# EXAMEN FEBRERO 1999

01) La aplicación lineal $f(x;y;z)=(2.x;y;0)$

a) es epimorfismo ; b) no es epimorfismo ; c) no se cumple ni a) ni b)

02) Sean $f:\Re^n \mapsto \Re^m$ y $g:\Re^m \mapsto \Re^k$ epimorfismos.

a) $g \bullet f$ es epimorfismo ; b) $g \bullet f$ no es epimorfismo
c) no puede saberse si $g \bullet f$ es epimorfismo

03) Siendo "A" una matriz ortogonal, puede afirmarse que:

a) "A" no tiene ningún valor propio nulo
b) Los valores propios de "A" son 1 ó $-1$
c) "A" es diagonalizable

04) Sea "A" una matriz ortogonal y "B" una matriz del mismo orden que "A".

a) $|A \bullet B| = |B|$ ; b) $|A \bullet B| = -|B|$ ; c) $|A \bullet B|^2 = |B|^2$

05) Siendo "A" una matriz idempotente, se cumple que:

a) $A^t = A$ ; b) $A^2 = A$ ; c) $A^t = A^{-1}$

06) Si $A,B \in M_{n\times n}(\Re)$ son matrices semejantes, no siempre es cierto que:

a) "A" y "B" tienen los mismos autovalores
b) "A" y "B" tienen los mismos autovectores
c) "A" y "B" tienen el mismo determinante

07) Sean $\lambda_1$ y $\lambda_2$ valores propios distintos de una matriz $A \in M_{n\times n}(\Re)$, con vecto-res propios asociados $x_1 = (1;0;1)$ y $x_2 = (0;1;1)$ respectivamente.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es simétrica ; c) "A" no es ortogonal

08) Sea la matriz particionada $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, siendo simétricas "A" y "B".

a) "M" es simétrica ; b) "M" es antisimétrica , c) "M" es diagonal

09) Sean $\lambda_1$ y $\lambda_2$ valores propios distintos de una matriz $A \in M_{n\times n}(\Re)$, con vectores propios asociados $x_1$ y $x_2$ respectivamente.

a) $x_1$ y $x_2$ son ortogonales ; b) $x_1$ y $x_2$ son LI
c) $x_1$ y $x_2$ son ortogonales y tienen módulo 1

10) Sea $A \in M_{2\times 2}(\Re)$ tal que $tr(A) = 5$ y $|A| = 6$.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "A" es diagonalizable

11) Sea $Q(x)$ una forma cuadrática indefinida. Al restringirla a un subespacio:

a) no puede ser definida positiva ; b) es indefinida
c) puede ser definida negativa

12) La forma cuadrática $Q(x;y) = (a^2 - 1).x^2 - y^2 + 2.x.y$ restringida al subespacio $a.x - y = 0$ es:

a) semidefinida positiva si $a < 1/2$ ; b) definida positiva si $a > 1/2$
c) las anteriores son falsas

13) La forma cuadrática $Q(x;y;z) = 3.x^2 + 2.y^2 + 4.z^2 - 2.x.y + 2.y.z$ es:

a) definida positiva ; b) definida negativa c) semidefinida negativa

14) Sea la matriz particionada $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, siendo ortogonales "A" y "B".

a) "M" es ortogonal ; b) "M" no es ortogonal
c) No puede saberse si "M" es ortogonal

15) La matriz de vectores propios asociados a una matriz simétrica "A" es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Todos los valores propios de "A" son distintos
b) Los valores propios de "A" no son todos distintos
c) "A" no es diagonalizable

16) Siendo $f(x+z;y+z) = 2.z + f(x;y)$, el valor de $D_{(1;1)}f(x;y)$ es

a) $-2$ ; b) 0 ; c) 2

17) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $\forall\, a \in \Re$ es $\lim\limits_{x \to 0} f(x; 2 + a.x^2) = 2$. Entonces:

a) $\lim\limits_{(x;y) \to (0;2)} f(x;y) = 2$ ; b) $\lim\limits_{(x;y) \to (0;-2)} f(x;y) = 2$
c) El límite de "f" en $(0;2)$, si existe, es 2

18) Si $f(0;0)=8$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x;m.x^2)=8.m^2$, entonces:

a) "f" es continua en $(0;0)$ si $m=1$ ; b) "f" es continua en $(0;0)$

c) "f" no es continua en $(0;0)$

19) Siendo $f(x;y;z)=(\text{Ln}\,(y+z)\,;\,\text{sen}\,x^2.y)$ y $g(x;y)=y/(e^x-1)$, es:

a) $\text{Dom.}g\bullet f=\{(x;y;z)\in\Re^3\ /\ y+z>0,\ x\neq 0\}$

b) $\text{Dom.}g\bullet f=\{(x;y;z)\in\Re^3\ /\ y+z\neq 1,\ y+z>0\}$

c) $\text{Dom.}g\bullet f=\{(x;y;z)\in\Re^3\ /\ y+z\neq 0,\ e^x-1\neq 0\}$

20) Las curvas de nivel de la función $f(x;y)=e^x/(y+e^x)$ son:

a) $y=e^x.(1-k)/k,\ \forall\ k\in\Re$

b) $y=e^x.(1-k)/k,\ \forall\ k\neq 0$

c) No existen pàra los niveles $k=0$ y $k=1$

# Solución

01) La correcta es la b), pues el rango de la matriz asociada a "f" no coincide con la dimensión del espacio "final" de "f".

02) La correcta es la b).

03) La correcta es la a): el determinante de una matriz ortogonal es no nulo, por lo que la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$ no puede tener a $\lambda = 0$ como solución (pues el término independiente de dicha ecuación es $|A|$, y $|A| \neq 0$).

04) La correcta es la c): si "A" es ortogonal $\Rightarrow |A| = 1$ ó $|A| = -1$; así:

$$|A \bullet B|^2 = (|A|.|B|)^2 = |B|^2$$

$\boxed{\text{independientemente de que } |A| = 1 \text{ ó } |A| = -1}$

05) La correcta es la b), definición hiperfamosa.

06) La correcta es la b).

07) La correcta es la b): si "A" fuera simétrica, los autovectores $x_1$ y $x_2$, asociados a autovalores distintos, deberían ser ortogonales, y no lo son.

08) La correcta es la a), pues "M" coincide con su traspuesta:

$$M^t = \begin{bmatrix} A^t & 0 \\ 0 & B^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = M$$

$\boxed{\text{"A" y "B" simétricas} \Rightarrow A^t = A \text{ y } B^t = B}$

09) La correcta es la b), propiedad hiperfamosa.

10) La correcta es la a), pues todos los autovalores son distintos:

$$|A - \lambda \bullet I| = \lambda^2 - tr.(A).\lambda + |A| = \lambda^2 - 5.\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 3$$

11) La correcta es la c): si en tu pueblo hay listos y tontos, puede ocurrir que en alguna familia todos sean tontos.

12) La correcta es la b): si $a.x - y = 0$ entonces $y = a.x$, siendo:

$$Q(x; a.x) = (a^2 - 1).x^2 - a^2.x^2 + 2.a.x^2 = (2.a - 1).x^2 > 0, \forall\ x \neq 0$$

$\boxed{\text{siempre que } 2.a - 1 > 0, \text{ es decir, siempre que } a > 1/2}$

13) La correcta es la a), pues $H_1 > 0, H_2 > 0$ y $H_3 > 0$.

14) La correcta es la a), pues $M \bullet M^t = I$:

$$M \bullet M^t = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} A^t & 0 \\ 0 & B^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \bullet A^t & 0 \\ 0 & B \bullet B^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{siendo ortogonales "A" y "B", es } A \bullet A^t = I \text{ y } B \bullet B^t = I}$

15) La correcta es la b): autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales; así, el que los vectores correspondientes a las columnas segunda y tercera de "P" no sean ortogonales garantiza que ambos vectores corresponden a un mismo autovalor La c) es una estupidez, pues toda matriz simétrica es diagonalizable

16) La correcta es la c):

$$D_{(1;1)}f(x;y) = \lim_{k \to 0} \frac{f((x;y) + k \bullet (1;1)) - f(x;y)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(x+k;y+k) - f(x;y)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(x;y) + 2.k - f(x;y)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{2.k}{k} = 2$$

17) La correcta es la c).

18) La correcta es la c), pues "f" ni tan siquiera tiene límite en $(0;0)$.

19) La correcta es la b). Para no volvernos locos, cambiamos la notación

$$f(x;y;z) = (\text{Ln}\,(y+z)\,;\,\text{sen}\,x^2.y)\ ;\ g(u;v) = v/(e^u - 1)$$

Es:

$$\text{Dom.}f = \{(x;y;z) \in \Re^3 \ /\ y + z > 0\}$$
$$\text{Dom.}g = \{(u;v) \in \Re^2 \ /\ e^u - 1 \neq 0\} = \{(u;v) \in \Re^2 \ /\ u \neq 0\}$$

La función $g \bullet f$ está definida en los puntos $(x;y;z) \in \Re^3$ en los que "f" esté definida ($\Rightarrow y + z > 0$) y sean tales que $(x;y;z) \in \text{Dom.}g$, y sucede esto último siempre que $u = \text{Ln}\,(y+z) \neq 0 \Rightarrow y + z \neq 1$.

20) La correcta es la b):

$$f(x;y) = e^x/(y + e^x) = k \Rightarrow y + e^x = e^x/k \Rightarrow y = (e^x/k) - e^x \Rightarrow$$

$\boxed{\text{siempre que } k \neq 0}$

$$\Rightarrow y = e^x.(\frac{1}{k} - 1) \Rightarrow y = e^x.\frac{1-k}{k}$$

# EJERCICIO

Sea $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ la forma cuadrática real definida como:

$$Q(x;y;z) = a.x^2 + 4.a.y^2 + a^2.z^2 + 4.a.x.y$$

1) Determinar el signo de "Q" en función del parámetro "a".
2) Para $a = 5$, obtener la expresión canónica y la matriz de paso ortogonal.

# EJERCICIO (ECONOMÍA)

Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que $f(x;y) = \begin{cases} (x^3 - y)^3/(x^2+y^2) & \text{si}(x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si}(x;y) \neq (0;0) \end{cases}$

Estudie la continuidad de "f" en $(0;0)$ y calcule sus derivadas parciales en $(0;0)$.

# *Solución*

- La función "f" es continua en el punto $(0;0)$, pues su límite en dicho punto coincide con $f(0;0)$. En efecto:

$$\left|f(x;y) - 0\right| = \left|\frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - \frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = |x|.\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| + |y|.\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq$$

$$\leq |x| + |y| < \varepsilon \text{ si } |x| < \varepsilon/2 \text{ y } |y| < \varepsilon/2$$

$$\boxed{\forall\ (x;y) \neq (0;0), \text{ es: } \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1 \text{ y } \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1}$$

- Es:

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda;0) - f(0;0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda^3 - 0^3}{\lambda^2 + 0^2} - 0}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^3}{\lambda^3} = 1$$

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{\theta \to 0} \frac{f(0;0+\theta) - f(0;0)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{0^3 - \theta^3}{0^2 + \theta^2} - 0}{\theta} = -\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta^3}{\theta^3} = -.1$$

# EJERCICIO (ADE)

Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que $f(x;y)=\begin{cases}(x^3+x^2.y^3)/(x^2+y^2) & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\end{cases}$

Estudie la continuidad de "f" en $(0;0)$ y calcule sus derivadas parciales en $(0;0)$.

# Solución

• La función "f" es continua en el punto $(0;0)$, pues su límite en dicho punto coincide con $f(0;0)$. En efecto:

$$\left|f(x;y)-0\right|=\left|\frac{x^3+x^2.y^3}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^3+x^2.y^3}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{x^2.y^3}{x^2+y^2}\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{x^2.y^3}{x^2+y^2}\right|=|x|.\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|+\left|y^3\right|.\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq$$

$$\leq|x|+\left|y^3\right|=|x|+|y|^3<\varepsilon \text{ si } |x|<\varepsilon/2 \text{ y } |y|<\sqrt[3]{\varepsilon/2}$$

$$\boxed{\forall\ (x;y)\neq(0;0),\ \text{es: } \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1}$$

• Es:

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial x}=\lim_{\lambda\to 0}\ \frac{f(0+\lambda;0)-f(0;0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\ \frac{\dfrac{\lambda^3+\lambda^2.0^3}{\lambda^2+0^2}-0}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\ \frac{\lambda^3}{\lambda^3}=1$$

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial y}=\lim_{\theta\to 0}\ \frac{f(0;0+\theta)-f(0;0)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\ \frac{\dfrac{0^3+0^2.\theta^3}{0^2+\theta^2}-0}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\ \frac{0}{\theta^3}=0$$

# TEORÍA (ECONOMÍA)

1) Demuestre que el complementario de un abierto es un cerrado.

2) En $\Re^2$, dar un ejemplo de conjunto cerrado que no sea compacto.

# Solución 2

Un conjunto "A" es cerrado si $\text{Adh.}(A)=A$. Un conjunto "A" es compacto si es cerrado y acotado. Por tanto, si nos piden un ejemplo de conjunto cerrado que no sea acotado, debemos buscar un conjunto "A" no acotado y tal que $\text{Adh.}(A)=A$.

Por ejemplo: $A=\{(x;y)\in\Re^2\ /\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$

# TEORÍA (ADE)

Demuestre que vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.