EXAMEN DICIEMBRE 1999

01) Sea la aplicación $g:\Re^2 \mapsto \Re^2$ definida como $g(x;y) = (x+y;x-y)$, y sea $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ un monomorfismo. Sobre la aplicación $f \bullet g$ puede decirse que:

a) es un monomorfismo ; b) no es un monomorfismo
c) puede ser monomorfismo o no

02) Si "f" y "g" son monomorfismos de $\Re^n$ en $\Re^m$, entonces:

a) "$f-g$" siempre es monomorfismo
b) $\ker.(f-g) = (\ker.f) \cap (\ker.g)$
c) ninguna de las anteriores ha de cumplirse

03) Sean "A" y "B" tales que $B = C^{-1}AC$; podemos afirmar que:

a) "B" tiene los mismos vectores propios que "A"
b) "A" y "B" son matrices congruentes si "C" es ortogonal
c) "C" es siempre una matriz ortogonal

04) Sea $P(\lambda) = (\lambda-1).(\lambda+1)$ el polinomio característico de una matriz $A_{2\times 2}$; es:

a) $tr(A) = 0$; b) $|A| = -1$; c) "A" no es diagonalizable

05) La matriz $A = \begin{bmatrix} a & -1/2 \\ 1/2 & a \end{bmatrix}$ es ortogonal si:

a) $\forall a \in \Re$; b) $a = 0$; c) $a = \sqrt{3}/2$

06) Si "C" es una matriz cualquiera y "A" es la siguiente matriz particionada:

$$A = \begin{bmatrix} CC^t & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

a) "A" es simétrica ; b) "A" es ortogonal
c) no se cumple, en general, ni a) ni b)

07) Sea la matriz particionada $B = \begin{bmatrix} A^{-1}-I & 0 \\ I & A \end{bmatrix}$, con "A" regular; es:

a) $B^{-1} = \begin{bmatrix} (A^{-1}-I)^{-1} & 0 \\ -((A^{-1}-I)A)^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix}$; b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} A-I & A^{-1} \\ -((A^{-1}-I)A)^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix}$

c) $B^{-1} = \begin{bmatrix} A-I & 0 \\ -(A(A^{-1}-I))^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix}$

08) La aplicación lineal $f(x;y;z) = (a.x - a.y + z; a.x + a.y + z)$

a) es epimorfismo $\forall a \in \Re$; b) es epimorfismo $\forall a \neq 0$
c) no es epimorfismo para ningún valor de "a"

09) Sea $f : \Re^n \mapsto \Re^n$ una aplicación lineal. ¿cuál de las siguientes igualdades no tiene que cumplirse forzosamente siempre?

a) $f(0) = 0$; b) $f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall \ x, y \in \Re^n$
c) $f(e_i) = e_i$, siendo e_i el i - ésimo vector de la base canónica de $\Re^n$

10) Si "A" es una matriz ortogonal, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre cierta?:

a) $|A| \neq 0$; b) $|A| = 0$; c) $|A| = 1$

11) La forma cuadrática $Q(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2 - 4.x_2.x_3$ es

a) definida negativa ; b) indefinida ; c) semidefinida negativa

12) Si "A" es una matriz definida positiva y "n" es natural, la matriz $(-A)^{2.n+1}$ es:

a) definida positiva ; b) indefinida ; c) definida negativa

13) Si Q(X) es una forma cuadrática semidefinida negativa, en el subespacio $BX = 0$

a) siempre es semidefinida negativa ; b) puede ser indefinida
c) puede ser definida negativa

14) Sea $A_{3\times3}$ una matriz simétrica con tres valores propios distintos entre sí, y "A" una matriz diagonal tal que existe "C" regular con $D = C^{-1}AC$. ¿Cuál de las siguientes opciones podría corresponderse con la matriz "C"?:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

15) Si $S = \{(x;y) / f(x;y) = C\}$ es la curva de nivel "C" de la función $f : \Re^2 \mapsto \Re$, el dominio de la función $g(x;y) = \sqrt[4]{f(x;y) - C}$

a) Coincide con el dominio de "f"
b) Está formado por los puntos del dominio de definición de "f" que pertenecen a curvas de nivel correspondientes a constantes inferiores a "C".
c) Ninguna de las anteriores

16) Sea $f: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ y $x_0 \in D$ un punto en el que existen los límites reiterados de "f" y coinciden con $f(x_0)$. Entonces:

a) "f" es continua en x_0 ; b) "f" tiene límite en x_0
c) las anteriores son falsas

17) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re$ una aplicación lineal; teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f(a;b)}{\partial x} = D_{(1;0)} f(a;b)$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?:

a) No podemos garantizar la existencia de la $\partial f/\partial x$ en el punto $(a;b)$
b) Existe $\partial f/\partial x$ en el punto $(a;b)$ y vale 1
c) Existe $\partial f/\partial x$ en el punto $(a;b)$ y siempre vale $f(1;0)$

18) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re$ tal que el límite direccional por rectas

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y = 1 + m(x-1)}} f(x;y) = 2$$

y existe $\lim_{(x;y) \to (1;1)} f(x;y)$, entonces el límite $\lim_{\substack{x \to 1 \\ y = 1 + m.(x-1)^2}} f(x;y)$

a) existe y vale 2 ; b) no existe
c) no podemos garantizar su existencia, pero si existe es 2

Solución

01) La aplicación lineal "g" es un monomorfismo (pues el rango de su matriz asociada coincide con la dimensión del espacio "inicial"); y como "f" también es un monomorfismo, entonces $f \bullet g$ es un monomorfismo.

02) La a) es falsa: por ejemplo, si $f = g$ entonces "$f - g$" es la aplicación lineal nula, que no es monomorfismo (no es inyectiva). La b) también es falsa: por ejemplo, si $f = g$ son aplicaciones lineales no nulas $\Rightarrow$ "$f - g$" es la aplicación lineal nula $\Rightarrow \ker.(f - g) = \Re^n \neq (\ker.f) \cap (\ker.g) = (\ker.f) = (\ker.g)$

03) La correcta es la b).

04) La correcta es la a): la traza de una matriz cuadrada coincide con la suma de los autovalores de la matriz, y estos son $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

05) Las columnas de una matriz ortogonal siempre forman una base ortonormal, y sólo sucede tal cosa en el caso c).

06) La correcta es la a): la matriz CC^t siempre es simétrica.

07) La correcta es la a).

08) El espacio "final" de "f" tiene dimensión 2, y la matriz asociada a "f" es:

$$A = \begin{bmatrix} a & -a & 1 \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

Si $a \neq 0$ es $rg(A) = 2 = \dim.(\text{Espacio Final})$; así, "f" es epimorfismo si $a \neq 0$.

09) La correcta es la c).

10) La a), pues si "A" es ortogonal, entonces $|A| = 1$ ó $|A| = -1$

11) La correcta es la b): $Q(1;0;0) = 1 > 0$, y $Q(0;1;1) = -3 < 0$

12) Si λ_i es autovalor de "A" entonces $\lambda_i > 0$ (pues "A" es definida positiva) $\Rightarrow$ $-\lambda_i < 0$ es autovalor de "$-A$" $\Rightarrow$ $(-\lambda_i)^{2.n+1} \equiv (-\lambda_i)^{impar} < 0$ es autovalor de $(-A)^{2.n+1} \Rightarrow (-A)^{2.n+1}$ es definida negativa.

13) La correcta es la c): si todos los alumnos de la Facultad tienen coeficiente intelectual no positivo (≤ 0), puede suceder que todos los alumnos de segundo curso tengan coeficiente intelectual negativo.

14) Si $A_{3\times 3}$ es simétrica, autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales, y sólo en el caso a) sucede que las tres columnas de la matriz "C" son ortogonales dos a dos.

15) La correcta es la c), pues:

$$\text{Dom.} g = \{(x;y) / f(x;y) - C \geq 0\} = \{(x;y) / f(x;y) \geq C\}$$

16) La correcta es la c).

17) La correcta es la c), pues si $f: \Re^2 \mapsto \Re$ es una aplicación lineal, su expresión matemática es de la forma $f(x;y) = m.x + n.y$, donde "m" y "n" son constantes reales; así:

$$\frac{\partial f(a;b)}{\partial x} = m = f(1;0)$$

18) La correcta es la a), pues si "f" tiene límite en el punto $(1;1)$, el límite es el mismo sea cual sea la trayectoria de aproximación a $(1;1)$ que se elija, y sabemos que el límite según una cierta trayectoria es 2.

EJERCICIO (2 PUNTOS)

Sea la forma cuadrática

$$Q(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + x_2^2 + b^2.x_3^2 + 2.b.x_2.x_3 \ ; \ b \in \Re,\ b \neq 0$$

1) Clasifíquela en función del parámetro "b" y encuentre su expresión canónica, hallando una matriz ortogonal para el cambio de base correspondiente a la expresión diagonal.

2) Determine su signo si se restringe al subespacio vectorial

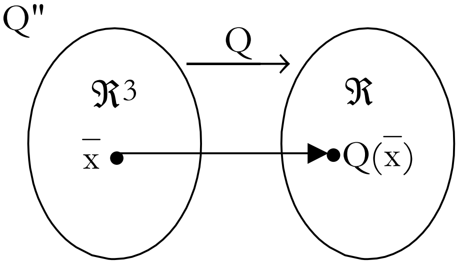
$$S = \{\bar{x} \in \Re^3 \ / \ x_1 - a.x_2 = 0,\ \frac{x_2}{b} - x_3 = 0,\ a \in \Re\}$$

3) Halle una aplicación lineal cuyo núcleo sea "S" y diga qué tipo de aplicación es.

Solución

Consideramos que la base de referencia en el espacio vectorial $\Re^3$ es la canónica; así, entendemos que x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de un vector $\bar{x} \in \Re^3$ respecto de dicha base. Por tanto, la expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & b^2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (I)$$



1) La forma cuadrática "Q" es semidefinida positiva, pues todos los autovalores de "A" son no negativos (≥ 0):

$$\left| A - \lambda \bullet I \right| = -\lambda^3 + (2 + b^2).\lambda^2 - (1 + b^2).\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 + b^2 > 0,\ \forall b \end{cases}$$

• Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 0$:

$$(A - 0 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & b^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -b.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 0) = \left\{(0;-b.\theta;\theta),\ \forall \theta \in \Re\right\} = \left\{\theta \bullet (0;-b;1),\ \forall \theta \in \Re\right\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (0;-b;1)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{h}_1}{\left\| \bar{h}_1 \right\|} = (0;-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}};\frac{1}{\sqrt{1+b^2}})$$

es una base ortonormal del subespacio.

• Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$:

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & b^2 - 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} b.x_3 = 0 \\ b.x_2 + (b^2 - 1).x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \left\{ (\theta; 0; 0),\ \forall \theta \in \Re \right\} = \left\{ \theta \bullet (1; 0; 0),\ \forall \theta \in \Re \right\}$$

El vector $\bar{h}_2 = (1; 0; 0)$ es una base del subespacio, y una base ortonormal del subespacio es la formada por el vector $\bar{u}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| = (1; 0; 0)$.

• Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1 + b^2$:

$$(A - (1 + b^2) \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & b \\ 0 & b & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -b^2.x_1 = 0 \\ x_3 = b.x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = b.x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1 + b^2) = \left\{ (0; \theta; b.\theta),\ \forall \theta \in \Re \right\} = \left\{ \theta \bullet (0; 1; b),\ \forall \theta \in \Re \right\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (0; 1; b)$ es una base del subespacio, y una base ortonormal del subespacio es la formada por el vector

$$\bar{u}_3 = \frac{\bar{h}_3}{\|\bar{h}_3\|} = (0; \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}})$$

• Si en el espacio $\Re^3$ tomamos como base de referencia la base ortonormal que forman los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$, se modifican las coordenadas de $\bar{x} \in \Re^3$, de modo que si $\bar{x} = x_1^* \bullet \bar{u}_1 + x_2^* \bullet \bar{u}_2 + x_3^* \bullet \bar{u}_3$, entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b/\sqrt{1 + b^2} & 0 & 1/\sqrt{1 + b^2} \\ 1/\sqrt{1 + b^2} & 0 & b/\sqrt{1 + b^2} \end{bmatrix}}^{C \equiv \text{matriz de "paso", es ortogonal}} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \end{matrix}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión canónica de la forma cuadrática "Q" (o sea, la expresión de "Q" respecto de la base ortonormal de $\Re^3$ que forman los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$); resulta:

$$Q(\bar{p}) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+b^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = (x_2^*)^2 + (1+b^2).(x_3^*)^2$$

$$\boxed{C^t \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+b^2 \end{bmatrix}}$$

- La forma cuadrática "Q" es definida positiva si se restringe al subespacio dado "S", ya que:

$$Q(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + x_2^2 + b^2.x_3^2 + 2.b.x_2.x_3 =$$

$$= (a.x_2)^2 + x_2^2 + b^2.(x_2/b)^2 + 2.b.x_2.(x_2/b) =$$

$$\boxed{S = \left\{ \bar{x} \in \Re^3 \ / \ x_1 - a.x_2 = 0, \ \frac{x_2}{b} - x_3 = 0 \right\} = \left\{ (x_1;x_2;x_3) \Big/ \begin{matrix} x_1 = a.x_2 \\ x_3 = x_2/b \end{matrix} \right\}}$$

$$= (4 + a^2).x_2^2 > 0, \ \forall \ x_2 \neq 0, \ \forall a$$

3) Una aplicación lineal cuyo núcleo sea "S" es la $f: \Re^3 \mapsto \Re^6$ cuya expresión respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^6$ es:

$$f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 - a.x_2; \frac{x_2}{b} - x_3; 0; 0; 0; 0)$$

Su matriz asociada respecto de dichas bases es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1/b & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La aplicación "f" no es monomorfismo (no es inyectiva), pues el rango de "P" no coincide con la dimensión del espacio "inicial" $\Re^3$; tampoco es epimorfismo (no es sobreyectiva), pues el rango de "P" no coincide con la dimensión del espacio "final" $\Re^6$.

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Sea la función $f:\Re^2 \mapsto \Re$ definida como $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{2.y.x^3}{x^2+y^2} & \text{si}(x;y)\neq(0;0) \\ 0 & \text{si}(x;y)=(0;0)\end{cases}$

1) ¿Es "f" continua en el punto $(0;0)$?

2) Compruebe que $x.\dfrac{\partial f(0;y)}{\partial x}+y.\dfrac{\partial f(x;0)}{\partial y}=2.x.y,\ \forall\, x,y\in\Re$

Solución

1) Como $f(0;0)=0,$ la función "f" será continua en el punto $(0;0)$ si su límite en dicho punto es 0 (coincide con $f(0;0)$); y así sucede, pues:

$$\left|\frac{2.y.x^3}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{2.y.x^3}{x^2+y^2}\right|=\left|2.y.x.\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|=2.|y|.|x|.\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq$$

$$\leq 2.|y|.|x|<\varepsilon \text{ si }\begin{cases}|x|<\sqrt{\varepsilon/2}\\ |y|<\sqrt{\varepsilon/2}\end{cases}$$

$$\boxed{\forall\ (x;y)\neq(0;0),\text{ es }\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1}$$

2) Si $(0;y)\neq(0;0),$ es:

$$\frac{\partial f(0;y)}{\partial x}=\lim_{\lambda\to 0}.\frac{f(0+\lambda;y)-f(0;y)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}.\frac{\dfrac{2.y.(0+\lambda)^3}{(0+\lambda)^2+y^2}-\dfrac{2.y.0^3}{0^2+y^2}}{\lambda}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}.\frac{\dfrac{2.y.\lambda^3}{\lambda^2+y^2}}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}.\frac{2.y.\lambda^2}{\lambda^2+y^2}=\frac{2.y.0^2}{0^2+y^2}=\frac{0}{y^2}=0$$

$$\boxed{\text{pues } y\neq 0}$$

• Si $(x;0)\neq(0;0),$ es:

$$\frac{\partial f(x;0)}{\partial y}=\lim_{\theta\to 0}.\frac{f(x;0+\theta)-f(x;0)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}.\frac{\dfrac{2.(0+\theta).x^3}{x^2+(0+\theta)^2}-\dfrac{2.0.x^3}{x^2+0^2}}{\theta}=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}.\frac{\dfrac{2.\theta.x^3}{x^2+\theta^2}}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}.\frac{2.x^3}{x^2+\theta^2}=\frac{2.x^3}{x^2+0^2}=2.x$$

• En consecuencia, si $(x;0)\neq(0;0),$ y $(0;y)\neq(0;0),$ es:

$$x.f_x(0;y)+y.f_y(x;0)=x.0+y.(2.x)=2.x.y$$

• En el punto $(0;0)$, es:

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(0+\lambda;0)-f(0;0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\dfrac{2.0.(0+\lambda)^3}{(0+\lambda)^2+y^2}-0}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{0}{\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{\theta\to 0} \frac{f(0;0+\theta)-f(0;0)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\dfrac{2.(0+\theta).0^3}{0^2+(0+\theta)^2}-0}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{0}{\theta} = 0$$

Por tanto, si $x = 0$ e $y = 0$, también se satisface la condición

$$x.f_x(0;y) + y.f_y(x;0) = 2.x.y$$

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Sea la forma cuadrática $Q(X) = X^t AX$; se define $Q_B(X) = (BX)^t A(BX)$, siendo "B" una matriz ortogonal. Demostrar que "Q" y "Q_B" tienen el mismo signo.

Solución

• Es: $$Q_B(X) = (BX)^t A(BX) = X^t(B^t AB)X \underset{\boxed{\text{"B" ortogonal} \Rightarrow B^t = B^{-1}}}{=} X^t(B^{-1}AB)X$$

• Como las matrices "A" (asociada a "Q") y $H = B^{-1}AB$ (asociada a "Q_B") son semejantes, tienen el mismo polinomio característico:

$$H - \lambda I = B^{-1}AB - \lambda I = B^{-1}AB - \lambda B^{-1}B =$$
$$= B^{-1}(AB - \lambda B) = B^{-1}(A - \lambda I)B$$

Tomando determinantes:

$$|H - \lambda I| = |B^{-1}(A - \lambda I)B| = |B^{-1}|.|A - \lambda I|.|B| \underset{\boxed{\text{pues } |B^{-1}|.|B| = 1}}{=} |A - \lambda I|$$

• Si "A" y "H" tienen el mismo polinomio característico $\Rightarrow$ tienen los mismos autovalores $\Rightarrow$ tienen el mismo signo.

TEORÍA (2 PUNTOS)

1) Demostrar que los valores propios de una matriz cuadrada son las raíces de su polinomio característico.

2) Si $f: E \mapsto F$ es una aplicación lineal, demostrar que:

$$\text{"f" es monomorfismo} \Leftrightarrow \ker.f = \{\bar{0}\}$$