EXAMEN SEPTIEMBRE 1999

1) Considérese la región $D=\{(x;y)\in\Re^2\ /\ x\in[1;2],\ y\in[3;4]\}$, entonces:

a) $\iint_D f(x;y).dx.dy=\int_3^4\int_1^2 f(x;y).dx.dy$

b) $\iint_D f(x;y).dx.dy=\int_1^3\int_2^4 f(x;y).dx.dy$

c) $\iint_D f(x;y).dx.dy=\int_1^2\int_1^2 f(x;y).dx.dy+\int_3^4\int_3^4 f(x;y).dx.dy$

2) Supongamos que $\int_0^x f(t).dt=\operatorname{tg}x,\ \forall x\in[0;\pi/2)$, entonces:

a) $f(x)=\operatorname{tg}x$; b) $f(x)=\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}0$; c) $f(x)=1+\operatorname{tg}^2x$

3) Sea $f:[-1;3]\mapsto\Re$ continua. Si $\int_{-1}^3 f(x).dx=5$ y $\int_{-1}^1 f(x).dx=2$, entonces:

a) $\int_1^3 f(x).dx=3$; b) $\int_1^3 f(x).dx=7$; c) $\int_1^3 f(x).dx=-7$

4) Si F y G son dos primitivas de la función $f:[a;b]\mapsto\Re$, entonces:

a) $F(x)=k.G(x),\ \forall x\in[a;b],\ \forall k\in\Re$
b) $F'(x)=G(x),\ \forall x\in[a;b]$
c) $F(a)-G(a)=F(b)-G(b)$

5) Dada la función $F(y)=\int_0^1 2.x.y.dx$, entonces:

a) $F'(y)=2.x.y$; b) $F'(y)=1$; c) $F'(y)=2.y$

6) La integral $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt[4]{x-1}}.dx$ es:

a) Divergente ; b) Convergente ; c) Ni convergente ni divergente

7) La integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x.(1-x)}}$ es:

a) Divergente ; b) Convergente y vale 0 ; c) Convergente y vale π

8) Sea $f:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$

a) Si "f" es diferenciable existen sus derivadas parciales y son continuas
b) Si existen las derivadas parciales y son continuas, "f" es diferenciable
c) Si "f" es continua entonces es diferenciable

9) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ definida como $f(x;y) = x^2.y + x.y^2$; entonces:

a) Es diferenciable en cualquier punto de $\Re^2$
b) Es continua en $\Re^2$, pero no es diferenciable en todos sus puntos
c) No es continua en $\Re^2$

10) La función de Cobb-Douglas $f(K;L) = A.K^{\alpha}.L^{1/2}$ presenta rendimientos a escala constantes si: a) $\alpha = 1/2$; b) $\alpha > 1/2$; c) $\alpha < 1/2$

11) Si $g(x;y)$ es homogénea de grado 3, entonces $f(x;y) = a.Ln\dfrac{g(x;y)}{x^3}$ es:

a) No homogénea ; b) Homogénea de grado 0
b) Homogénea de grado 3

12) Sea $f:D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ diferenciable y tal que $r.f(x) = \Delta f(x)^t.x,\ \forall x \in D$:

a) En general, "f" no tiene por qué ser homogénea
b) "f" es homogénea de grado "1/r"
c) "f" es homogénea de grado "r"

13) Sea la ecuación $F(x;y) = 0$ que define implícitamente a "y" como función derivable de "x". Supongamos además que $x = Ln z$; entonces:

a) $\dfrac{dy}{dz} = -\dfrac{F_x}{z.F_y}$; b) $\dfrac{dy}{dz} = -\dfrac{F_z}{z.F_y}$; c) $\dfrac{dy}{dz} = -\dfrac{F_x}{z.F_z}$

14) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos positivos convergentes, $\sum (a_n.b_n)^n$

a) Es convergente ; b) Es divergente
c) Puede ser convergente o divergente

15) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos convergente, $\sum (2 + a_n)$ es:

b) Convergente ; b) Divergente
c) Puede ser convergente u oscilante

16) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos convergente, $\sum a_n^{2.n}$ es

a) Convergente ; b) Divergente
c) Puede ser convergente o divergente

17) El desarrollo de Mac-Laurin de orden 2 de la función $f(x;y) = sen(x + y)$ es:

a) $1 + x + y - x^2/2 - y^2/2 + T_L$
b) $x + y - x^2/2 - y^2/2 + x.y + T_L$; c) $x + y + T_L$

18) Si $f(x;y)$ es de clase 3 y homogénea de grado 1, su desarrollo de Taylor de grado 1 en el punto (a;b) es:

a) $f(x;y) = f_x(a;b).(x - a) + f_y(a;b).(y - b) + T_L$
b) $f(x;y) = x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) + T_L$
c) $f(x;y) = a.f_x(a;b) + b.f_y(a;b) + T_L$

Solución

1) La correcta es la a)

2) La correcta es la c):

$$\text{Si } f(x) = 1 + tg^2 x \Rightarrow \int_0^x f(t).dt = \int_0^x (1 + tg^2 t).dt = \int_0^x \frac{dt}{\cos^2 t} = \left[tg\, t\right]_0^x = tg\, x$$

3) La correcta es la a):

$$\int_{-1}^3 f(x).dx = \int_{-1}^1 f(x).dx + \int_1^3 f(x).dx \Rightarrow 5 = 2 + \int_1^3 f(x).dx \Rightarrow \int_1^3 f(x).dx = 3$$

4) La correcta es la c): si F y G son dos primitivas de $f:[a;b] \to \Re$, entonces:

$$\int_a^b f(x).dx = \left\{\begin{matrix} F(b) - F(a) \\ G(b) - G(a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \Rightarrow F(a) - G(a) = F(b) - G(b)$$

5) La correcta es la b):

$$F(y) = \int_0^1 2.x.y.dx \Rightarrow F'(y) = \int_0^1 \frac{\partial(2.x.y)}{\partial y}.dx = \int_0^1 2.x.dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

6) La correcta es la c), pues $f(x) = \dfrac{sen\, x}{\sqrt[4]{x-1}} \notin \Re$ si $x \in [0;1] \subset [0;\pi]$

7) La correcta es la c):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x.(1-x)}} = \int_0^1 x^{-1/2}.(1-x)^{-1/2}.dx = \beta(\frac{1}{2};\frac{1}{2}) =$$

$$\boxed{\beta(p;q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}.dx}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}}{0!} = \pi$$

8) La correcta es la b), la famosa condición suficiente de diferenciabilidad.

9) La correcta es la a), pues como las funciones derivadas primeras de "f" son continuas en todo punto, la condición suficiente de diferenciabilidad garantiza que "f" es diferenciable en todo punto.

10) La correcta es la a), pues como la función es homogénea de grado $\alpha + (1/2)$, tiene rendimientos a escala constantes si $\alpha + (1/2) = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2$

11) La correcta es la b), pues:

$$f(\lambda.x;\lambda.y) = a.Ln\frac{g(\lambda.x;\lambda.y)}{(\lambda.x)^3} = a.Ln\frac{\lambda^3.g(x;y)}{\lambda^3.x^3} = a.Ln\frac{g(x;y)}{x^3} = \lambda^0.f(x;y)$$

$$\boxed{\text{"g" homogénea de grado } 3 \Rightarrow g(\lambda.x;\lambda.y) = \lambda^3.g(x;y)}$$

12) La correcta es la a); la correcta sería la c) si dijera $r.f(x) = \nabla f(x)^t.x, \forall x \in D$

13) La correcta es la a):

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dz} = -\frac{F_x}{z.F_y}$$

- Si $x = \text{Ln}\, z \Rightarrow dx/dz = 1/z$
- Si $F(x;y) = 0$ define a "y" como función de "x" $\Rightarrow dy/dx = -F_x/F_y$

14) La correcta es la a): al aplicar el criterio de convergencia de la raíz, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(a_n.b_n)^n} = \lim_{n\to\infty} a_n.b_n = 0 < 1 \Rightarrow \text{convergente}$$

Como $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

15) La correcta es la b), pues la serie de términos positivos $\sum(2 + a_n)$ no cumple la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} (2 + a_n) = 2 + 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow \sum(2 + a_n) \text{ es divergente}$$

Como $\sum a_n$ es convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

16) La correcta es la a): al aplicar el criterio de convergencia de la raíz, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n^{2.n}} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0 < 1 \Rightarrow \text{convergente}$$

Como $\sum a_n$ es convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

17) La correcta es la c):

$$f(x;y) = f(0;0) + \frac{1}{1!}.\nabla f(0;0) \bullet \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2!}.\begin{bmatrix} x-0 & y-0 \end{bmatrix} \bullet Hf(0;0) \bullet \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} + T_L = x + y + T_L$$

$f(0;0) = 0$; $\nabla f(0;0) = (1;1)$; $Hf(0;0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

18) La correcta es la b):

$$f(x;y) = f(a;b) + f_x(a;b).(x-a) + f_y(a;b).(y-b) + T_L =$$

$$= f(a;b) + x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) - \{a.f_x(a;b) + b.f_y(a;b)\} + T_L =$$

$$= x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) + T_L$$

Como "f" es homogénea de grado 1, según el teorema de Euler:
$a.f_x(a;b) + b.f_y(a;b) = 1.f(a;b) \Rightarrow f(a;b) - \{a.f_x(a;b) + b.f_y(a;b)\} = 0$

TEORÍA (1 + 1 PUNTOS)

1) Demuestra que la serie armónica es divergente.

2) Demuestra que si $f: D \subseteq \Re^n \to \Re$ es de clase C^1 y homogénea de grado "r", entonces sus derivadas parciales primeras son homogéneas de grado "$r-1$"

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Sea la ecuación $y.e^c - 2.x.y + c.e^{x+y} = 0$ que relaciona el coste "c" de un producto con los factores "x" e "y" empleados. Se sabe que si $x = y = 0$ entonces $c = 0$.

1) ¿Define esta ecuación al coste "c" como función implícita de los factores productivos, en un entorno del punto $(x;y;c) = (0;0;0)$?
2) Halla los costes marginales de "x" e "y" en el punto (0;0)
3) Determina el desarrollo de Mac-Laurin de grado uno de la función $c(x;y)$.

Solución

1) Sea $F: \Re^3 \mapsto \Re$ tal que $F(x;y;c) = y.e^c - 2.x.y + c.e^{x+y}$.

La ecuación $F(x;y;c) = 0$ define implícitamente a la variable "c" como función de las variables "x" e "y" en un entorno del punto $(x;y;c) = (0;0;0)$, pues:

- El punto (0;0;0) satisface la ecuación $F(x;y;c) = 0$
- La función "F" es de clase C^1 en (0;0;0)
- $\partial F(0;0;0)/\partial c = \left[y.e^c + e^{x+y}\right]_{(0;0;0)} = 1 \neq 0$

2) Es:

$$\frac{\partial c(0;0)}{\partial x} = -\frac{\partial F(0;0;0)/\partial x}{\partial F(0;0;0)/\partial c} = -\left[\frac{-2.y + c.e^{x+y}}{y.e^c + e^{x+y}}\right]_{(0;0;0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{\partial c(0;0)}{\partial y} = -\frac{\partial F(0;0;0)/\partial y}{\partial F(0;0;0)/\partial c} = -\left[\frac{e^c - 2.x + c.e^{x+y}}{y.e^c + e^{x+y}}\right]_{(0;0;0)} = \frac{1}{1} = 1$$

3) Es:

$$c(x;y) = c(0;0) + \frac{1}{1!}.\nabla c(0;0) \bullet \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} + T_L =$$

$$= 0 + (0;1) \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + T_L = y + T_L$$

Sabemos que $c(0;0) = 0$ y que $\nabla c(0;0) = (0;1)$

EJERCICIO (1 PUNTO)

Analiza el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{\alpha}}$ según el valor del parámetro α

Solución

• Estamos ante una serie de términos positivos, pues $\dfrac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{\alpha}} > 0, \forall n$

• Si $\alpha < 0$, la serie es divergente, pues no satisface la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{\alpha}} = \frac{1}{(+\infty)^{\text{negativo}}} = (+\infty)^{\text{positivo}} = +\infty \neq 0$$

• Si $\alpha = 0$, la serie es divergente, pues no satisface la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{0}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}(e+e/n) = \mathrm{Ln}\, e = 1 \neq 0$$

• Si $\alpha > 0$, la serie satisface la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{\alpha}} = \frac{1}{(+\infty)^{\text{positivo}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

• Si $0 < \alpha \leq 1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{\alpha}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \equiv \text{serie armónica de orden "}\alpha\text{"}$$

$$\boxed{\text{siendo "n" un número natural es: } \mathrm{Ln}(e+e/n) > 1, \forall n}$$

y como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge si $0 < \alpha \leq 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{\alpha}}$ también diverge

• Si $\alpha > 1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{\alpha}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{371}{n^{\alpha}} = 371. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$\boxed{\text{siendo "n" un número natural es: } \mathrm{Ln}(e+e/n) < 371, \forall n}$$

y como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si $\alpha > 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}(e+e/n)}{n^{\alpha}}$ también converge

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Demuestre que la ecuación

$$F(x;u)=\beta(p;q).\int_0^u t.dt-\frac{1}{2}.\int_0^x t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.dt=0$$

con $p>1$ y $q>1$, define implícitamente a "u" como función derivable de "x" en un entorno del punto $P=(x;u)=(1;1)$. Calcule la derivada $du(P)/dx$

Solución

Siendo $F:\Re^2\mapsto\Re$ tal que $F(x;u)=\beta(p;q).\int_0^u t.dt-\frac{1}{2}.\int_0^x t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.dt$, se tiene que:

a) El punto (1;1) satisface la ecuación $F(x;u)=0$:

$$F(1;1)=\beta(p;q).\int_0^1 t.dt-\frac{1}{2}.\int_0^1 t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.dt=$$

$$=\beta(p;q).\left[\frac{1}{2}.t^2\right]_0^1-\frac{1}{2}.\beta(p;q)=\frac{1}{2}.\beta(p;q)-\frac{1}{2}.\beta(p;q)=0$$

$$\boxed{\text{Como todo el mundo sabe, es: } \int_0^1 t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.dt=\beta(p;q)}$$

b) "F" es de clase C^1 en el punto (1;1)

c) Es:

$$\frac{\partial F(1;1)}{\partial u}=\left(\partial(\beta(p;q).\int_0^u t.dt-\frac{1}{2}.\int_0^x t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.dt)/\partial u\right)_{(1;1)}=$$

$$=\left(\partial(\beta(p;q).\int_0^u t.dt)/\partial u\right)_{(1;1)}=\beta(p;q).\left(\partial(\int_0^u t.dt)/\partial u\right)_{(1;1)}=$$

$$=\beta(p;q).(u)_{(1;1)}=\beta(p;q)\neq 0$$

Por verificarse a), b) y c), podemos garantizar que la ecuación $F(x;u)=0$ define implícitamente a la variable "u" como función de "x" en un entorno del punto $P=(x;u)=(1;1)$; y es:

$$\frac{du(1)}{dx}=-\frac{\partial F(1;1)/\partial x}{\partial F(1;1)/\partial u}=-\frac{0}{\beta(p;q)}=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial F(1;1)}{\partial x}&=\left(\partial(\beta(p;q).\int_0^u t.dt-\frac{1}{2}.\int_0^x t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.dt)/\partial x\right)_{(1;1)}=\\&=\left(\partial(-\frac{1}{2}.\int_0^x t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.dt)/\partial x\right)_{(1;1)}=\\&=\left(-\frac{1}{2}.x^{p-1}.(1-x)^{q-1}\right)_{(1;1)}=0\end{aligned}}$$

EJERCICIO (1 PUNTO)

Calcula $\iint_D dx.dy$, donde D es el triángulo cuyos vértices son (0;0), (1;2) y (3;1)

Solución

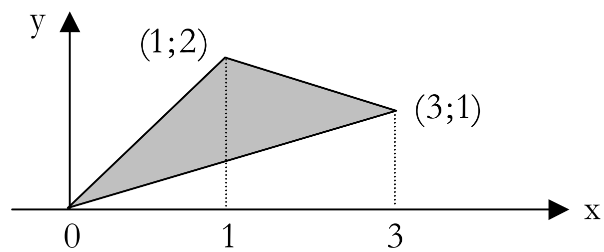
• Es:

$$\iint_D dx.dy = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=x/3}^{y=2.x} dy\right].dx + \int_{x=1}^{x=3}\left[\int_{y=x/3}^{y=(5-x)/2} dy\right].dx =$$

• La recta que pasa por (0;0) y (1;2) es $y = 2.x$

• La recta que pasa por (0;0) y (3;1) es $y = x/3$

• La recta que pasa por (1;2) y (3;1) es $y = (5-x)/2$



$$= \int_{x=0}^{x=1} [y]_{y=x/3}^{y=2.x} dx + \int_{x=1}^{x=3} [y]_{y=x/3}^{y=(5-x)/2} .dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(2.x - \frac{x}{3}\right).dx + \int_{x=1}^{x=3} \left(\frac{5-x}{2} - \frac{x}{3}\right).dx = ... = \frac{5}{2}$$

Quedarás como un torero de tronío si te despides diciendo que el que sea

$$\iint_D dx.dy = \frac{5}{2}$$

significa que el área del dominio de integración "D" es $5/2$