EXAMEN DICIEMBRE 1999

1) La ecuación $x^2 - y.z + x.y + x.z = 0$ define a "z" como función implícita de "x" e "y" en un entorno del punto:

a) $(0;0;1)$; b) $(1;0;-1)$; c) $(1;2;2)$

2) Dadas $f_1, f_2 : D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$, son funcionalmente dependientes si $\forall (x;y) \in D$:

a) Su jacobiano es distinto de cero ; b) Su jacobiano es cero
c) Su hessiano es cero

3) Sea $F: G \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$una función diferenciable en un entorno del punto $x_0 \in G$, con $F(x_0) = 0$. Una condición suficiente para que la ecuación $F(x;y) = 0$ defina implícitamente a "y" como función de "x" en un entorno de $x_0 \in G$ es que:

a) $\partial F(x_0)/\partial x \neq 0$; b) $\partial F(x_0)/\partial y \neq 0$; c) $\partial F(x_0)/\partial x = 0$

4) Si $g(x;y)$ es homogénea de grado 1, entonces $f(x;y) = 7.\text{tg}\,\dfrac{g(x;y)}{x}$ es homogénea de grado:

a) 1 ; b) 0 ; c) 2

5) Si $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ es homogénea de grado 2 y $\nabla f(1;1) = (3;5)$, entonces

a) $f(1;1) = 4$; b) $f(1;1) = 8$; c) $f(1;1) = 6$

6) Si la serie $\sum a_n$ es convergente, acerca de la serie $\sum \dfrac{a_n}{a_n^2 + a_n}$ podemos decir:

a) es convergente ; b) es divergente ; c) no es convergente

7) La función de producción de Cobb-Douglas $f(K;L) = A.K^{1/2}.L^{1/3}$ tiene rendimientos de escala: a) constantes ; b) crecientes ; c) decrecientes

8) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. La serie $\sum \dfrac{1 + a_n^2}{n}$

a) es diververgente ; b) es convergente ; c) es no sumable

9) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re$ una función diferenciable en $(0;0)$ tal que $D_u f(0;0) = 2$ y $D_v f(0;0) = 1$, siendo $u = (1;1)$ y $v = (1;-1)$. Así, $Df(0;0)$ tiene como matriz asociada

a) $(1/2;3/2)$; b) $(3/2;1/2)$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

10) Sea $f(x;y;z)$ una función real diferenciable en $(0;0;0)$, entonces:

a) $\lim\limits_{(x;y;z)\to(0;0;0)} \left(f(x;y;z) - f(0;0;0) - x.f_x(0;0;0) - y.f_y(0;0;0) - z.f_z(0;0;0)\right) = 0$

b) $\lim\limits_{(x;y;z)\to(0;0;0)} \left(f(x;y;z) - f(0;0;0) - x.f_x(x;y;z) - y.f_y(x;y;z) - z.f_z(x;y;z)\right) = 0$

c) $\lim\limits_{(x;y;z)\to(0;0;0)} \left(f(x;y;z) - x.f_x(0;0;0) - y.f_y(0;0;0) - z.f_z(0;0;0)\right) = 0$

11) El desarrollo de MacLaurin de orden 2 de la función $f(x;y) = x.e^y$ es:

a) $1 + x + x.y + T_L$
b) $x + x.y + T_L$
c) $x + 2.x.y + T_L$

12) Sea $g:\Re^2 \mapsto \Re$ una función de clase 3 tal que $g(0;0) = 0$ y $\nabla g(0;0) = (2;2)$, y $f:\Re \mapsto \Re$ de clase 3. El desarrollo de MacLaurin de $f \bullet g$ de orden 1 es:

a) $(f \bullet g)(x;y) = f(0) + 2.f'(0).(x + y) + T_L$
b) $(f \bullet g)(x;y) = f(0) + 2.(x.f_x(0;0) + y.f_y(0;0)) + T_L$
c) ninguno de los anteriores

13) Señale cuál de las siguientes igualdades es cierta:

a) $\int_a^b (f(x) + g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx - \int_b^a g(x).dx$
b) $\int_a^b f(x).g(x).dx = \int_a^b f(x).dx.\int_b^a g(x).dx$
c) $\int_a^b (f(x) - g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx - \int_b^a g(x).dx$

14) Dada la función $F(x;y) = g(x).\int_0^y f(t).dt$, con "f" y "g" continuas en $\Re$, es:

a) $\partial F/\partial y = g(x).f(y)$; b) $\partial F/\partial y = g(x).\int_0^y \frac{\partial f(t)}{\partial y}.dt$

c) $\partial F/\partial y = g'(x).\int_0^y \frac{\partial f(t)}{\partial y}.dt + g(x).f'(y)$

15) La función beta $\int_0^1 (1 - x)^{-k}.dx$ es convergente:

a) $\forall k > 0$; b) $\forall k < 1$; c) $\forall k \le 1$

16) Sea la integral paramétrica $I(a) = \int_0^{a^2} x.a^2.dx$, entonces:

a) $I'(a) = 3.a^5$
b) $I'(a) = 3.a^5 - a^3$
c) $I'(a) = 4.a^5 - 2.a^3$

17) Indique cuál de las siguientes identidades es cierta:

a) $\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x^2+y).dy.dx=\int_0^1\int_{y}^{y^2}(x^2+y).dx.dy$

b) $\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x^2+y).dy.dx=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{y}(x^2+y).dx.dy$

c) $\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x^2+y).dy.dx=\int_0^1\int_{y}^{\sqrt{y}}(x^2+y).dx.dy$

18) Sea "D" un dominio acotado de $\Re^2$ y $D*$ su dominio correspondiente en coordenadas polares, entonces:

a) $\iint_D y.dx.dy=\iint_{D*}\rho.\cos\theta.\text{sen}\,\theta.d\rho.d\theta$

b) $\iint_D y.dx.dy=\iint_{D*}\rho^2.\text{sen}\,\theta.d\rho.d\theta$

c) $\iint_D y.dx.dy=\iint_{D*}\rho.\text{sen}\,\theta.d\rho.d\theta$

Solución

1) La a) es falsa, pues $\dfrac{\partial(x^2-y.z+x.y+x.z)}{\partial z}=-y+x$ se anula en $(0;0;1)$.

La c) es falsa, pues el punto $(1;2;2)$ no satisface la ecuación dada.

La b) es correcta, pues $\dfrac{\partial(x^2-y.z+x.y+x.z)}{\partial z}=-y+x$ no se anula en el punto $(1;0;-1)$ y este punto satisface la ecuación dada.

2) La correcta es la b).

3) La correcta es la b).

4) La correcta es la b):

$$f(\lambda.x;\lambda.y)=7.\text{tg}\,\frac{g(\lambda.x;\lambda.y)}{\lambda.x}=7.\text{tg}\,\frac{\lambda.g(x;y)}{\lambda.x}=7.\text{tg}\,\frac{g(x;y)}{x}=\lambda^0.f(x;y)$$

$$\boxed{\text{como "g" es homogénea de grado 1, entonces } g(\lambda.x;\lambda.y)=\lambda^1.g(x;y)}$$

5) La correcta es la a); sin más que aplicar el teorema de Euler en el punto (1;1):

$$(1;1)\bullet\nabla f(1;1)=2.f(1;1)\Rightarrow 3+5=2.f(1;1)\Rightarrow f(1;1)=4$$

6) La serie $\sum a_n/(a_n^2+a_n)$ no satisface la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n^2+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=1\neq 0$$

$$\boxed{\text{como } \sum a_n \text{ es convergente, entonces } a_n \text{ tiende a cero si } n\to\infty}$$

y cuando a una serie le ocurre tal cosa, entonces no es convergente. (¡Ojo!, si $\sum a_n$ fuera una STP, entonces $\sum a_n/(a_n^2+a_n)$ sería divergente, por ser STP).

7) La correcta es la c), porque "f" es homogénea de grado $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<1$

8) La correcta es la a), pues $\sum(1+a_n^2)/n$ es una serie de términos positivos, además, por ser $a_n^2 \geq 0$, es $\sum(1+a_n^2)/n \geq \sum 1/n$, y como $\sum 1/n$ es divergente, entonces $\sum(1+a_n^2)/n$ también es divergente.

9) La correcta es la b): la matriz asociada a la aplicación lineal $Df(0;0)$ es $\nabla f(0;0)=(a;b)$; y como:

$$\left.\begin{cases} D_u f(0;0)=2 \Rightarrow (1;1)\bullet(a;b)=2 \Rightarrow a+b=2 \\ D_v f(0;0)=1 \Rightarrow (1;-1)\bullet(a;b)=1 \Rightarrow a-b=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=3/2 \\ b=1/2 \end{cases}$$

10) La correcta es la a), pues si "f" es diferenciable en $(0;0;0)$, entonces:

$$\lim_{(x;y;z)\to(0;0;0)} \frac{f(x;y;z)-f(0;0;0)-x.f_x(0;0;0)-y.f_y(0;0;0)-z.f_z(0;0;0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}}=0$$

y como el denominador tiende a cero, el numerador también.

11) La correcta es la b):

$$f(x;y)=f(0;0)+\frac{1}{1!}.\nabla f(0;0)\bullet\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2!}.\begin{bmatrix} x-0 & y-0 \end{bmatrix}\bullet Hf(0;0)\bullet\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}+T_L=$$

$$\boxed{f(0;0)=0\ ;\ \nabla f(0;0)=(1;0)\ ;\ Hf(0;0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$=0+(1;0)\bullet\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}+\frac{1}{2!}.\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+T_L=y+x.y+T_L$$

12) La correcta es la a), pues siendo $h=f\bullet g$, es:

$$h(x;y)=h(0;0)+\frac{1}{1!}.\nabla h(0;0)\bullet\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}+T_L=f(0)+2.f'(0).(x+y)+T_L$$

$$\boxed{\begin{array}{c} h(0;0)=f(g(0;0))=f(0) \\ \nabla h(0;0)=f'(0)\bullet\nabla g(0;0)=f'(0)\bullet(2;2)=(2.f'(0)\,;\,2.f'(0)) \end{array}}$$

13) La correcta es la a):

$$\int_a^b (f(x)+g(x)).dx=\int_a^b f(x)+\int_a^b g(x).dx=\int_a^b f(x).dx-\int_b^a g(x).dx$$

14) La correcta es la a):

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial y}=\frac{\partial(g(x).\int_0^y f(t).dt)}{\partial y}=g(x).\frac{\partial(\int_0^y f(t).dt)}{\partial y}=g(x).f(y)$$

15) Se sabe $\beta(m;n)=\int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}.dx$ sólo converge si $m>0$ y $n>0$; así,

$$\int_0^1 (1-x)^{-k}.dx \equiv \int_0^1 x^0.(1-x)^{-k}.dx = \beta(1;1-k)$$

será convergente si $1-k>0 \Rightarrow k<1$

16) La correcta es la a):

$$I(a)=\int_0^{a^2} x.a^2.dx \Rightarrow \frac{dI(a)}{da} = \int_0^{a^2} \frac{\partial(x.a^2)}{\partial a}.dx + f(a^2;a).\frac{d(a^2)}{da} - f(0;a).\frac{d0}{da} =$$

* Todo el mundo sabe que si $I(a)=\int_{u(a)}^{v(a)} f(x;a).dx$, entonces:

$$\frac{dI(a)}{da} = \int_{u(a)}^{v(a)} \frac{\partial f(x;a)}{\partial a}.dx + f(v(a);a).\frac{dv(a)}{da} - f(u(a);a).\frac{du(a)}{da}$$

*En nuestro caso es $u(a)=0$, $v(a)=a^2$ y $f(x;a)=x.a^2$

$$= \int_0^{a^2} 2.a.x.dx + a^2.a^2.2.a = a.\left[x\right]_0^{a^2} + 2.a^5 = 3.a^5$$

17) La correcta es la c): el dominio de integración es el que limitan la recta $y=x$ y la parábola $y=x^2$.

18) La correcta es la b), pues $y=\rho.\text{sen}\,\theta$, y $dx.dy=\rho.d\rho.d\theta$

TEORÍA (1'25 PUNTOS)

Dadas dos funciones $f:\Re^2 \mapsto \Re$ y $g:\Re \mapsto \Re$ de clase 3, determina el desarrollo de MacLaurin de orden 2 de la función $h = g \bullet f$

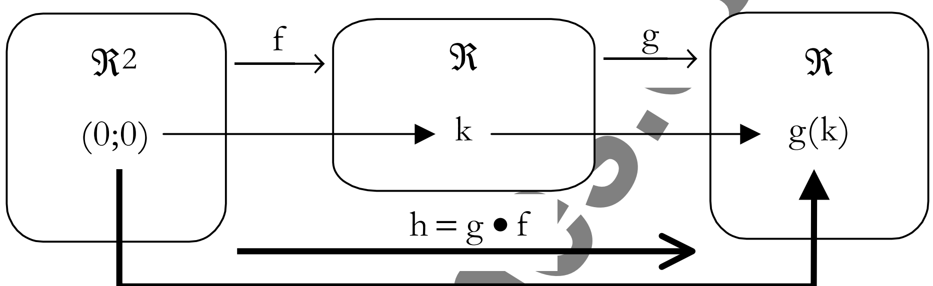
Solución

• El desarrollo de MacLaurin de orden 2 de la función $h:\Re^2 \mapsto \Re$ es:

$$h(x;y) = h(0;0) + x.\frac{\partial h(0;0)}{\partial x} + y.\frac{\partial h(0;0)}{\partial y} +$$

$$+\frac{1}{2}.\left(x^2.\frac{\partial^2 h(0;0)}{\partial x^2} + 2.x.y.\frac{\partial^2 h(0;0)}{\partial x \partial y} + y^2.\frac{\partial^2 h(0;0)}{\partial y^2}\right) + T_L \quad (I)$$

• Ya sólo nos queda hacer el calculote, y para ello, por comodidad, "ponemos nombre" a la imagen según "f" del punto $(0;0) \in \Re^2$; por ejemplo, $f(0;0) = k$.



• Es

$$h(0;0) = g(f(0;0)) = g(k)$$

$$\frac{\partial h(0;0)}{\partial x} = g'(k).\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} \;;\; \frac{\partial h(0;0)}{\partial y} = g'(k).\frac{\partial f(0;0)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 h(0;0)}{\partial x^2} = g''(k).\frac{\partial f(0;0)}{\partial x}.\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} + g'(k).\frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h(0;0)}{\partial x \partial y} = g''(k).\frac{\partial f(0;0)}{\partial y}.\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} + g'(k).\frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 h(0;0)}{\partial y^2} = g''(k).\frac{\partial f(0;0)}{\partial y}.\frac{\partial f(0;0)}{\partial y} + g'(k).\frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial y^2}$$

y sustituyendo en (I) tenemos el desarrollo pedido.

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Demuestre que si $f:\mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}$ es homogénea de grado 1, entonces su hessiano es cero si $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Solución

• El hessiano de una función $f:\mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}$ es el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \partial^2 f(x;y)/\partial x^2 & \partial^2 f(x;y)/\partial x\partial y \\ \partial^2 f(x;y)/\partial y\partial x & \partial^2 f(x;y)/\partial y^2 \end{vmatrix}$$

por tanto, el hessiano será nulo si:

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x\partial y}.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y\partial x} = 0 \quad (I)$$

Veamos que así sucede; en efecto, si $f:\mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}$ es homogénea de grado 1, en virtud del teorema de Euler, es:

$$x.\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} + y.\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = f(x;y) \quad (II)$$

• Derivando respecto de "x" los dos miembros de (II), resulta:

$$1.\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} + x.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} + y.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} + y.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y\partial x} = 0 \underset{\boxed{\text{si es } x \neq 0}}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} = -\frac{y}{x}.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y\partial x} \quad (III)$$

• Derivando respecto de "y" los dos miembros de (II), resulta:

$$x.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x\partial y} + 1.\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} + y.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x\partial y} + y.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = 0 \underset{\boxed{\text{si es } y \neq 0}}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = -\frac{x}{y}.\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y\partial x} \quad (IV)$$

• Multiplicado miembro a miembro (III) y (IV) se obtiene (I), que es válido si $x \neq 0$ e $y \neq 0$

TEORÍA (1 PUNTO)

Defina las series geométricas y analice su carácter en función de la razón.

EJERCICIO (1'75 PUNTOS)

Pruebe que el sistema

$$\begin{gathered} v^2.\mathrm{Ln}\,y + 2.x^3.e^u - 2 = 0 \\ x.y^2 - e^u.v^2 = 0 \end{gathered}$$

define implícitamente a "u" y "v" como funciones de "x" e "y" en un entorno del punto $P = (x;y;u;v) = (1;1;0;1)$. Calcule las derivadas $\partial u(P)/\partial x$ y $\partial v(P)/\partial x$

Solución

- Sean "F" y "G" las funciones tales que:

$$\begin{gathered} F(x;y;u;v) = v^2.\mathrm{Ln}\,y + 2.x^3.e^u - 2 \\ G(x;y;u;v) = x.y^2 - e^u.v^2 \end{gathered}$$

- Debemos comprobar que se cumplen las exigencias del teorema de existencia de campos vectoriales definidos implícitamente por un sistema de ecuaciones, como en efecto sucede, pues el punto $(1;1;0;1)$ satisface las dos ecuaciones del sistema dado, las funciones "F" y "G" son continuas y con funciones derivadas primeras continuas en el punto $(1;1;0;1)$, y es:

$$\begin{vmatrix} F_u(1;1;0;1) & F_v(1;1;0;1) \\ G_u(1;1;0;1) & G_v(1;1;0;1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} F(x;y;u;v) = v^2.\mathrm{Ln}\,y + 2.x^3.e^u - 2 \Rightarrow \begin{cases} F_u(1;1;0;1) = 2 \\ F_v(1;1;0;1) = 0 \end{cases} \\ G(x;y;u;v) = x.y^2 - e^u.v^2 \Rightarrow \begin{cases} G_u(1;1;0;1) = -1 \\ G_v(1;1;0;1) = -2 \end{cases} \end{gathered}}$$

- Es:

$$\frac{\partial u(1;1)}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x(1;1;0;1) & F_v(1;1;0;1) \\ G_x(1;1;0;1) & G_v(1;1;0;1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u(1;1;0;1) & F_v(1;1;0;1) \\ G_u(1;1;0;1) & G_v(1;1;0;1) \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = -3$$

$$\boxed{\begin{gathered} F(x;y;u;v) = v^2.\mathrm{Ln}\,y + 2.x^3.e^u - 2 \Rightarrow F_x(1;1;0;1) = 6 \\ G(x;y;u;v) = x.y^2 - e^u.v^2 \Rightarrow G_x(1;1;0;1) = 1 \end{gathered}}$$

$$\frac{\partial v(1;1)}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u(1;1;0;1) & F_x(1;1;0;1) \\ G_u(1;1;0;1) & G_x(1;1;0;1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u(1;1;0;1) & F_v(1;1;0;1) \\ G_u(1;1;0;1) & G_v(1;1;0;1) \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = 2$$

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Calcule $\iint_D 2.x.y.dx.dy$, siendo:

$$D = \left\{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x^2 + y^2 \le 9,\ y + 2.x \ge 2,\ y \ge 1,\ x \ge 0\right\}$$

Solución

$$\iint_D 2.x.y.dx.dy =$$

$$= \int_{y=1}^{y=2} \left(\int_{x=(2-y)/2}^{x=\sqrt{9-y^2}} 2.x.y.dx \right).dy + \int_{y=2}^{y=3} \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}} 2.x.y.dx \right).dy =$$

$$= \int_{y=1}^{y=2} y.\left[x^2\right]_{x=(2-y)/2}^{x=\sqrt{9-y^2}}.dy + \int_{y=2}^{y=3} y.\left[x^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}}.dy =$$

$$= \int_{y=1}^{y=2} y.((9-y^2) - \frac{(2-y)^2}{4}).dy + \int_{y=2}^{y=3} y.(9-y^2).dy = \ldots\ldots\ldots$$