13858'49	4507'80	9350'69	60634'77	60000	
11	15213'94	2400	12813'94	73448'71	47186'06	0'04
12	15213'94	1887'44	13326'50	86775'21	33859'56	0'04
13	15213'94	1354'38	13859'56	100634'77	20000	0'04
13'5	5380'54	600	4780'54	105415'31	15219'46	0'03
14	5380'54	456'58	4923'96	110339'27	10295'50	0'03
14'5	5380'54	308'86	5071'67	115410'94	5223'82	0'03
15	5380'54	156'71	5223'82	120634'77	0	0'03

Ejercicio 27

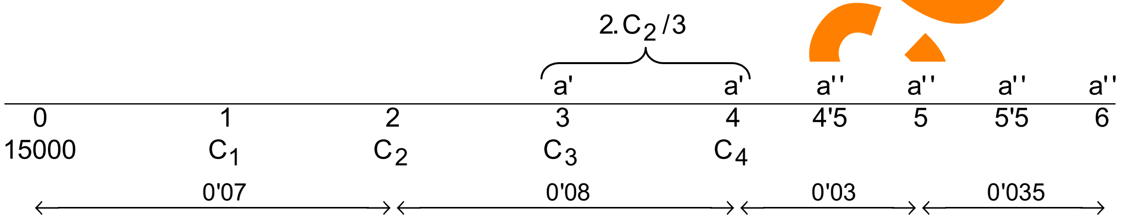
Sea un préstamo de 15000 € para ser amortizado por el método americano, al 7% anual, con una duración de 6 años y con 2 años de carencia en el pago de cuotas de interés. Transcurridos dos años desde el inicio de la operación, se produce una reestructuración de forma que:

- En los años tercero y cuarto se entregarán anualidades constantes que amorticen dos tercios de la deuda pendiente al inicio del tercer año.
- En los años quinto y sexto se entregarán semestralidades constantes capaces de extinguir la deuda.
- Los tantos de interés pasan a ser del 8% anual para los años tercero y cuarto, para el quinto año será del 3% semestral, y para el sexto año será del 3'5% semestral.

Obténgase el cuadro de amortización teniendo en cuenta la reestructuración.

Solución

Tras la reestructuración, la cosa queda así:



La deuda C_2 pendiente al inicio del tercer año es $C_2 = 15000.1'07^2 = 17173'5$ €. Así, si el capital vivo al inicio del quinto año es $C_4 = C_2/3 = 17173'5/3 = 5724'5$ €, la equivalencia de capitales en el instante "4" exige que a' sea tal que $C_2.1'08^2 = a'.s_{\overline{2}|0'08} + C_4$, lo que sucede si $a' = 6878'21$ €

La cuota de interés del tercer año es $I_3 = C_2.0'08 = 1373'88$ €; por tanto, como $a_3 = a' = 6878'21$ €, es:

$$A_3 = m_3 = a_3 - I_3 = 5504'33 \text{ €} ; \ C_3 = C_2 - A_3 = 17173'5 - 5504'33 = 11669'17 \text{ €}.$$

La cuota de interés del cuarto año es $I_4 = C_3.0'08 = 933'53$ €, y como $a_4 = a' = 6878'21$ €, entonces:

$$A_4 = a_4 - I_4 = 5944'68 \text{ €} ; \ C_4 = C_3 - A_4 = 5724'49 \text{ €} ; \ m_4 = m_3 + A_4 = 11449'01 \text{ €}$$

Según la reestructuración, la deuda $C_4 = 5724'49$ € pendiente al inicio del quinto año se compensa con 4 semestralidades de cuantía constante a'', las dos primeras al 3% semestral, y las dos últimas al 3'5% semestral; así, la equivalencia de capitales en el instante "4" exige que $C_4 = a''.a_{\overline{2}|0'03} + a''.a_{\overline{2}|0'035}.1'03^{-2}$, lo que sucede si $a'' = 1545'44$ €.

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					15000
1					16050
2					17173'5
3	6878'21	1373'88	5504'33	5504'33	11669'17
4	6878'21	933'53	5944'68	11449'01	5724'49
4'5	1545'44	171'73	1373'71	12822'72	4350'78
5	1545'44	130'52	1414'92	14237'64	2935'86
5'5	1545'44	102'76	1442'68	15680'32	1493'18
6	1545'44	52'26	1493'18	17173'50	0

La cuota de interés del primer semestre es:

$$I_{4'5} = C_4.0'03 = 171'73 \text{ €}$$

Como $a_{4'5} = a'' = 1545'44$ €, entonces:

$$A_{4'5} = a_{4'5} - I_{4'5} = 1373'71 \text{ €}$$
$$C_{4'5} = C_4 - A_{4'5} = 4350'78 \text{ €}$$
$$m_{4'5} = m_4 + A_{4'5} = 12822'72 \text{ €}$$

La cuota de interés del segundo semestre es:

$$I_5 = C_{4'5}.0'03 = 130'52 \text{ €}$$

Como $a_5 = a'' = 1545'44$ €, entonces:

$$A_5 = a_5 - I_5 = 1414'92 \text{ €} ; \ C_5 = C_{4'5} - A_5 = 2935'86 \text{ €} ; \ m_5 = m_{4'5} + A_5 = 14237'64 \text{ €}$$

La cuota de interés del tercer semestre es $I_{5'5} = C_5.0'035 = 102'76$ €, y como $a_{5'5} = a'' = 1545'44$ €, es:

$$A_{5'5} = a_{5'5} - I_{5'5} = 1442'68 \text{ €} ; \ C_{5'5} = C_5 - A_{5'5} = 1493'18 \text{ €}$$
$$m_{5'5} = m_5 + A_{5'5} = 15680'32 \text{ €}$$

La cuota de interés del cuarto semestre es $I_6 = C_{5'5}.0'035 = 52'26$ €, y como $a_6 = a'' = 1545'44$ €, es:

$$A_6 = a_6 - I_6 = 1493'18 \text{ €} ; \ C_6 = C_{5'5} - A_6 = 0 \text{ €} ; \ m_6 = m_{5'5} + A_{5'5} = 17173'50 \text{ €}$$

Ejercicio 28

Hace tres años se concedió un préstamo de 90000 €, con amortización por el método francés y 8 años de duración al 7% de interés compuesto anual, y un año de carencia en cuota de amortización. Hoy se solicita la reestructuración de las condiciones del préstamo, que se basa en:

- En este momento se amortiza un quinto del capital pendiente de amortizar.
- En los tres próximos años, una anualidad constante que permita amortizar dos tercios de la deuda viva.
- En los dos últimos años, semestralidades constantes que extingan la deuda.

El banco acepta la reestructuración, pero el tipo de interés pasará a ser del 7'5% para el cuarto año, en los años quinto y sexto el 6'5% anual, para el séptimo año el 3'5% semestral y para el octavo el 3% semestral.

Las características comerciales del préstamo son:

A cargo del prestatario:

- Gastos iniciales del 1'5% del principal de la operación.
- Gastos por cancelación anticipada del 2%.
- Un 5% del capital prestado, al finalizar la operación, por levantamiento de hipoteca.

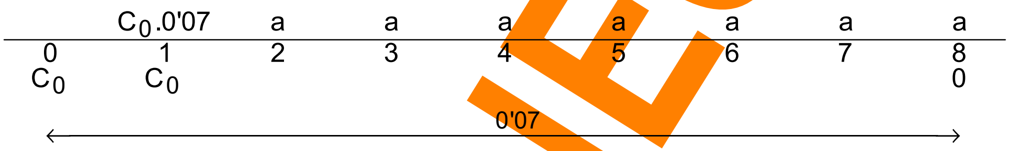
A cargo del prestamista:

- Un 18% de las cantidades recibidas, en concepto de impuestos.

Obténgase el cuadro de amortización teniendo en cuenta la reestructuración y las ecuaciones de los tantos efectivos para el prestamista y para el prestatario.

Solución

La operación pactada inicialmente es la siguiente:



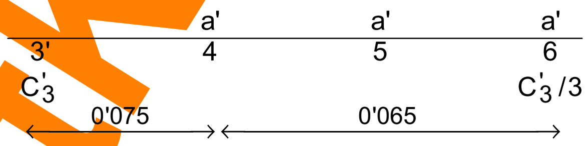
Valorando capitales al principio del 2º año, cuando el capital vivo es de 90000 € (pues la cuota del instante "1" sólo incluye los intereses del primer año) y aún deben pagarse 7 anualidades de cuantía "a", ha de ser:

$$90000 = a.a_{\overline{7}|0'07} \Rightarrow a = \frac{90000}{a_{\overline{7}|0'07}} = 16699'78 \text{ €}$$

Obvio: si hoy, al inicio de la cuarta anualidad, se modifican las condiciones del préstamo, lo primero es determinar el capital vivo C_3 a día de hoy, cuando aún deben pagarse 5 anualidades de 16699'78€. Es:

$$C_3 = 16699'79.a_{\overline{5}|0'07} = 68472'43 \text{ €}.$$

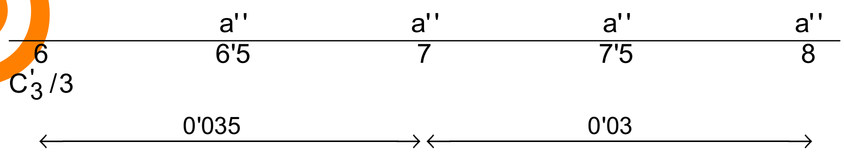
Obvio: si hoy (el instante 3') amortizamos la quinta parte de C_3, el capital vivo al inicio de la cuarto año queda reducido a $C'_3 = 4.C_3/5 = 54777'94$ €.



La cuantía a' que pagada en los instantes "4", "5" y "6" logra que el capital vivo al final del sexto año sea $C'_3/3 = 54777'94/3 = 18259'31$€ es $a' = 15191'61$ €, pues valorando capitales en el instante "6", ha de ser:

$$C'_3.1'075.1'065^2 = a'.s_{\overline{3}|0'065} + \frac{C'_3}{3} \Rightarrow a' = 15191'61€$$

La cuantía a'' que pagada en los instantes "6'5", "7", "7'5" y "8" cancela la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "6"; o sea: $C'_3/3 = a''.a_{\overline{2}|0'035} + a''.a_{\overline{2}|0'03}.1'035^{-2} \Rightarrow a'' = 4953'77$€.



Cuadro

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s	i
0					90000	
1	6300	6300	0	0	90000	0'07
2	16699'78	6300	10399'79	10399'79	79600'21	0'07
3	16699'78	5572'01	11127'78	21527'57	68472'43	0'07
3'				35222'06	54777'94	0'07
4	15191'61	4108'35	11061'26	46283'32	43716'68	0'075
5	15191'61	2841'58	13328'03	58611'34	31388'66	0'065
6	15191'61	2040'26	13129'35	71740'69	18259'31	0'065
6'5	4953'77	639'08	4314'70	76055'39	13944'83	0'035
7	4953'77	488'86	4465'71	80521'10	9478'90	0'035
7'5	4953'77	284'37	4669'41	85190'51	4804'49	0'03
8	4953'77	144'28	4804'49	90000	0	0'03

Es $I_2 = C_1.0'07 = 6300$ €, y como $a_2 = 16699'78$ €, entonces:

$$A_2 = m_2 = a_2 - I_2 = 10399'79 \text{ €} \; ; \; C_2 = C_1 - A_2 = 79600'21 \text{ €}$$

Es $I_3 = C_2.0'07 = 5572'01$ €, y como $a_3 = 16699'78$ €, entonces:

$$A_3 = a_3 - I_3 = 11127'78 \text{ €} \; ; \; C_3 = C_2 - A_3 = 68472'43 \text{ €} \; ; \; m_3 = m_2 + A_3 = 21527'57 \text{ €}$$

En el instante 3' amortizamos $C_3/5 = 68472'43/5 = 13694'49$ €; así, es $m_{3'} = m_3 + 13694'49 = 35222'06$ €, y el capital vivo queda reducido a $C'_3 = 4.C_3/5 = 54777'94$ €.

Es $I_4 = C'_3.0'075 = 4108'35$ €, y como $a_4 = a' = 15191'61$ €, entonces:

$$A_4 = a_4 - I_4 = 11061'26 \text{ €} \; ; \; C_4 = C'_3 - A_4 = 43716'68 \text{ €} \; ; \; m_4 = m'_3 + A_4 = 46283'32 \text{ €}$$

Es $I_5 = C_4.0'065 = 2841'58$ €, y como $a_5 = a' = 15191'61$ €, entonces:

$$A_5 = a_5 - I_5 = 13328'03 \text{ €} \; ; \; C_5 = C_4 - A_5 = 31388'66 \text{ €} \; ; \; m_5 = m_4 + A_5 = \text{ €}$$

Es $I_6 = C_5.0'065 = 2040'26$ €, y como $a_6 = a' = 15191'61$ €, entonces:

$$A_6 = a_6 - I_6 = 13129'35 \text{ €} \; ; \; C_6 = C_5 - A_6 = 18259'31 \text{ €} \; ; \; m_6 = m_5 + A_6 = 71740'69 \text{ €}$$

Es $I_{6'5} = C_6.0'035 = 639'08$ €, y como $a_{6'5} = a'' = 4953'77$ €, entonces:

$$A_{6'5} = a_{6'5} - I_{6'5} = 4314'70 \text{ €} \; ; \; C_{6'5} = C_6 - A_{6'5} = 13944'83 \text{ €} \; ; \; m_{6'5} = m_6 + A_{6'5} = 76055'39 \text{ €}$$

Es $I_7 = C_{6'5}.0'035 = 488'07$ €, y como $a_7 = a'' = 4953'77$ €, entonces:

$$A_7 = a_7 - I_7 = 4465'71 \text{ €} \; ; \; C_7 = C_{6'5} - A_7 = 9478'90 \text{ €} \; ; \; m_7 = m_{6'5} + A_7 = 80521'10 \text{ €}$$

Es $I_{7'5} = C_7.0'03 = 284'37$ €, y como $a_{7'5} = a'' = 4953'77$ €, entonces:

$$A_{7'5} = a_{7'5} - I_{7'5} = 4669'41 \text{ €} \; ; \; C_{7'5} = C_7 - A_{7'5} = 4804'49 \text{ €} \; ; \; m_{7'5} = m_7 + A_{7'5} = 85190'51 \text{ €}$$

Es $I_8 = C_{7'5}.0'03 = 144'28$ €, y como $a_8 = a'' = 4953'77$ €, entonces:

$$A_8 = a_8 - I_8 = 4804'49 \text{ €} \; ; \; C_8 = C_{7'5} - A_8 = 0 \text{ €} \; ; \; m_8 = m_{7'5} + A_8 = 90000 \text{ €}$$

Ecuación del tanto efectivo del prestatario

Gastos iniciales del 1'5% del principal de la operación $\Rightarrow G_i = 0'015.90000 = 1350$ €.
Gastos (por cancelación anticipada) de 273'89 € (el 2% de $C_3/5$) en el instante 3'.
Un 5% del capital prestado, al final, por levantamiento de hipoteca $\Rightarrow G_f = 0'05.9000 = 4500$ €.

$$90000 - 1350 = 6300.(1+i_p)^{-1} + a.a_{\overline{2}|i_p}.(1+i_p)^{-1} + (13694'49 + 273'89).(1+i_p)^{-3} +$$
$$+a'.a_{\overline{3}|i_p}.(1+i_p)^{-3} + a''.a_{\overline{4}|i_p^{(2)}}.(1+i_p)^{-6} + 4500.(1+i_p)^{-8}$$

	6300	a	a 13694'49 273'89	a'	a'	a'	a''	a''	a''	a'' 4500
0 90000 –1350	1	2	3	4	5	6	6'5	7	7'5	8

Ecuación del tanto efectivo del prestamista

Como de impuestos paga un 18% de las cantidades recibidas, salvo con la comisión de 273'89 € , las demás cantidades que recibe deben multiplicarse 0'82; así:

$$90000 = 6300.(1+i_a)^{-1}.0'82 + a.a_{\overline{2}|i_a}.(1+i_a)^{-1}.0'82 + (13694'49.0'82 + 273'89).(1+i_a)^{-3} +$$
$$+a'.a_{\overline{3}|i_a}.(1+i_a)^{-3}.0'82 + a''.a_{\overline{4}|i_a^{(2)}}.(1+i_a)^{-6}.0'82$$

Ejercicio 29

Sea un préstamo hipotecario de 900000 € con amortización por el método francés, duración de 6 años al 5% de interés compuesto anual y dos años de carencia en cuota de amortización y cuota de interés. A los 4 años, el prestatario solicita la reestructuración de las condiciones del préstamo, que se basa en:

- Se amplía 2 años la duración del préstamo (la duración final es de 8 años).
- En los dos próximos años, anualidades constantes que amorticen la mitad de la deuda pendiente, y durante los dos últimos años, semestralidades constantes que cancelen la deuda.

El banco acepta la reestructuración, pero exigiendo que se abone ya la quinta parte de la deuda pendiente, y pasando el tipo de interés al 5'5% anual para los años quinto y sexto, y al 6% nominal anual para los años séptimo y octavo.

Las características comerciales a cargo del prestatario son:

- En el momento de concretarse la operación debe abonar el 0'5% del capital prestado en concepto de impuestos, y el 2% en concepto de escritura y gastos de tramitación.
- Un 1'5% del capital prestado, al finalizar la operación, por levantamiento de hipoteca.

A cargo del prestamista: un 18% de las cantidades recibidas, en concepto de impuestos.

Obténgase el cuadro de amortización teniendo en cuenta la reestructuración y la ecuación de tanto efectivo para el prestatario.

Solución

La operación pactada inicialmente es la siguiente:

			a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6
C_0	$1'05.C_0$	$1'05^2.C_0$				

$$\xleftrightarrow{\quad 0'05 \quad}$$

Valorando capitales al principio del tercer año, cuando por los 2 años de carencia en cuotas de amortización y de interés el capital vivo es $900000.1'05^2$ € y aún deben pagarse 4 anualidades de cuantía "a", ha de ser:

$$900000.1'05^2 = a.a_{\overline{4|}0'05} \Rightarrow a = \frac{900000.1'05^2}{a_{\overline{4|}0'05}} = 279826'25 \text{ €}$$

El capital vivo C_4 al inicio de quinto año, cuando aún deben pagarse dos anualidades de 279826'25€ es $C_4 = 279826'25.a_{\overline{2|}0'05} = 520311'85$ €. Así, si en el instante 4' amortizamos la quinta parte de C_4, el capital vivo al inicio del quinto año queda reducido a $C'_4 = 4.C_4/5 = 416249'48$ €.

	a'	a'
4'	5	6
C'_4		$C'_4/2$

$$\xleftrightarrow{\quad 0'055 \quad}$$

La cuantía a' que pagada en los instantes "5" y "6" logra que el capital vivo al final del sexto año sea $C'_4/2 = 208124'73$€ es a' = 124170'97 €, pues valorando capitales en el instante "6", ha de ser:

$$C'_4.1'055^2 = a'.s_{\overline{2|}0'055} + \frac{C'_4}{2} \Rightarrow a' = 124170'97\text{€}$$

La cuantía a'' que pagada en los instantes "6'5", "7", "7'5" y "8" cancela la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "6"; o sea: $C'_4/2 = a''.a_{\overline{4|}i(2)} \Rightarrow a'' = 55991'18$€.

	a''	a''	a''	a''
6	6'5	7	7'5	8
$C'_4/2$				

$$\xleftrightarrow{\quad j_2 = 0'06 \quad}$$

Cuadro de amortización

Es $I_3 = C_2.0'05 = 49612'50$ €, y como $a_3 = 279826'25$ €, entonces:

$$A_3 = m_3 = a_3 - I_3 = 230213'75 \text{ €} ; \ C_3 = C_2 - A_3 = 762036'25 \text{ €}$$

Es $I_4 = C_3.0'05 = 38101'81$ €, y como $a_4 = 279826'25$ €, entonces:

$$A_4 = a_4 - I_4 = 241724'44 \text{ €} ; \ C_4 = C_3 - A_4 = 520311'81 \text{ €} ; \ M_4 = M_3 + A_4 = 471938'19 \text{ €}$$

En el instante 4' amortizamos $C_4/5 = 104062'36$ €; así, $M_{3'} = M_4 + 104062'36 = 576000'56$ €, y el capital vivo queda reducido a $C'_4 = 4.C_4/5 = 416249'44$ €.

Es $I_5 = C'_4.0'055 = 22893'72$ €, y como $a_5 = a' = 124170'97$ €, entonces:

$$A_4 = a_5 - I_5 = 101277'25 \text{ €} ; C_5 = C'_4 - A_5 = 314972'19 \text{ €} ; M_6 = M_5 + A_6 = 784125'31 \text{ €}$$

Es $I_6 = C_5.0'055 = 17323'47$ €, y como $a_6 = a' = 124170'97$ €, entonces:

$$A_6 = a_6 - I_6 = 106847'50 \text{ €} ; C_6 = C_5 - A_6 = 208124'70 \text{ €} ; M_6 = M_5 + A_6 = 784125'31 \text{ €}$$

Es $I_{6'5} = C_6.0'03 = 6243'74$ €, y como $a_{6'5} = a'' = 55991'18$ €, entonces:

$$A_{6'5} = a_{6'5} - I_{6'5} = 49747'44 \text{ €} ; C_{6'5} = C_6 - A_{6'5} = 158377'25 \text{ €} ; M_{6'5} = M_6 + A_{6'5} = 833872'75 \text{ €}$$

Es $I_7 = C_{6'5}.0'03 = 4751'32$ €, y como $a_7 = a'' = 55991'18$ €, entonces:

$$A_7 = a_7 - I_7 = 51239'86 \text{ €} ; C_7 = C_{6'5} - A_7 = 107137'39 \text{ €} ; M_7 = M_{6'5} + A_7 = 885112'61 \text{ €}$$

Es $I_{7'5} = C_7.0'03 = 284'37$ €, y como $a_{7'5} = a'' = 55991'18$ €, entonces:

$$A_{7'5} = a_{7'5} - I_{7'5} = 52777'06 \text{ €} ; C_{7'5} = C_7 - A_{7'5} = 54360'33 \text{ €} ; M_{7'5} = M_7 + A_{7'5} = 937889'67 \text{ €}$$

Es $I_8 = C_{7'5}.0'03 = 144'28$ €, y como $a_8 = a'' = 55991'18$ €, entonces:

$$A_8 = a_8 - I_8 = 54360'33 \text{ €} ; C_8 = C_{7'5} - A_8 = 0 \text{ €} ; M_8 = M_{7'5} + A_8 = 992250 \text{ €}$$

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s	i
0					900000'00	
1					945000'00	0'050
2					992250'00	0'050
3	279826'25	49612'50	230213'75	230213'75	762036'25	0'050
4	279826'25	38101'81	241724'44	471938'19	520311'81	0'050
4'				576000'56	416249'44	0'050
5	124170'97	22893'72	101277'25	677277'81	314972'19	0'055
6	124170'97	17323'47	106847'50	784125'31	208124'70	0'055
6'5	55991'18	6243'74	49747'44	833872'75	158377'25	0'030
7	55991'18	4751'32	51239'86	885112'61	107137'39	0'030
7'5	55991'18	3214'12	52777'06	937889'67	54360'33	0'030
8	55991'18	1630'01	54360'33	992250'00	0	0'030

Ecuación del tanto efectivo del prestatario

En el momento de concretarse la operación debe abonar el 0'5% del capital prestado en concepto de impuestos, y el 2% en concepto de escritura y gastos de tramitación $\Rightarrow G_i = 0'025.900000 = 22500$ €.
Al finalizar la operación debe abonar el 1'5% del capital prestado $\Rightarrow G_f = 0'015.90000 = 13500$ €.

$$900000 - 22500 = a.a_{\overline{2|}i_p}.(1+i_p)^{-2} + 104062'36.(1+i_p)^{-4} +$$
$$+a'.a_{\overline{2|}i_p}.(1+i_p)^{-4} + a''.a_{\overline{4|}i_p^{(2)}}.(1+i_p)^{-6} + 13500.(1+i_p)^{-8}$$

			a	a 104062'36	a'	a'	a''	a''	a''	a'' 13500
0	1	2	3	4	5	6	6'5	7	7'5	8
900000 –22500										

Ejercicio 30

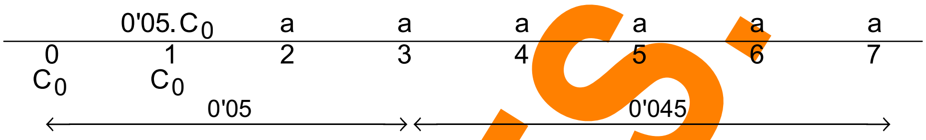
Hace 3 años te concedieron un préstamo a 7 años, con un año de carencia en cuota de amortización, al 5% anual los tres primeros años y al 4'5% anual los siguientes, siendo la anualidad pagada al final del tercer año de 9778'23 €. Hoy, a principios del cuarto año, propones al banco la reestructuración de la deuda, de modo que los tres próximos años entregarás anualidades constantes que permitan amortizar 4/5 del capital vivo, y el último año abonarás semestralidades constantes que extingan la deuda.

1) Si el banco acepta la propuesta y el tipo de interés pasa a ser el 4'75% anual en los próximos tres años, y el 5% anual con capitalización semestral el último año, determínese el capital prestado y el cuadro de amortización del préstamo teniendo en cuenta la reestructuración.
2) Si el banco no acepta los cambios, haces una amortización anticipada de 16000 €. Determínese la nueva anualidad a pagar. Si optas por seguir pagando anualidades de 9778'23 €, determínese el número de anualidades que quedarán por pagar y el importe de la última.

Solución

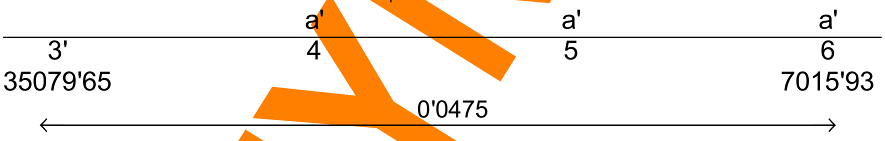
1) Si $a = 9778'23$ €, valorando en el instante "1", el principal C_0 es:

$$C_0 = a.a_{\overline{2}|0'05} + a.a_{\overline{4}|0'045}.1'05^{-3} = 50000 \text{ €}$$

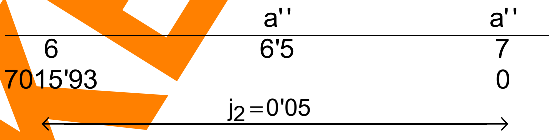


- El capital vivo C_3 al inicio de cuarto año, cuando aún deben pagarse 4 anualidades de $a = 9778'23$ € al 4'5% anual es $C_3 = a.a_{\overline{4}|0'045} = 35079'65$ €. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "4", "5" y "6" logra que el capital vivo al final del sexto año sea $C_6 = C_3/5 = 7015'93$ € es $a' = 10590'25$ €, pues valorando capitales en el instante "6", ha de ser:

$$35079'65.1'0475^3 = a'.s_{\overline{3}|0'0475} + 7015'93 \Rightarrow a' = 10590'25 \text{ €}$$



- La cuantía a'' que pagada en los instantes "6'5" y "7" cancela la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "6"; o sea: $7015'93 = a''.a_{\overline{2}|0'025} \Rightarrow a'' = 3640'05$ €.



- **Cuadro de amortización**

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s	
0					50000	
1		2500			50000	0'05
2	9778'23	2500	7278'23	7278'23	42721'77	0'05
3	9778'23	2136'09	7642'14	14920'37	35079'63	0'05
4	10590'25	1666'28	8923'97	23844'34	26155'66	0'0475
5	10590'25	1242'39	9347'86	33192'20	16807'80	0'0475
6	10590'25	798'37	9791'88	42984'08	7015'92	0'0475
6'5	3640'05	175'4	3464'65	46448'73	2551'27	0'025
7	3640'05	88'78	3551'27	50000	0	0'025

2) Si al inicio del cuarto año se entregan 16000 € para rebajar la deuda, el nuevo capital vivo C'_3 es $C'_3 = C_3 - 16000 = 35079'65 - 16000 = 19019'65$ €, que debe amortizarse con 4 anualidades de cuantía a^* al 4% anual; así, ha de ser $C'_3 = a^*.a_{\overline{4}|0'045} \Rightarrow a^* = 5318'33$ €.

- Si la empresa opta por seguir pagando anualidades de 9778'23 €, el número "x" de anualidades que quedarán por pagar será tal que $C'_3 = 19019'65 = a_{\overline{x}|0'045} \Rightarrow x = 2'087$ años. Por tanto, las anualidades cuarta y quinta serán de 9778'23 €, y la sexta y última será la cuantía a''' que equilibra el pacto:

$$19019'65 = 9778'23.a_{\overline{2}|0'045} + a'''.1'045^{-3} \Rightarrow a''' = 876'71 \text{ €}$$

	9778'23	9778'23	a'''
3'	4	5	6
19019'65			

Ejercicio 31

De un préstamo a 20 años concedido hace 10 años para amortizarlo mediante el método francés se sabe que $A_9 = 14521'67$ € y $A_{10} = 15247'76$ €. Hoy, al inicio del undécimo año, se pacta lo siguiente:

- La deuda pendiente se amortizará en 7 años.
- Durante los dos primeros años sólo se pagarán los intereses que genere el capital. Los cuatro años siguientes una anualidad constante que permita amortizar dos tercios de la deuda pendiente. Y el último año una anualidad que cancele la deuda.

Obténgase el capital prestado y el cuadro de amortización a partir de la reestructuración (7 años)

Solución

Conocidos A_9 y A_{10}, la ley de recurrencia de las cuotas de amortización permite hallar el tipo de interés "i":

$$A_{10} = A_9.(1+i) \Rightarrow i = 0'05$$

Conocido el tipo de interés "i", podemos determinar la primera cuota de amortización A_1:

$$A_9 = A_1.(1+i)^8 \Rightarrow A_1 = 9828'84 \text{ €}$$

Conocida A_1 podemos determinar el principal C_0 prestado: $C_0 = A_1.s_{\overline{20}|0'05} = 325000$ €

Conocidos C_0 e "i", podemos determinar el término amortizativo "a":

$$C_0 = a.a_{\overline{20}|0'05} \Rightarrow a = 26078'04 \text{ €}$$

El capital vivo C_{10} al inicio de undécimo año, cuando aún deben pagarse 10 anualidades de 26078'04 € al 5% es $C_{10} = 26078'04.a_{\overline{10}|0'05} = 201373'9$ €, que coincide con el capital vivo C_{12} al inicio del decimotercer año, pues en los años undécimo y duodécimo sólo se pagan intereses. Además:

$$M_{10} = C_0 - C_{10} = 123626'11 \text{ €}$$

La cuantía a' que pagada en los instantes "13", "14", "15" y "16" logra que el capital vivo C_{16} al inicio del decimoséptimo año sea $C_{16} = C_{12}/3$ es $a' = 44332'88$ €, obtenida al valorar capitales en el instante "16":

$$C_{12}.1'05^4 = a'.s_{\overline{4}|0'05} + \frac{C_{12}}{3} \Rightarrow a' = 44332'88 \text{ €}$$

	a'	a'	a'	a'
12	13	14	15	16
C_{12}				$C_{12}/3$

Cuadro de amortización:

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
10	26078'84	10831'08	15247'76	123626'11	201373'89
11	14096'17	14096'17	0	123626'11	201373'89
12	14096'17	14096'17	0	123626'11	201373'89
13	44332'88	14096'17	30236'01	153862'12	171137'88
14	44332'88	11997'65	32353'23	186215'35	138874'65
15	44332'88	9714'92	34617'91	220833'30	104166'70
16	44332'88	7291'67	37041'21	257875'51	67025'49
17	71824'17	4698'78	67025'49	325000'00	0

Ejercicio 32

Hace dos años nos concedieron un hipotecario de 50000 € con amortización por el método francés, duración de 6 años al 4% de interés compuesto anual y un año de carencia en cuotas de amortización y de interés. Hoy, inicio del tercer año, solicitamos la reestructuración de las condiciones del préstamo, que se basa en:

- Durante los años tercero, cuarto y quinto se abonarán anualidades constantes que amorticen tres cuartas partes de la deuda pendiente al inicio del tercer año.
- Durante el último año, abono de una anualidad que extinga la deuda.

El banco acepta, pero exigiendo el 6% anual para los años 3º, 4º y 5º, y el 5'5% anual para el último año.

Las características comerciales a cargo del prestatario son: al inicio de la operación debe abonar el 2'5% del capital prestado en concepto de notario y registro, y al finalizar la operación, por levantamiento de hipoteca, el 1'5% del capital prestado.

Obténgase el cuadro de amortización y la ecuación de tanto efectivo para el prestatario.

Solución

		a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6
C_0	$1'04.C_0$					

Planteando la equivalencia al principio del 2º año, cuando debido al año de carencia en cuotas de amortización e interés el capital vivo es 50000.1'04 € y aún deben pagarse 5 anualidades de cuantía "a", ha de ser:

$$50000.1'04 = a.a_{\overline{5}|0'04} \Rightarrow a = 11680'61 \text{ €}$$

El capital vivo C_2 al inicio de tercer año, cuando aún deben pagarse 4 anualidades de 11680'61 € es $C_2 = 11680'61.a_{\overline{4}|0'04} = 42399'39$ €. Así, la cuantía a' que pagada en los instantes "3", "4" y "5" logra que el capital vivo al final del quinto año sea $C_2/4 = 10599'85$€ es a' = 12532'51 €, pues valorados los capitales al 6% en el instante "5", ha de ser:

$$C_2.1'06^3 = a'.s_{\overline{3}|0'06} + \frac{C_2}{4} \Rightarrow a' = 12532'51\text{€}$$

	a'	a'	a'	a''
2	3	4	5	6
C_2			$C_2/4$	0

La cuantía a'' que pagada en el instante "6" cancela la deuda es $a'' = (C_2/4).1'055 = 11182'84$€.

Cuadro de amortización:

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					50000
1					52000
2	11680'61	2080'00	9600'61	9600'61	42399'39
3	12532'51	2543'96	9998'55	19589'16	32410'84
4	12532'51	1944'65	10587'86	30177'02	21822'98
5	12532'51	1309'38	11233'13	41400'15	10599'85
6	11182'84	582'99	10599'85	52000	0

- Al inicio de la operación debe abonar el 2% del capital prestado (notario) ⇒ $G_i = 0'02.50000 = 1000$ €.
- Al finalizar la operación debe abonar el 1'5% del capital prestado ⇒ $G_f = 0'015.50000 = 750$ €.
- La ecuación de tanto efectivo para el prestatario es:

$$50000 - 1000 = a.(1+i_p)^{-2} + a'.a_{\overline{3}|i_p}.(1+i_p)^{-2} + (750 + a'').(1+i_p)^{-6}$$

		a	a'	a'	a'	a'' 750
0	1	2	3	4	5	6
50000 −1000						

Ejercicio 33

En el balance de una empresa aparece un préstamo a 8 años concedido hace 3 años, al 8% anual, con un año de carencia en la cuota de amortización y amortización mediante anualidades constantes de 24009'05 €. Hoy, a principios del cuarto año, ante la bajada de los tipos de interés, se propone al banco la renegociación de la deuda, basada en:

- Se amplía 2 años la duración del préstamo, quedando 7 años de vida.
- El tipo de interés pasará a ser el 5'5% anual en los años cuarto y quinto, el 5% anual en los años sexto y séptimo, y para los 3 últimos años será el 5% nominal anual con capitalización semestral.
- Durante los años cuarto, quinto y sexto se entregarán anualidades constantes que permitan amortizar la tercera parte del capital vivo.
- Durante los años séptimo y octavo se pagarán términos amortizativos constantes que permitan amortizar la mitad de la deuda viva al inicio del séptimo año.
- Durante los 2 últimos años se abonarán semestralidades constantes que extingan la deuda.

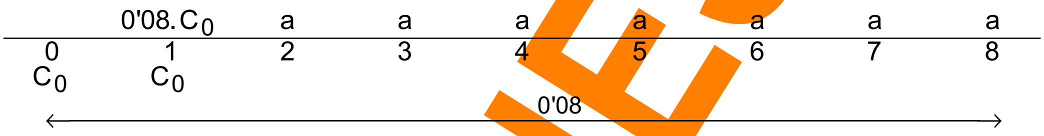
El banco acepta la reestructuración, pero exigiendo que se abone ya la quinta parte de la deuda pendiente.

Las características comerciales a cargo del prestatario son:

- Al inicio de la operación, el 0'5% del capital prestado, por gastos de notario, etc.
- Comisión por cancelación anticipada del 1%.
- Un 0'75% del capital prestado, al finalizar la operación, por levantamiento de hipoteca.

Obténgase el cuadro de amortización a partir de la reestructuración, planteando la ecuación de tanto efectivo para el prestatario.

Solución



Si $a = 24009'05$ €, valorando en el instante "1", el principal es $C_0 = 24009'05.a_{\overline{7}|0'08} = 125000$ €

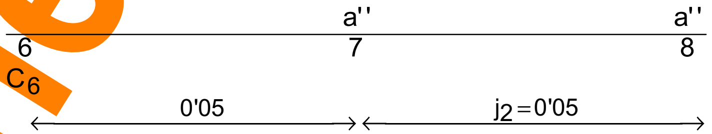
El capital vivo C_3 al inicio de cuarto año, cuando aún deben pagarse 5 anualidades de 24009'05 € al 8% es $C_3 = 24009'05.a_{\overline{5}|0'08} = 95861'17$ €. Así, si en el instante 3' amortizamos la quinta parte de C_3, el capital vivo al inicio del cuarto año queda reducido a $C'_3 = 4.C_3/5 = 76688'94$ €.

La cuantía a' que pagada en los instantes "4", "5" y "6" logra que el capital vivo al final del sexto año sea $C_6 = 2.C'_3/3 = 51125'96$ € es $a' = 12191'78$ €, pues valorando capitales en el instante "6", ha de ser:

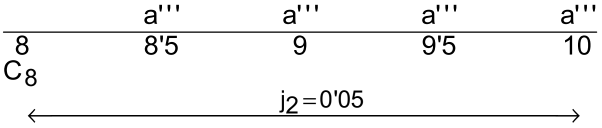
$$C'_3.1'045^2.1'05 = a'.s_{\overline{2}|0'055}.1'05 + a' + \frac{2.C'_3}{3} \Rightarrow a' = 12191'78 \text{ €}$$

La cuantía a'' que pagada en los instantes "7" y "8" logra que el capital vivo al final del octavo año sea $C_8 = C_6/2 = 25562'98$ € es $a'' = 15037'73$ €, pues valorando capitales en el instante "8", ha de ser:

$$C_6.1'05.(1'05^2 - 1) = a''.(1'05^2 - 1) + a'' + \frac{C_6}{2} \Rightarrow a'' = 15037'73 \text{ €}$$



La cuantía a''' que pagada en los instantes "8'5", "9", "9'5" y "10" cancela la deuda es la solución de la ecuación de equivalencia en el instante "8"; o sea: $C_8 = a'''.a_{\overline{4}|0'025} \Rightarrow a''' = 6795'1$ €.



Conocidas a', a'' y a''', para determinar el cuadro de amortización a partir de la reestructuración 3', además del capital vivo $C'_3 = 76688'94$ € necesitamos conocer el capital amortizado m'_3 hasta ese instante:

$$m_3 = C_0 - C_3 = 125000 - 95861'17 = 29138'83 \text{ €} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m'_3 = m_3 + \frac{C_3}{5} = 29138'83 + 19172'23 = 48311'06 \text{ €}$$

Cuadro de amortización

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
3'				48311'06	76688'94
4	12191'78	4217'89	7973'83	56284'95	68715'11
5	12191'78	3779'33	8412'45	64697'40	60302'6
6	12191'78	3015'13	9173'65	73874'05	51125'95
7	15037'83	2556'30	12481'52	86355'57	38644'43
8	15037'83	1956'37	13081'45	99437'02	25562'98
8'5	6795'10	639'07	6156'03	105593'05	19406'95
9	6795'10	485'17	6309'93	111902'98	13097'02
9'5	6795'10	327'43	6467'67	118370'65	6629'37
10	6795'10	165'73	6629'37	125000'00	

Ecuación del tanto efectivo del prestatario

- Al inicio de la operación debe abonar el 0'5% del capital prestado (notario) ⇒ $G_i = 0'005.125000 = 625$ €.
- Gastos por cancelación anticipada de 191'72 € (el 1% de $C_3/5$) en el instante 3'.
- Al finalizar la operación debe abonar el 0'0075% del capital prestado ⇒ $G_f = 0'0075.125000 = 1937'5$ €.

Así, la ecuación de tanto efectivo para el prestatario es:

$$125000 - 625 = 10000.(1+i_p)^{-1} + a.a_{\overline{2}|i_p}.(1+i_p)^{-1} + (19172'23 + 191'72).(1+i_p)^{-3} +$$
$$+a'.a_{\overline{3}|i_p}.(1+i_p)^{-3} + a''.a_{\overline{2}|i_p}.(1+i_p)^{-6} + a'''.a_{\overline{4}|i_p^{(2)}}.(1+i_p)^{-8} + 937'5.(1+i_p)^{-10}$$

	10000	a	a 19172'23 191'72	a'	a'	a'	a''	a''	a'''	a'''	a'''	a''' 1937'5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	8'5	9	9'5	10
125000 –625												