MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Tema 10

OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN

10.1 INTRODUCCIÓN

Los préstamos son operaciones en que una de las partes (el prestamista o creedor) entrega un capital a la otra parte (el prestatario o deudor), que se compromete a devolver su equivalente, mediante pagos escalonados a lo largo de la duración del préstamo.

En general, los préstamos son operaciones compuestas de prestación única y contraprestación múltiple, si bien hay préstamos que son operaciones simples, pues el prestatario devuelve con un único pago el montante del capital inicialmente prestado.

Los préstamos son operaciones de financiación para el prestatario, pues recibe un capital que necesita, y después lo va devolviendo mediante pagos sucesivos; por ello son operaciones de crédito unilateral a favor del prestamista.

Los préstamos se documentan en un contrato donde se reflejan los compromisos adquiridos por las partes, la ley financiera empleada (capitalización compuesta), tanto de valoración, etc.

Todo lo concerniente a estas operaciones se encuentra en la circular 8/90 del Banco de España, norma sexta.

10.2 PLANTEAMIENTO DE LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN

El origen de la operación es el instante en que el prestamista entrega el primer capital, y el final es el instante en que el prestatario entrega el último capital, quedando saldada la deuda.

C_0		a_1		a_2	....	a_{s-1}		a_s		a_{s+1}	....	a_{n-1}		a_n
t_0	$\xleftrightarrow{i_1}$	t_1	$\xleftrightarrow{i_2}$	t_2	....	t_{s-1}	$\xleftrightarrow{i_s}$	t_s	$\xleftrightarrow{i_{s+1}}$	t_{s+1}	....	t_{n-1}	$\xleftrightarrow{i_n}$	t_n
		C_1		C_2		C_{s-1}		C_s		C_{s+1}		C_{n-1}		0

Denotamos:

- $C_0 \equiv$ Capital prestado, la prestación.
- $i_s \equiv$ Tanto de valoración de capitales en el intervalo $(t_{s-1};t_s)$.
- $a_s \equiv$ Término amortizativo pagado en el instante t_s
- $C_s \equiv$ Capital vivo o pendiente de amortizar al inicio del periodo "$s+1$".

Análisis estático

Establece la ecuación de equivalencia financiera que proporciona el equilibrio estático y global de la operación.

- Valorando capitales en el instante t_0, la prestación es C_0, y la contraprestación es

$$a_1.(1+i_1)^{-1}+a_2.(1+i_2)^{-1}.(1+i_1)^{-1}+\ldots+a_n.(1+i_n)^{-1}.(1+i_{n-1})^{-1}.....(1+i_1)^{-1}$$

Por tanto: $$C_0=\sum_{r=1}^{n}\left(a_r.\prod_{h=1}^{r}(1+i_h)^{-1}\right)$$

- Valorando capitales en el instante t_n, la prestación es $C_0.(1+i_1).(1+i_2)....(1+i_{n-1}).(1+i_n)$, y la contraprestación es

$$a_1.(1+i_2).(1+i_3)....(1+i_n)+a_2.(1+i_3).(1+i_4)....(1+i_n)+\ldots+a_{n-1}.(1+i_n)+a_n$$

Por tanto: $$C_0.\prod_{h=1}^{n}(1+i_h)=\left(\sum_{r=1}^{n-1}\left(a_r.\prod_{h=r+1}^{n}(1+i_h)\right)\right)+a_n$$

Análisis dinámico

Nos planteamos la **determinación del capital vivo** o pendiente de amortizar C_s transcurridos "s" periodos; o sea, el capital C_s pendiente de amortizar al inicio del periodo "$s+1$".

Podemos determinar C_s mediante tres métodos distintos, que dan el mismo resultado.

- **Método retrospectivo**

  Obtenemos el capital vivo C_s por diferencia entre los compromisos pasados, valorados en el instante t_s.

  Valorando capitales en el instante t_s, la prestación es

$$C_0.(1+i_1).(1+i_2)....(1+i_{s-1}).(1+i_s)$$

  y la contraprestación es

$$a_1.(1+i_2).(1+i_3)....(1+i_s)+a_2.(1+i_3).(1+i_4)....(1+i_s)+\ ...\ +a_{s-1}.(1+i_s)+a_s$$

  Así, el capital C_s pendiente de amortizar o deuda viva es la diferencia entre la prestación y la contraprestación, valoradas ambas en el instante t_s; o sea:

$$C_s = C_0.\prod_{h=1}^{s}(1+i_h) - \left(\sum_{r=1}^{s-1}\left(a_r.\prod_{h=r+1}^{s}(1+i_h)\right)\right) + a_s$$

- **Método prospectivo**

  Obtenemos el capital vivo C_s valorando los compromisos futuros.

  Valorando capitales en el instante t_s, la contraprestación, el único compromiso futuro, es

$$a_{s+1}.(1+i_{s+1})^{-1}+a_{s+2}.(1+i_{s+2})^{-1}.(1+i_{s+1})^{-1}+\ ...\ +a_n.(1+i_n)^{-1}.(1+i_{n-1})^{-1}.....(1+i_{s+1})^{-1}$$

  Por tanto:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n}\left(a_r.\prod_{h=s+1}^{r}(1+i_h)^{-1}\right)$$

- **Método recurrente**

  Supuesto conocido C_{s-1}, es:

$$C_s = C_{s-1}.(1+i_s) - a_s$$

Descomposición del término amortizativo

Siendo $C_s = C_{s-1}.(1+i_s) - a_s$, podemos escribir:

$$a_s = C_{s-1}.(1+i_s) - C_s = \underbrace{(C_{s-1}.i_s)}_{I_s} + \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s}$$

donde:

* I_s son los intereses que ha de pagar el prestatario en el periodo "s"; o sea, los intereses producidos por el capital vivo C_{s-1} durante el periodo "s". Se llama cuota de interés.
* A_s amortización parcial de la deuda pendiente que se efectúa en el periodo "s". Se llama cuota de amortización.

Naturalmente, la suma de todas la cuotas de amortización coincide con el capital prestado C_0:

$$A_s = C_{s-1} - C_s \Rightarrow \sum_{s=1}^{n} A_s = \sum_{s=1}^{n}(C_{s-1} - C_s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{n} A_s = (C_0 - C_1) + (C_1 - C_2) + (C_2 - C_3) + \ ....\ + (C_{n-2} - C_{n-1}) + (C_{n-1} - 0) = C_0$$

Capital amortizado

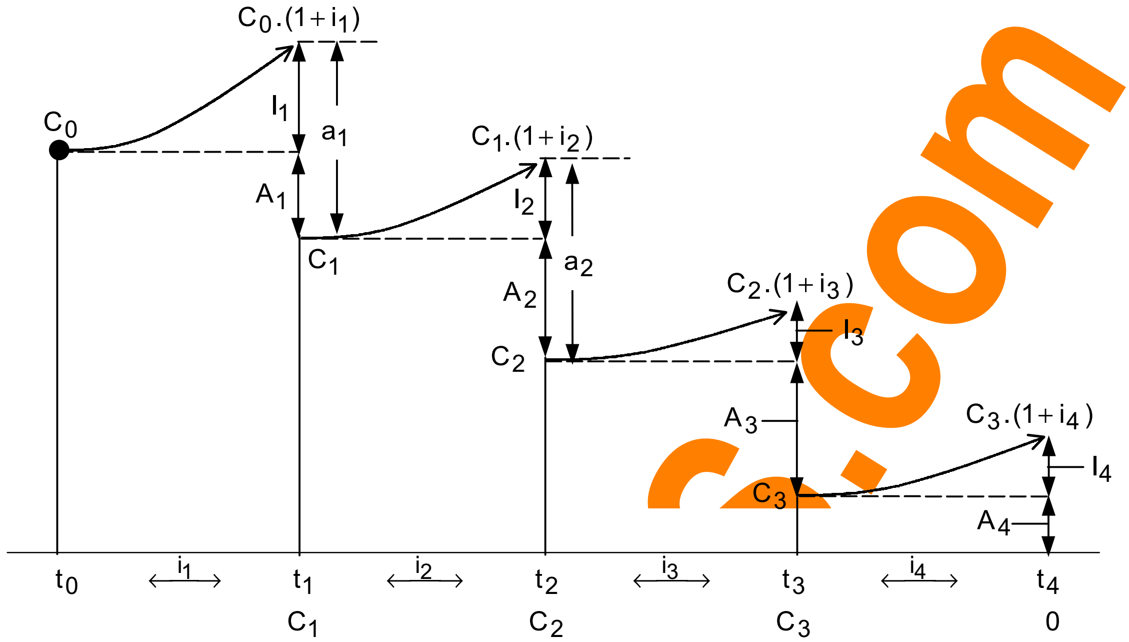
El total amortizado después de transcurridos "s" periodos se denota m_s, y es la suma de las "s" primeras cuotas de amortización:

$$m_s = A_1 + A_2 + \ ....\ + A_s = \sum_{h=1}^{s} A_h$$

Naturalmente, en todo momento se cumple que $m_s = C_0 - C_s$.

Representación gráfica

La siguiente figura ilustra el proceso de amortización, supuesto que el préstamo se amortiza en cuatro periodos de amplitud unitaria y que i_k es el tanto de valoración de capitales del k-ésimo periodo.



Cuadro de amortización

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					C_0
1	$a_1 = I_1 + A_1$	$I_1 = C_0.i_1$	A_1	$m_1 = A_1$	$C_1 = C_0 - m_1$
2	$a_2 = I_2 + A_2$	$I_2 = C_1.i_2$	A_2	$m_2 = A_1 + A_2$	$C_2 = C_0 - m_2$
3	$a_3 = I_3 + A_3$	$I_3 = C_2.i_3$	A_3	$m_3 = A_1 + A_2 + A_3$	$C_3 = C_0 - m_3$
:	:::::::::::	:::::::::::	.	:::::::::::	:
n	$a_n = I_n + A_n$	$I_n = C_{n-1}.i_n$	A_n	$m_n = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$	$C_n = C_0 - m_n$

10.3 MÉTODO AMERICANO SIMPLE

Durante los "$n - 1$" primeros periodos únicamente se pagan intereses, efectuándose la amortización total del préstamo en el último periodo; por tanto:

$$A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} = 0 \; ; \; A_n = C_0$$

Si el tipo de interés es el mismo durante toda la operación, todas las cuotas de interés son iguales:

$$I_1 = I_2 = ... = I_n = C_0.i$$

Los términos amortizativos de los "$n - 1$" primeros periodos se componen únicamente de la cuota de interés:

$$a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = C_0.i \; ; \; a_n = C_0.i + C_0$$

Al no amortizarse nada en los "$n - 1$" primeros periodos, es.

$$C_1 = C_2 = ... = C_{n-1} = C_0 \; ; \; C_n = 0$$
$$m_1 = m_2 = ... = m_{n-1} = 0 \; ; \; m_n = C_0$$

Desde la perspectiva del deudor, aunque este método es muy sencillo, tiene el inconveniente de que al final de la operación debe devolverse todo el capital prestado, lo que puede ocasionar problemas de tesorería. Este inconveniente puede resolverse constituyendo periódicamente un fondo para reconstruir el capital prestado, lo que da origen al **método americano con fondos.**

10.4 MÉTODO AMERICANO CON FONDOS

Este método combina dos operaciones: una operación de amortización por el método americano simple, y una operación de constitución, mediante aportaciones periódicas a un fondo que al final de la operación del préstamo permita rescatar el capital C_0.

La operación de constitución puede concertarse con la misma entidad o no; normalmente, el tanto de valoración de la operación de constitución suele ser inferior al tanto de la operación de amortización.

Las aportaciones al fondo suelen ser constantes (aunque pueden no serlo); en tal caso, denotándolas "F" y suponiendo que la duración de la operación es de "n" periodos de tiempo al tanto i', la equivalencia financiera al final de la operación es $C_0 = F.s_{\overline{n}|i'}$; por tanto $F = C_0 / s_{\overline{n}|i'}$.

El montante R_s constituido transcurridos "s" periodos de tiempo es $R_s = F.s_{\overline{s}|i'}$ y el saldo neto C'_s de la operación conjunta transcurridos "s" periodos de tiempo es $C'_s = C_0 - R_s$.

El desembolso del prestatario en el instante t_s es $C_0.i + F$, donde la cuantía $C_0.i$ paga los intereses del préstamo y "F" se ingresa en el fondo.

10.5 MÉTODO FRANCÉS O PROGRESIVO

Esta modalidad de préstamo estipula que el prestatario se compromete a satisfacer al prestamista al final de cada periodo un término amortizativo constituido por una **cuota de interés** (formada por los intereses generados por el capital pendiente de amortizar al inicio del periodo) y una **cuota de amortización** (destinada a la amortización parcial de la deuda).

Con el método francés todos los términos amortizativos son constantes e iguales:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
C_0 & & a & & a & \ldots\ldots & a & & a & & a & \ldots\ldots & a & & a \\
\hline
t_0 & \overset{i}{\longleftrightarrow} & t_1 & \overset{i}{\longleftrightarrow} & t_2 & \ldots\ldots & t_{s-1} & \overset{i}{\longleftrightarrow} & t_s & \overset{i}{\longleftrightarrow} & t_{s+1} & \ldots\ldots & t_{n-1} & \overset{i}{\longleftrightarrow} & t_n \\
 & & C_1 & & C_2 & & C_{s-1} & & C_s & & C_{s+1} & & C_{n-1} & & 0
\end{array}$$

Si el importe del préstamo es C_0 y los términos amortizativos son constantes, se tiene que $a = I_s + A_s$, y al ser $C_0 < C_1 < C_2 < .... < C_n$, las cuotas de interés irán disminuyendo con los sucesivos pagos, por lo que las cuotas de amortización irán aumentando, para así mantener constante el término amortizativo.

Análisis estático

Establece la ecuación de equivalencia financiera que proporciona el equilibrio estático y global de la operación.

- Valorando capitales en el instante t_0, la prestación es C_0, y la contraprestación es

$$a.\left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n}\right) \equiv a.a_{\overline{n}|i}$$

  Por tanto, ha de ser $C_0 = a.a_{\overline{n}|i}$, es decir: $a = C_0 / a_{\overline{n}|i}$.

- Valorando capitales en el instante t_n, la prestación es $C_0.(1+i)^n$, y la contraprestación es

$$a.\left(1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}\right) \equiv a.s_{\overline{n}|i}$$

  Por tanto, ha de ser $C_0.(1+i)^n = a.s_{\overline{n}|i}$; es decir: $a = C_0.(1+i)^n / s_{\overline{n}|i}$.

Análisis dinámico

Nos planteamos la **determinación del capital vivo** o pendiente de amortizar C_s transcurridos "s" periodos; o sea, el capital C_s pendiente de amortizar al inicio del periodo "$s+1$".

Podemos determinar C_s mediante tres métodos distintos, que dan el mismo resultado.

- **Método retrospectivo**

  Obtenemos el capital vivo C_s por diferencia entre los compromisos pasados, valorados en el instante t_s.

Valorando capitales en el instante t_s, la prestación es $C_0.(1+i)^s$, y la contraprestación es

$$a.\left((1+i)^{s-1}+(1+i)^{s-2}+\ldots+(1+i)+1\right)\equiv a.s_{\overline{s}|i}$$

Por tanto, el capital C_s pendiente de amortizar o deuda viva es la diferencia entre la prestación y la contraprestación, valoradas ambas en el instante t_s; o sea: $C_s = C_0.(1+i)^s - a.s_{\overline{s}|i}$.

- **<u>Método prospectivo</u>**

  Obtenemos el capital vivo C_s valorando los compromisos futuros.

  Valorando capitales en el instante t_s, la contraprestación, el único compromiso futuro, es

$$a.\left((1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots+(1+i)^{-(n-s)}\right)\equiv a.a_{\overline{n-s}|i}$$

  Por tanto, $C_s = a.a_{\overline{n-s}|i}$.

- **<u>Método recurrente</u>**

  Supuesto conocido C_{s-1}, como $C_{s-1}.(1+i) = a + C_s$, resulta obvio que $C_s = C_{s-1}.(1+i) - a$.

<u>Descomposición del término amortizativo</u>

Siendo $C_s = C_{s-1}.(1+i) - a$, podemos escribir: $a = C_{s-1}.(1+i) - C_s = \underbrace{(C_{s-1}.i)}_{I_s} + \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s} = I_s + A_s$

<u>Ley de recurrencia de las cuotas de amortización</u>

Siendo $C_s = C_{s-1}.(1+i) - a$ y $C_{s+1} = C_s.(1+i) - a$, es:

$$C_s - C_{s+1} = C_{s-1}.(1+i) - C_s.(1+i) \Rightarrow \underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s}.(1+i) \Rightarrow A_{s+1} = A_s.(1+i)$$

Como vemos, **las cuotas de amortización crecen en progresión geométrica de razón 1+i;** por tanto, siendo A_1 la primera cuota de amortización, es $A_2 = A_1.(1+i)$, $A_3 = A_1.(1+i)^2$, ... , $A_n = A_1.(1+i)^{n-1}$.

El valor de la primera cuota de amortización A_1 puede obtenerse de dos formas:

∗ Si conocemos el término amortizativo "a", es $A_1 = a - C_0.i$. En efecto:

$$a = A_1 + I_1 \Rightarrow A_1 = a - I_1 = a - C_0.i$$

$$\boxed{I_1 = C_0.i}$$

∗ Si desconocemos el término amortizativo "a", determinamos A_1 teniendo en cuenta que $C_0 = \sum_{h=1}^{n} A_h$:

$$C_0 = \sum_{h=1}^{n} A_h = A_1 + A_1.(1+i) + A_1.(1+i)^2 + \ldots + A_1.(1+i)^{n-1} = A_1.s_{\overline{n}|i} \Rightarrow A_1 = \frac{C_0}{s_{\overline{n}|i}}$$

$$\boxed{\text{es: } 1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{s-1}\equiv s_{\overline{s}|i}}$$

<u>Capital amortizado</u>

El total amortizado m_s después de transcurridos "s" periodos es $m_s = C_0 - C_s$, o también:

$$m_s = \sum_{h=1}^{s} A_h = A_1 + A_2 + \ldots + A_s = A_1 + A_1.(1+i) + A_1.(1+i)^2 + \ldots + A_1.(1+i)^{s-1} =$$

$$= A_1.\underbrace{\left(1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{s-1}\right)}_{s_{\overline{s}|i}} = A_1.s_{\overline{s}|i}$$

Observa: como $C_0 = A_1.s_{\overline{n}|i}$ y $m_s = A_1.s_{\overline{s}|i}$, es $C_s = C_0 - m_s = A_1.\left(s_{\overline{n}|i} - s_{\overline{s}|i}\right)$, lo que nos permitirá determinar C_s cuando no conozcamos el término amortizativo "a".

<u>Cuota de interés</u>

Los intereses I_s generados en el periodo "s" son $I_s = C_{s-1}.i$ ó $I_s = a - A_s$.

Cuadro de amortización

t_s	a_s	I_s	A_s	m_s	C_s
0					C_0
1	a	$C_0.i$	A_1	A_1	$C_0 - m_1$
2	a	$C_1.i$	$A_1.(1+i)$	$A_1.s_{\overline{2}|i}$	$C_0 - m_2$
3	a	$C_2.i$	$A_1.(1+i)^2$	$A_1.s_{\overline{3}|i}$	$C_0 - m_3$
:	:::::::::::	:::::::::::	.	:::::::::::	:
n	a	$C_{n-1}.i$	$A_1.(1+i)^{n-1}$	$A_1.s_{\overline{n}|i}$	$C_0 - m_n$

$$\text{con} \begin{cases} a = C_0 / a_{\overline{n}|i} \\ A_1 = a - C_0.i = C_0 / s_{\overline{n}|i} \\ A_s = A_1.(1+i)^{s-1} \\ m_s = A_1.s_{\overline{s}|i} \\ C_s = C_0 - m_s \\ I_s = C_{s-1}.i = a - A_s \end{cases}$$

Caso especial

Siendo C_s la deuda viva al inicio al inicio del periodo "$s+1$", a veces se plantea la determinación del término amortizativo constante a' que durante una serie de periodos amortiza una parte de C_s.

Por ejemplo, considera que queremos determinar el término amortizativo constante a' que durante tres periodos logra amortizar dos terceras partes de C_s, de modo que el capital vivo al inicio del periodo "$s+4$" sea $C_s/3$.

	a'	a'	a'	
s	$s+1$	$s+2$	$s+3$	....
C_s			$C_{s+3} = C_s/3$	

Estableciendo la equivalencia financiera en "$s+3$", y empleando el método retrospectivo, ha de ser:

$$\underbrace{\frac{1}{3}.C_s}_{C_{s+3}} = C_s.(1+i)^3 - a'.s_{\overline{3}|i}$$

10.6 PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS

Según el contrato de préstamo, una persona (el prestamista o creedor) entrega un capital a otra (el prestatario o deudor), que se compromete a devolverlo en el plazo y condiciones que se pacten; y del cumplimiento de esta obligación responde el prestatario con todos sus bienes presentes y futuros, en virtud del principio de responsabilidad patrimonial universal recogido en el Código Civil.

Sin embargo, esta responsabilidad universal no impide al prestatario transmitir sus bienes a terceros, ni concede al prestamista mejor derecho frente a otros acreedores del prestatario. Para asegurar el derecho del prestamista, el prestatario puede afectar especialmente un bien inmueble al cumplimiento de la obligación (hipoteca inmobiliaria), de modo que aunque dicho bien se transmita a terceros o el prestatario contraiga otras deudas, el prestamista mantiene un derecho preferente a cobrar su crédito con el montante que se obtenga de la venta del bien hipotecado.

El préstamo garantizado con hipoteca inmobiliaria es lo que comúnmente se llama préstamo hipotecario, que, debido al derecho preferente de cobro que tiene el prestamista, suele concederse a un tipo de interés inferior a los préstamos sin garantía hipotecaria.

Estos préstamos se formalizan en escritura pública, y en el Registro de la Propiedad se inscribe la correspondiente carga hipotecaria.

Pueden concederse con un tiempo de carencia en amortización, según el destino de los fondos y el plazo previsto para su recuperación. Durante la carencia, los vencimientos suelen ser trimestrales, y durante la amortización mensuales.

En el contrato figura el tanto nominal anual y la frecuencia de capitalización correspondiente.

Los tipos de interés más usados actualmente son variables e indiciados, empleando como índice de referencia el EURIBOR, al que se añade un diferencial.

10.7 AMORTIZACIÓN CON PERIODOS DE CARENCIA

Los préstamos son una forma de financiación muy utilizada por empresas y particulares, y cuando se aplican a financiar inversiones reales, suele ser conveniente que la amortización del préstamo se efectúe en los periodos en que la inversión genera rendimientos, pues al principio hay un plazo de tiempo hasta que entra en funcionamiento y se va consolidando la producción y venta.

En estos casos, a los prestatarios les interesa pagar poco o nada al principio, haciéndolo con más intensidad en los periodos en que la inversión está a pleno rendimiento. Para ello, han de negociar con el prestamista la existencia de uno o más periodos de carencia, en los que sólo se paguen intereses o incluso no se pague nada.

La carencia puede afectar a la cuota de amortización de los primeros periodos, que son nulas, pagándose sólo los intereses (carencia en cuota de amortización) o al término amortizativo completo, pues no se paga nada en los primeros periodos (carencia total).

Carencia en cuota de amortización

Siendo "s" el número de periodos de carencia en la cuota de amortización, el esquema de la operación es el siguiente:

C_0	$C_0.i$	$C_0.i$	....	$C_0.i$	$C_0.i$	a	....	a	a
0	t_1	t_2	....	t_{s-1}	t_s	t_{s+1}	....	t_{n-1}	t_n
					$C_s = C_0$				

Para obtener la cuantía del término amortizativo "a" después de los "s" periodos de carencia en la cuota de amortización, establecemos la equivalencia financiera en el instante t_s:

$$\text{Prestación} = \text{Contraprestación} \Rightarrow C_0 = a.a_{\overline{n-s}|i} \Rightarrow a = \frac{C_0}{a_{\overline{n-s}|i}}$$

En definitiva, los "s" primeros términos amortizativos son de cuantía $C_0.i$ (sólo se pagan intereses), y los restantes "$n-s$" términos son de cuantía $C_0/a_{\overline{n-s}|i}$.

Carencia total

Siendo "s" el número de periodos de carencia total, el esquema de la operación es el siguiente:

C_0			....		$C_0.i$	a	....	a	a
0	t_1	t_2	....	t_{s-1}	t_s	t_{s+1}	....	t_{n-1}	t_n
					$C_s = C_0.(1+i)^s$				

Los intereses generados y no pagados durante los "s" periodos de carencia total se añaden al capital prestado, de modo que el capital vivo C_s es $C_0.(1+i)^s$. Para obtener la cuantía del término amortizativo "a" después de los "s" periodos de carencia total, establecemos la equivalencia financiera en el instante t_s:

$$\text{Prestación} = \text{Contraprestación} \Rightarrow C_0.(1+i)^s = a.a_{\overline{n-s}|i} \Rightarrow a = \frac{C_0.(1+i)^s}{a_{\overline{n-s}|i}}$$

En definitiva, durante los "s" primeros periodos no se paga nada, y el término amortizativo de los restantes "$n-s$" términos es $C_0.(1+i)^s/a_{\overline{n-s}|i}$.

10.8 PRÉSTAMOS VALORADOS A MÁS DE UN TANTO

Debido a las fluctuaciones de los tipos de interés a lo largo de la vida del préstamo, las entidades financieras pueden optar por hacer variable el interés, pactándose la variabilidad al principio de la operación.

Sea un préstamo con términos amortizativos constantes (método francés), durante "s" periodos al tanto i_1 y al tanto i_2 durante los restantes "$n-s$" periodos.

C_0	a	a	....	a	a	a	....	a	a
t_0	t_1	t_2	....	t_{s-1}	t_s	t_{s+1}	....	t_{n-1}	t_n
		$\longleftarrow$ i_1		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$ i_2		$\longrightarrow$	

Para obtener la cuantía del término amortizativo "a", establecemos la equivalencia financiera en el origen de la operación:

$$\text{Prestación} = \text{Contraprestación} \Rightarrow C_0 = a.\left(a_{\overline{s}|i_1} + a_{\overline{n-s}|i_2}.(1+i_1)^{-s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{C_0}{a_{\overline{s}|i_1} + a_{\overline{n-s}|i_2}.(1+i_1)^{-s}}$$

Capital vivo

Determinemos el capital vivo C_r al principio de periodo "$r+1$".

- Si $r<s$ usamos el método retrospectivo: $C_r = C_0.(1+i_1)^r - a.s_{\overline{r}|i_1}$
- Si $r>s$ usamos el método prospectivo: $C_r = a.s_{\overline{n-r}|i_2}$

Cuotas de amortización

- Si $r<s$, la cuota de amortización A_r la obtenemos con la ley de recurrencia $A_r = A_1.(1+i_1)^{r-1}$, siendo

$$A_1 = a - C_0.i_1 = C_0 / s_{\overline{n}|i_1}$$

- La cuantía de la primera cuota de amortización A_{s+1} con el tanto i_2 es $A_{s+1} = a.(1+i_2)^{-(n-s)}$:

$$A_{s+1} = C_s - C_{s+1} = a.a_{\overline{n-s}|i_2} - a.a_{\overline{n-(s+1)}|i_2} =$$

$$= a.\left(\frac{1-(1+i_2)^{-(n-s)}}{i_2}\right) - a.\left(\frac{1-(1+i_2)^{-(n-s-1)}}{i_2}\right) = a.\left(\frac{(1+i_2)^{-(n-s-1)}}{i_2} - \frac{(1+i_2)^{-(n-s)}}{i_2}\right) =$$

$$= a.(1+i_2)^{-(n-s)}.\left(\frac{1+i_2}{i_2} - \frac{1}{i_2}\right) = a.(1+i_2)^{-(n-s)}$$

Conocida A_{s+1}, es:

$$A_{s+2} = A_{s+1}.(1+i_2)\ ;\ A_{s+3} = A_{s+1}.(1+i_2)^2\ ;\ \ldots\ ;\ A_n = A_{s+1}.(1+i_2)^{n-(s-1)}$$

10.9 PRÉSTAMOS INDICIADOS

Bajo esta denominación se incluyen préstamos con amortización periódica de modo que en los primeros periodos se aplica un tipo de interés fijado al inicio de la operación, y después se aplica un nuevo tipo de interés, calculado a partir de algún índice de referencia aceptado por el Banco de España, más, si existe, un diferencial. El nuevo tipo de interés se revisa periódicamente. Esta modalidad de préstamo ese emplea sobre todo en los préstamos hipotecarios, siendo los índices de referencia más usados el EURIBOR, el de la CECA (Confederación Española de Cajas de Ahorro) y el IRPH (índice de referencia de préstamos hipotecarios). Cuando se produce la revisión del tipo de interés, el prestatario tiene dos opciones: variar la cuantía del término amortizativo (manteniendo la duración del préstamo) o variar la duración del préstamo (manteniendo la cuantía de los términos amortizativos). Normalmente, en el segundo caso, el último término amortizativo será distinto al pactado en el equilibrio inicial.

Si C_s es el capital vivo al inicio del periodo "$s+1$" y el tipo de interés para los siguientes periodos es i'; entonces, si se mantiene la duración del préstamo, el nuevo término amortizativo es $a' = C_s / a_{\overline{n-s}|i'}$, pues:

$$\text{Prestación} = \text{Contraprestación} \Rightarrow C_s = a'.a_{\overline{n-s}|i'} \Rightarrow a' = C_s / a_{\overline{n-s}|i'}$$

Si quiere mantenerse la cuantía del término amortizativo, la nueva duración "x" del préstamo (contada desde el inicio del periodo "$s+1$") es la solución de la ecuación $C_s = a.a_{\overline{x}|i'}$:

$$C_s = a.a_{\overline{x}|i'} \Rightarrow C_s = a.\frac{1-(1+i')^{x}}{i'} \Rightarrow x = \frac{\text{Ln}\,(1-(C_s.i'/a))}{\text{Ln}\,(1+i')}$$

La nueva duración "x" del préstamo se redondea por exceso, lo que hace que la cuantía del último término amortizativo será distinta a la "a" del equilibrio inicial. Denotando "x" la duración redondeada del préstamo, se tiene que:

$$\text{Prestación} = \text{Contraprestación} \Rightarrow C_s = a.a_{\overline{x-1}|i'} + a'.(1+i')^{-x} \Rightarrow a' = \frac{C_s - a.a_{\overline{x-1}|i'}}{(1+i')^{-x}} < a$$

	a	a	....	a	a'
s	$s+1$	$s+2$	....	$s+(x-1)$	$s+x$
C_s					0

Por tanto, si quiere mantenerse la cuantía "a" del término amortizativo, deben pagarse "x–1" términos amortizativos con esa cuantía, y un último termino de cuantía a' que cancela la deuda.

10.10 AMORTIZACIÓN ANTICIPADA

Amortización parcial anticipada

La amortización parcial de la deuda, que suele acarrear una comisión de amortización anticipada, hace necesario reducir el término amortizativo (manteniendo la duración del préstamo) o la duración del préstamo (manteniendo la cuantía de los términos amortizativos).

SI al inicio del periodo "s+1" el prestatario entrega una cuantía "X", la nueva deuda viva C'_s al inicio de dicho periodo es $C'_s = C_s - X$; así, si quiere mantenerse la duración del préstamo, el nuevo término amortizativo es $a' = C'_s / a_{\overline{n-s}|i} < a$, pues:

$$\text{Prestación} = \text{Contraprestación} \Rightarrow C'_s = a'.a_{\overline{n-s}|i} \Rightarrow a' = C'_s / a_{\overline{n-s}|i}$$

Si quiere mantenerse la cuantía del término amortizativo, la nueva duración "x" del préstamo (contada desde el inicio del periodo "s + 1") es la solución de la ecuación $C'_s = a.a_{\overline{x}|i}$:

$$C'_s = a.a_{\overline{x}|i} \Rightarrow C_s = a.\frac{1-(1+i)^{x}}{i} \Rightarrow x = \frac{\text{Ln}\left(1-(C'_s.i/a)\right)}{\text{Ln}\,(1+i)}$$

La nueva duración "x" del préstamo se redondea por exceso, lo que hace que la cuantía del último término amortizativo será distinta a la "a" del equilibrio inicial. Denotando "x" la duración redondeada del préstamo, se tiene que:

$$\text{Prestación} = \text{Contraprestación} \Rightarrow C'_s = a.a_{\overline{x-1}|i} + a'.(1+i)^{-x} \Rightarrow a' = \frac{C'_s - a.a_{\overline{x-1}|i}}{(1+i)^{-x}} < a$$

	a	a	....	a	a'
s	$s+1$	$s+2$	....	$s+(x-1)$	$s+x$
C'_s					0

Amortización total o cancelación anticipada

La dinámica del mercado financiero hace que, a veces, las condiciones que en su momento se pactaron con la entidad financiera queden desfasados y se plantee la posibilidad de un cambio de préstamo, ya sea con la misma entidad o con otra, buscando mejores de financiación para la deuda viva.

El problema radica en determinar si los gastos que puede ocasionar el cambio de préstamo (comisiones de subrogación, cancelación, apertura, gastos de notario y de registro, impuestos, etc.) compensan la posible mejora de las nuevas condiciones.

SI al inicio del periodo "s+1" el prestatario decide cancelar anticipadamente el préstamo, la cuantía que debe entregar es $Y = C_s + g.C_s$, siendo "g" la comisión por cancelación anticipada (en tanto por uno).

10.11 TANTOS EFECTIVOS

Hasta ahora hemos considerado que las operaciones de amortización están constituidas por una prestación (capital que entrega el prestamista y recibe el prestatario), una contraprestación (capitales que entrega el prestatario y recibe el prestamista) y una ley financiera de valoración de capitales (la ley de capitalización compuesta) según la cual los compromisos de las partes resultan equivalentes.

Las operaciones así definidas se llaman puras, normales o sin características comerciales, pero lo normal es que junto a las condiciones contractuales aparezcan otras (contractuales o no) que alteren el equilibrio inicial; son las llamadas características comerciales, que podemos clasificar del siguiente modo:

Características comerciales bilaterales

Son aquéllas que, una vez definido el equilibrio inicial, alteran o modifican la cuantía o el vencimiento de la prestación o de la contraprestación, de igual forma para las dos partes contratantes; es decir, la cantidad realmente entregada por el prestamista coincide con la realmente recibida por el prestatario, y al revés.

En tal caso debemos establecer la equivalencia financiera a un tanto de interés i_e que llamamos rédito medio efectivo.

Hay dos clases de características comerciales bilaterales:

Las que modifican la cuantía de los capitales de igual forma para las dos partes contratantes, como las comisiones, primas, recargos, etc.

Las que modifican los vencimientos, anticipando o difiriendo el pago de algún capital, o fraccionándolo en el tiempo, siempre que sean adicionales y por tanto no se hayan tenido en cuenta en el establecimiento del equilibrio inicial y que afecten por igual a las partes contratantes.

Características comerciales unilaterales

Son las que afectan a la cuantía o los vencimientos de la prestación o la contraprestación en forma desigual para las partes contratantes; es decir, la cantidad realmente entregada por el prestamista no coincide con lo realmente recibido por el prestatario, y las cantidades realmente entregadas por el prestatario en cada uno de los periodos no coinciden con las recibidas por el prestamista.

En este caso debe plantearse una doble equivalencia financiera:

- La equivalencia financiera del prestamista o acreedor; establecida valorando la prestación real del prestamista y su contraprestación real a un tanto de interés i_a llamado tanto efectivo del acreedor.
- La equivalencia financiera del prestatario o deudor; establecida valorando la prestación real del prestatario y su contraprestación real a un tanto de interés i_p llamado tanto efectivo del deudor o prestatario.

Las características comerciales unilaterales pueden clasificarse según el momento en que se producen:

- Ingresos o gastos iniciales G_i: son los producidos en el origen de la operación (comisiones, notario, impuestos, gastos de apertura, etc.). Siempre existen
- Ingresos o gastos finales G_f: son los producidos al finalizar la operación (gastos de levantamiento de hipoteca, comisiones de cancelación, etc.). Siempre existen.
- Ingresos o gastos periódicos G_p: son los producidos durante la operación (gastos de administración, impuestos, etc.).

A nosotros sólo nos interesan las características comerciales unilaterales, en concreto las del prestatario:

$$\text{Prestación} = \text{Contraprestación} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 - G_i = a'_1.(1+i_p)^{-1} + a'_2.(1+i_p)^{-2} + ... + a'_n.(1+i_p)^{-n} + G_f.(1+i_p)^{-n}$$

donde a'_1, a'_2, ... ,a'_n son los términos amortizativos que entrega, siendo $a'_s = a_s + G_p$.