EXAMEN DICIEMBRE 1998

EJERCICIO (2 PUNTOS)

Sea el endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x;y;z) = (y - z; x + z; y - x)$.

1) ¿Es "f" un isomorfismo?. Calcule $\ker.f$ e $\mathrm{Img}.f$.
2) Determine la matriz "A" asociada a "f" y clasifique la forma cuadrática asociada a dicha matriz. Escriba la expresiones polinómica y canónica de la forma cuadrática; determine la matriz de paso ortogonal.
3) Clasifique la forma cuadrática restringida al subespacio formado por el vector nulo y los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2$ de la matriz "A".

EJERCICIO (2 PUNTOS)

Sea la función $f(x;y) = \dfrac{x.\mathrm{Ln}\,(x+y)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$

1) Determine su dominio de definición.
2) Calcule el límite de "f" en el punto $(0;1)$.
3) Si se define $f(0;1) = 0$, calcule $f_y(0;1)$.
4) Calcule las derivadas parciales de "f" en un punto genérico de su dominio.

Solución

1) Es $\mathrm{Dom}.f = \{(x;y) \in \Re^2 \,/\, x + y > 0\} - \{(0;1)\}$.

2) Es:
$$\lim_{(x;y)\to(0;1)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}.\mathrm{Ln}\,(x+y) = 0$$

El factor $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$ está acotado: $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}\right| \le 1,\ \forall\ (x;y) \ne (0;1)$

El factor Ln $(x + y)$ tiene límite 0 en el punto (0:1)

3) $$\frac{\partial f(0;1)}{\partial y} = \lim_{\theta\to 0} \frac{f(0;1+\theta) - f(0;1)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\dfrac{0.\mathrm{Ln}\,(1+\theta)}{\sqrt{0^2 + \theta^2}} - 0}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\ 0 = 0$$

4) Aplica la reglas de derivación en un punto $(x;y) \ne (0;1)$ y tal que $x + y > 0$.

TEORÍA (2 PUNTOS)

Enunciar y demostrar el teorema fundamental de la diagonalización.

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Sea $f:D\subseteq\Re^2\mapsto\Re$ tal que $f(x;y)>k, \forall\ (x;y)\in D$, siendo "k" una constante positiva. Demostrar que si "f" tiene límite "L" en el punto $(a;b)$, entonces "1/f" tiene límite "1/L" en dicho punto.

TEORÍA (1 PUNTO)

Sean "A" y "B" matrices semejantes. Justificando la respuesta, responde:

1) ¿Qué relación existe entre $\mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(B)$? ¿Y entre $\mathrm{tr}(A)$ y $\mathrm{tr}(B)$?

2) ¿Qué relación existe entre los valores propios de "A" y de "B"?

3) ¿Son semejantes A^2 y B^2?

EJERCICIO (1 PUNTO)

Sea "A" una matriz regular; sea la matriz particionada $D=\begin{bmatrix} A & A \\ -I & 0 \end{bmatrix}$. Calcule D^{-1}.

Solución

Siendo $D^{-1}=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$, al exigir que $D\bullet D^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ resulta $D^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -I \\ A^{-1} & I \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} A & A \\ -I & 0 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} AX+AZ & AY+AT \\ -X & -Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} AX+AZ=I \\ AY+AT=0 \\ X=0 \\ Y=-I \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} X=0 \\ Y=-I \\ Z=A^{-1} \\ T=I \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -I \\ A^{-1} & I \end{bmatrix}$$