EXAMEN SEPTIEMBRE 1999

01) Sea $P(\lambda)=(\lambda^2+m).(\lambda^2+n)$ el polinomio característico de una matriz simétrica de orden 4. Señale cuál de las siguiente opciones <u>no</u> puede darse:

a) $m=-1$ y $n=-1$; b) $m=0$ y $n=-1$; c) $m=1$ y $n=0$

02) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 3 cuyos valores propios son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=-2$ (doble) y tal que $L(\lambda_1)=<(1;1;0)>$ y $L(\lambda_2)=<(0;0;-1)>$. Entonces:

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "A" es diagonalizable

03) Sea "A" una matriz cuadrada de orden "n" diagonalizable. Señale cuál de las siguientes afirmaciones no se cumple siempre (si "D" es una matriz diagonal):

a) Existe una matriz regular P tal que $P^{-1}AP=D$
b) Existe una matriz ortogonal P tal que $P^tAP=D$
c) El espacio de vectores propios de A tiene dimensión "n"

04) Sea $Q(x)=x^tAx$ una forma cuadrática semidefinida positiva; entonces, si se la restringe al subespacio vectorial $\{(x;y;z)\ /\ x=y\}$, podemos decir que:

a) Q es definida positiva ; b) Q es semidefinida positiva
c) Q puede ser definida positiva o semidefinida positiva

05) Sea $Q(x)=x^tAx$ una forma cuadrática tal que "A" tiene como polinomio característico asociado $P(\lambda)=(\lambda^2-a).(\lambda+b)$, con $a>0$. Entonces:

a) Q es definida positiva si $b=0$
b) Q puede ser definida positiva o definida negativa
c) Q es indefinida para todo "a" y "b"

06) Sea $Q(x)=x^tAx$ una forma cuadrática, con $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$, entonces:

a) Q es indefinida ; b) Q es definida positiva
c) Q es semidefinida positiva

07) Sean "A" y "B" matrices semejantes, entonces:

a) Si B es simétrica A también lo es
b) Si A es ortogonal B también lo es ; c) $rg(A)=rg(B)$

08) Al despejar X en la ecuación $(A^tAX)^{-1}=(A^tB)^{-1}$, se obtiene:

a) $X=B^{-1}A$; b) $X=A^{-1}B$; c) $X=A^{-1}B^{-1}$

09) Si "A" es una matriz ortogonal, entonces:

a) $A^{-1}=A$; b) $\left|A^{-1}\right|=1$; c) $\left|A^{-1}\right|=1$ ó $\left|A^{-1}\right|=-1$

10) Sea la matriz particionada en bloques $A=\begin{bmatrix} B & I \\ 0 & -B \end{bmatrix}$, donde "B" es una matriz cuadrada de orden "n" cualquiera e $I\in M_{n\times n}(R)$ la matriz identidad. Entonces:

a) $tr(A)=2.tr(B)$; b) $tr(A)=n$; c) $tr(A)=0$

11) Sea $f:E\mapsto F$ una aplicación lineal, entonces:

a) $f(0)=0$; b) $f(0)=0$ sólo si "f" es monomorfismo
c) $f(0)=0$ sólo si "f" es epimorfismo

12) Sea la matriz particionada $\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & -A \end{bmatrix}$, su inversa es:

a) $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ A^{-1}A^{-1} & -A^{-1} \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ A & -A^{-1} \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ I & -A^{-1} \end{bmatrix}$

13) Las curvas de nivel de la función $f(x;y)=(x+y)^2$ son:

a) circunferencias concéntricas de centro el origen de coordenadas
b) rectas que pasan por el origen de coordenadas
c) las anteriores son falsas

14)Sea $f:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$ una función real cualquiera, indica cuál de las siguientes funciones tiene siempre el mismo dominio que "f":

a) $g(x_1;...;x_n)=Ln\,f(x_1;...;x_n)$; b) $g(x_1;...;x_n)=e^{f(x_1;...;x_n)}$
c) $g(x_1;...;x_n)=\sqrt[4]{f(x_1;...;x_n)}$

15) Sea $f(x;y)$ una función continua en el punto $(a;b)$, entonces:

a) existen todos los límites direccionales y valen $f(a;b)$
b) existen los límites reiterados y valen $f(a;b)$
c) existen los límites reiterados pero no coinciden

16)Sea $f(x;y)$ una función continua en un punto $(a;b)$. Sea "g" una función tal que $f(x;y)\in Dom.g,\ \forall(x;y)\in Dom.f$; podemos afirmar que:

a) $f\bullet g$ es continua en $(a;b)$; b) $(a;b)\in Dom.g\bullet f$
c) las anteriores son falsas

17) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$, entonces $\lim\limits_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y) = L$ si:

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $(x;y) \in D$ entonces $|f(x;y) - L| < \varepsilon$

b) $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ tal que si $(x;y) \in D$, $(x;y) \neq (a;b)$ y $|x-a| < \delta$ e $|y-b| < \delta$ entonces $|f(x;y) - L| < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $(x;y) \in D$, $(x;y) \neq (a;b)$ y $|x-a| < \delta$ e $|y-b| < \delta$ entonces $|f(x;y) - L| < \varepsilon$

18) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$, Schwarz garantiza que $\dfrac{\partial^2 f(a;b)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f(a;b)}{\partial y \partial x}$ sólo si:

a) La función "f" es continua en $(a;b)$

b) Las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en $(a;b)$

c) Las anteriores son falsas

Solución

01) Todo el mundo sabe que los autovalores de una matriz simétrica jamás son números imaginarios (siempre son reales); así, el caso c) no puede suceder, pues si $m = 1$ y $n = 0$ hay autovalores imaginarios:

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1).(\lambda^2 + 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} \notin \Re \\ \lambda^2 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$$

02) La correcta es la b), pues el subespacio $L(\lambda_2 = -2)$ no tiene dimensión 2.

03) La correcta es la b). Cuando la c) habla del espacio de vectores propios de "A" se refiere al espacio vectorial que se obtiene como suma de los subespacios de autovectores asociados a los distintos autovalores de "A" (si "A" es de orden "n" y diagonalizable, dicho espacio siempre tiene dimensión "n; y tiene dimensión inferior a "n" si "A" no es diagonalizable).

04) La correcta es la c).

05) La correcta es la c): si $a > 0$ hay autovalores de signo distinto:

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - a).(\lambda + b) \Rightarrow \lambda = +\sqrt{a}, -\sqrt{a}, -b$$

06) La correcta es la a): "A" tiene autovalores de signo distinto:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2, -1$$

También así:

$$H_1 = 1 > 0 \ ; \ H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \ ; \ H_3 = |A| < 0$$

07) La correcta es la c), pues si "A" y "B" son semejantes es que representan a un

mismo endomorfismo "f" respecto de bases distintas, y si "A" y "B" tuvieran distinto rango entonces sería un cachondeo, pues el rango de la matriz asociada a un endomorfismo determina las dimensiones del núcleo y de la imagen de "f", y no sería serio que dichas dimensiones dependieran de la base a la que está referida el endomorfismo.

08) La correcta es la b):

$$\boxed{(\text{María})^{-1} = (\text{Juana})^{-1} \Leftrightarrow \text{María} = \text{Juana}}$$

$$(A^tAX)^{-1} = (A^tB)^{-1} \Rightarrow A^tAX = A^tB \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\boxed{\text{Suponiendo que } A^t \text{ es regular, y por tanto: } A^tC = A^tD \Rightarrow C = D}$$

09) Si "A" es ortogonal $\Rightarrow$ su determinante es 1 ó -1 $\Rightarrow$ el determinante de A^{-1} (que es el inverso del determinante de "A") también es 1 ó -1.

10) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) + \mathrm{tr}(-B) = \mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(B) = 0$.

11) La correcta es la a).

12) La correcta es la a): al exigir que $\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & -A \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, resulta:

$$\begin{bmatrix} AX & AY \\ X - AZ & Y - AT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} AX = I \\ AY = 0 \\ X - AZ = 0 \\ Y - AT = I \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} X = A^{-1} \\ Y = 0 \\ Z = A^{-1}A^{-1} \\ T = A^{-1} \end{matrix} \right.$$

13) La correcta es la c):

$$f(x;y) = k \Rightarrow (x+y)^2 = k \Rightarrow x + y = \pm\sqrt{k}$$

Que es un par de rectas paralelas a la bisectriz del segundo cuadrante (sólo pasa por el origen de coordenadas si $k = 0$).

14) La correcta es la b).

15) La correcta es la a).

16) La correcta es la b):

$$\text{"f" continua en } (a;b) \Rightarrow (a;b) \in \mathrm{Dom.f} \Rightarrow f(a;b) \in \mathrm{Dom.g} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{El enunciado garantiza que } f(x;y) \in \mathrm{Dom.g},\ \forall (x;y) \in \mathrm{Dom.f}}$$

$$\Rightarrow (a;b) \in \mathrm{Dom.g} \bullet f$$

17) La correcta es la c).

18) La correcta es la c).

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Clasifique la siguiente forma cuadrática:

$$Q(X) = 2.x_1^2 + a^2.x_2^2 + 2.x_3^2 + 2.a.x_1.x_2 + 2.a.x_2.x_3 \;\; ; \;\; a \neq 0$$

¿Es su matriz asociada diagonalizable? En caso afirmativo dé su expresión diagonal y encuentre una matriz de paso.

Solución

- La matriz asociada a "Q" es $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & a^2 & a \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$; siendo:

$$H_1 = a_{11} = 2 > 0 \;\; ; \;\; H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = a^2 > 0, \; \forall a \neq 0$$

$$H_3 = |A| = 0, \; \forall a$$

Por tanto, "Q" es semidefinida positiva para todo valor no nulo de "a".

- Como "A" es simétrica, es diagonalizable; o sea, es posible encontrar una matriz "P" tal que $P^{-1} \bullet A \bullet P$ es una matriz diagonal (como "A" es simétrica, también puede encontrarse una matriz ortogonal "H" tal que $H^{-1} \bullet A \bullet H \equiv H^t \bullet A \bullet H$ es una matriz diagonal; pero como no se nos dice expresamente que la matriz de "paso" sea ortogonal, nos "conformaremos" con obtener "P").

- Autovalores de "A":

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & a & 0 \\ a & a^2 - \lambda & a \\ 0 & a & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)^2.(a^2 - \lambda) - 2.a^2.(2-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)((2-\lambda).(a^2 - \lambda) - 2.a^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda).\lambda.(\lambda - (2 + a^2)) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 2, 2 + a^2$$

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 0$:

$$(A - 0 \bullet I) \bullet X = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & a^2 & a \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.x_1 = -a.x_2 \\ 2.x_3 = -a.x_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -a.x_2/2 \\ x_3 = -a.x_2/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 0) = \left\{(-\frac{a}{2}.\theta; \theta; -\frac{a}{2}.\theta), \; \forall \theta \in \Re\right\} = \left\{\frac{\theta}{2} \bullet (-a; 2; a), \; \forall \theta \in \Re\right\}$$

El vector $\overline{h}_1 = (-a; 2; -a)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 0)$.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2$:

$$(A - 2 \bullet I) \bullet X = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 - 2 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a.x_2 = 0 \\ a.x_1 + (a^2 - 2).x_2 = -a.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(-\theta; 0; \theta),\ \forall \theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (-1; 0; 1),\ \forall \theta \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_2 = (-1; 0; 1)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 2)$.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2 + a^2$:

$$(A - (2 + a^2) \bullet I) \bullet X = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -a^2 & a & 0 \\ a & -2 & a \\ 0 & a & -a^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a.x_1 - 2.x_2 = -a.x_3 \\ a.x_2 = a^2.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = a.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2 + a^2) = \{(\theta; a.\theta; \theta),\ \forall \theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (1; a; 1),\ \forall \theta \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (1; a; 1)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 2 + a^2)$.

- La matriz buscada "P" es:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ a \neq 0$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{matrix}$$

y se cumple que $P^{-1} \bullet A \bullet P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + a^2 \end{bmatrix}$.

- Como todos subespacios de autovectores tienen dimensión 1, la determinación de la matriz "H" es fácil: sus columnas son los vectores $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ y $\bar{k}_3$, siendo:

$$\bar{k}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| \ ;\ \bar{k}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| \ ;\ \bar{k}_3 = \bar{h}_3 / \|\bar{h}_3\|$$

EJERCICIO (2 PUNTOS)

Sea $f(x;y) = y^2.\cos\dfrac{x-1}{y} + x^2.\cos\dfrac{y}{x}$ si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, y tal que $f(1;0) = 1$.

Demuestra que "f" es continua en $(1;0)$. Calcula $\partial f(1;0)/\partial y$ y $D_{(1;1)} f(1;0)$.

Solución

- Como $f(1;0)=1$, la función "f" es continua en el punto $(1;0)$ si su límite en dicho punto es 1, y así sucede:

$$\lim_{(x;y)\to(1;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(1;0)} y^2.\cos\frac{x-1}{y} + x^2.\cos\frac{y}{x} = 1$$

> - Si $(x;y)\to(1;0) \Rightarrow y^2.\cos((x-1)/y)\to 0$, pues el factor y^2 tiende a 0 y el factor $\cos((x-1)/y)$, aunque carece de límite, está acotado.
> - Si $(x;y)\to(1;0) \Rightarrow x^2.\cos(y/x)\to 1^2.\cos(0/1) = 1.\cos 0 = 1$

- $$\partial f(1;0)/\partial y = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(1;0+\lambda)-f(1;0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(1;\lambda)-f(1;0)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{(\lambda^2.\cos\frac{1-1}{\lambda}+1^2\cos\frac{\lambda}{1})-1}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{(\lambda^2.\cos\frac{0}{\lambda}+\cos\lambda)-1}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{(\lambda^2.\cos 0+\cos\lambda)-1}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{(\lambda^2+\cos\lambda)-1}{\lambda} = (0/0) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{(2.\lambda-\mathrm{sen}\lambda)-0}{1} = 0$$

aplicando la regla de L'Hospital

- $$D_{(1;1)}f(1;0) = \lim_{\theta\to 0}\frac{f((1;0)+\theta\bullet(1;1))-f(1;0)}{\theta} =$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{f(1+\theta;0+\theta)-f(1;0)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{f(1+\theta;\theta)-f(1;0)}{\theta} =$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{(\theta^2.\cos\frac{(1+\theta)-1}{\theta}+(1+\theta)^2.\cos\frac{\theta}{1+\theta})-1}{\theta} =$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{(\theta^2.\cos 1+(1+\theta)^2.\cos\frac{\theta}{1+\theta})-1}{\theta} = (0/0) = (\text{L'Hospital}) =$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{(2.\theta.\cos 1+2.(1+\theta).\cos\frac{\theta}{1+\theta}-\mathrm{sen}\frac{\theta}{1+\theta})-0}{1} = 2$$

TEORÍA (1 PUNTO)

Sea "A" una matriz diagonalizable de orden "n". Demuestre que existe una base de $\Re^n$ formada por vectores propios de "A".

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Sea "A" una matriz diagonalizable de orden "n" con autovalores λ_k, $k = 1,2,\ldots,n$

1) Demuestra que:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ ; \ |A| = \lambda_1.\lambda_2.....\lambda_n$$

2) Si "A" es simétrica, "n" es par, $|A| > 0$ y $\operatorname{tr}(A) < 0$, discute qué signo puede tener la forma cuadrática asociada a la matriz A.

Solución

1) Si "A" es diagonalizable entonces es semejante a una matriz diagonal "D" cuya diagonal principal está formada por los autovalores de "A". Como dos matrices semejantes tienen la mima traza y el mismo determinante, es:

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ ; \ |A| = |D| = \lambda_1.\lambda_2.....\lambda_n$$

2) Si el determinante de "A" no es nulo, entonces "A" no tiene ningún autovalor nulo (pues como dicho determinante es el producto de los autovalores de "A", sería nulo si algún autovalor fuera el 0); así, "A" no puede ser semidefinida.

   Como la suma de los autovalores de "A" coincide con la traza de "A", el que sea $\operatorname{tr}(A) < 0$ nos indica que "A" tiene autovalores negativos, y el que sea $|A| > 0$ nos indica que el número de autovalores negativos es par (pues si fuera impar, como el determinante de "A" es el producto de los autovalores de "A", dicho determinante sería negativo). Así, si los "n" ($n \equiv \text{par}$) autovalores son negativos, entonces la forma cuadrática asociada a "A" será definida negativa; y como no hay autovalores nulos, será indefinida en caso de que no todos los autovalores sean negativos.

TEORÍA (1 PUNTO)

Investiga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifica las respuestas:

1) Si A y B son matrices ortogonales del mismo orden, entonces AB no siempre es ortogonal.
2) Si A es una matriz cuadrada de orden "n", entonces $A + A^t$ y A^tA son matrices simétricas.

Solución

1) Es falso, pues si A y B son matrices ortogonales, su producto siempre es una matriz ortogonal. En efecto, si $H = AB$, entonces:

$$H^t = (AB)^t = B^tA^t \underset{\uparrow}{=} B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = H^{-1} \Rightarrow H \text{ es ortogonal}$$

$$\boxed{\text{Si A y B son ortogonales} \Rightarrow A^t = A^{-1} \text{ y } B^t = B^{-1}}$$

2) Es cierto que si A es cuadrada entonces $P = A + A^t$ es simétrica.
En efecto:

$$P^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = P \Rightarrow P \text{ es simétrica}$$

También es cierto que si A es cuadrada entonces $S = A^tA$ siempre es simétrica. En efecto:

$$S^t = (A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA = S \Rightarrow S \text{ es simétrica}.$$