

EXAMEN SEPTIEMBRE 1998

- 01) Sea "Q" una forma cuadrática definida positiva. Al restringirla a un subespacio:
- a) es indefinida positiva ; b) es definida positiva
 - c) es semidefinida positiva
- 02) Una matriz cuadrada es ortogonal si y sólo si sus vectores fila y vectores columna son
- a) ortogonales ; b) semejantes ; c) ortonormales
- 03) Siendo $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, no siempre es cierto que:
- a) $f(0;0) = (0;0;0)$; b) $f(1;1) = (1;1;1)$; c) $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$
- 04) La aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ es monomorfismo si y sólo si:
- a) $\forall y \in \mathbb{R}^k, \exists x \in \mathbb{R}^n / f(x) = y$; b) $f(0) = 0$; c) $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- 05) Siendo simétrica "A", la matriz particionada $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ es:
- a) simétrica ; b) antisimétrica , c) las anteriores son falsas
- 06) Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es simétrica, es cierto que:
- a) $\exists P$ ortogonal tal que $P^t A P = D$, con "D" diagonal
 - b) $\exists P$ regular tal que $P^t A P = D$, con "D" diagonal
 - c) $\exists P$ simétrica tal que $P^t A P = D$, con "D" diagonal
- 07) Sea $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ simétrica. Un posible polinomio característico de "A" es:
- a) $\lambda^2 - 2$; b) $-\lambda.(\lambda^2 + 2)$; c) $-\lambda.(\lambda^2 - 2)$
- 08) Los valores propios de una matriz simétrica:
- a) son iguales ; b) son reales , c) todos tienen multiplicidad 1
- 09) Una matriz de orden "n" es diagonalizable si y sólo si:
- a) tiene "n" vectores propios ; b) es semejante a una matriz diagonal
 - c) tiene valores propios reales
- 10) Si los menores principales de la matriz asociada a una forma cuadrática de 3 variables son $A_1 = -2, A_2 = 5$ y $A_3 = -1$, la forma cuadrática es:
- a) definida positiva ; b) definida negativa ; c) indefinida

11) Dada la función $f:D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, el valor de $D_v f(a)$ viene dado por:

a) $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a - kv) - f(a)}{k}$; b) $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a + kv) - f(a)}{k}$; c) $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(kv) - f(a)}{k}$

12) Sea $f:D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que el límite de "f" a lo largo de rectas $y = b + m.(x - a)$ vale 1 para todo valor de "m". Podemos asegurar que:

- a) existe el límite doble de "f" en (a;b) y vale 1
- b) si existe el límite doble de "f" en (a;b), vale 1
- c) existe el límite doble de "f" en (a;b), aunque no podemos asegurar su valor

13) Sea $z = f(x;y)$. La derivada parcial de "z" respecto de "x" mide:

- a) la variación porcentual de "z" ante cambios en la variable "x", manteniendo "y" constante
- b) la tasa instantánea de cambio de "z" ante cambios en la variable "x", manteniendo "y" constante
- c) el grado de continuidad de "f" respecto de "x"

14) Sea $f:D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, entonces:

a) $\frac{\partial f(a;b)}{\partial x} = D_{(1;1)} f(a;b)$; b) $\frac{\partial f(a;b)}{\partial x} = D_{(1;0)} f(a;b)$
c) $\frac{\partial f(a;b)}{\partial x} = D_{(0;1)} f(a;b)$

15) ¿Cuál de las siguientes funciones corresponde a una $f:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$?

- a) $f(x;y;z) = (x + y; y.z^2)$. ; b) $f(x;y;z) = x.y.z$
- c) $f(x;y;z) = (x.y; x.z; y.z)$

Solución

- 01) La correcta es la b).
- 02) La correcta es la c).
- 03) La correcta es la b).
- 04) La correcta es la c).
- 05) La correcta es la a).
- 06) La correcta es la a).
- 07) La correcta es la c): polinomio de grado 3 con las 3 raíces reales.
- 08) La correcta es la b).
- 09) La correcta es la b).
- 10) La correcta es la b).
- 11) La correcta es la b).
- 12) La correcta es la b).
- 13) La correcta es la b).
- 14) La correcta es la b).
- 15) La correcta es la a).

EJERCICIO (1 PUNTO)

Sea "A" una matriz ortogonal y la matriz particionada $D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & A^t \end{bmatrix}$. Calcule D^{-1} .

Solución

Siendo $D^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$, al exigir que $D \cdot D^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, resulta:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & A^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} AX & AY \\ X + A^t Z & Y + A^t T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} AX = I \\ AY = 0 \\ X + A^t Z = 0 \\ Y + A^t T = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = A^{-1} \\ Y = 0 \\ Z = -I \\ T = A \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow D^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -I & A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

TEORÍA (1'5 PUNTOS, ECONOMÍA)

Explique los distintos tipos de conjuntos que, desde el punto de vista de la Topología, podemos encontrar en el espacio \mathfrak{R}^2 . Ponga un ejemplo de cada uno de ellos.

TEORÍA (0'5+0'5+0'5 PUNTOS)

Conteste las siguientes preguntas, demostrando su respuesta.

- 1) A un vector propio, ¿pueden corresponderle distintos valores propios?
- 2) Dos matrices semejantes, ¿tienen siempre el mismo polinomio característico?
- 3) Autovectores de una matriz simétrica asociados a autovalores distintos, ¿son ortogonales?

Solución 1

Un vector propio no puede corresponder a distintos valores propios:

Si $\bar{x} \neq \bar{0}$ es autovector del autovalor $\lambda_1 \Rightarrow f(\bar{x}) = \lambda_1 \cdot \bar{x}$

Si $\bar{x} \neq \bar{0}$ es autovector del autovalor $\lambda_2 \Rightarrow f(\bar{x}) = \lambda_2 \cdot \bar{x}$

En consecuencia, es $\lambda_1 \cdot \bar{x} = \lambda_2 \cdot \bar{x} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

TEORÍA (0'5 PUNTOS)

Sean $f: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^m$ y $g: \mathfrak{R}^m \mapsto \mathfrak{R}^k$ aplicaciones lineales, con "g" monomorfismo.

- 1) Determine $\ker. g \cdot f$
- 2) Determine $\ker. g \cdot f$ si "f" también es monomorfismo.

Solución

1) Siendo $h = g \cdot f: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^k$ tal que $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$, es:

$$\ker. h = \{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^n / h(\bar{x}) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^k \} = \{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^n / g(f(\bar{x})) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^k \} =$$

$$\boxed{h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))}$$

$$= \{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^n / f(\bar{x}) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^k \} = \ker. f$$

Si "g" es monomorfismo (inyectiva), el vector cero de \mathfrak{R}^m es el único vector de \mathfrak{R}^m cuya imagen según "g" es el vector cero de \mathfrak{R}^k . Por tanto, siendo $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$, será $g(f(\bar{x})) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^k$ sólo si $f(\bar{x}) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^m$

2) Es:

$$\ker. h = \ker. f = \{ \bar{0} \in \mathfrak{R}^n \}$$

Si "g" es monomorfismo

Si "f" es monomorfismo

EJERCICIO (0'5+1 PUNTOS)

Siendo $a \in \mathbb{R}$, sea $Q: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ la forma cuadrática real definida como:

$$Q(x; y; z) = a \cdot x^2 + a \cdot y^2 + a \cdot z^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot y \cdot z$$

- 1) Determine el signo de "Q" en función del parámetro "a".
- 2) Obtenga la expresión canónica y la matriz de paso ortogonal.

TEORÍA (0'5 PUNTOS)

Dadas dos aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ y $g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ con matrices asociadas en las bases canónicas "A" y "B" respectivamente. Determine las matrices asociadas a las aplicaciones lineales $f + g$ y $f \circ g$ en esas bases.

TEORÍA (1'5 PUNTOS, ADE)

Sean $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tales que en el punto $(a; b)$ la primera tienen límite "n" y la segunda "m". Demuestre que su diferencia tiene límite "n - m" en $(a; b)$.

EJERCICIO (0'5+0'5+0'5 PUNTOS)

Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x; y) = \begin{cases} \frac{x - y + 1}{\sqrt{x} + \sqrt{y - 1}} \cdot \text{sen} \frac{2 \cdot \pi}{x} & \text{si } (x; y) \neq (0; 1) \\ 0 & \text{si } (x; y) = (0; 1) \end{cases}$

Demuestre que es continua en $(0; 1)$, calcule $f_x(2; 2)$ y $D_{(1; 1)}f(2; 2)$.

Solución

- La función "f" es continua en $(0; 1)$, pues su límite en $(0; 1)$ coincide con $f(0; 1)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 1)} \frac{x - y + 1}{\sqrt{x} + \sqrt{y - 1}} \cdot \text{sen} \frac{2 \cdot \pi}{x} = \\ & \text{multiplicamos y dividimos por } \sqrt{x} - \sqrt{y - 1} \\ & = \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 1)} \frac{(x - y + 1) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y - 1})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y - 1}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y - 1})} \cdot \text{sen} \frac{2 \cdot \pi}{x} = \\ & = \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 1)} \frac{(x - y + 1) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y - 1})}{x - y + 1} \cdot \text{sen} \frac{2 \cdot \pi}{x} = \\ & = \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 1)} (\sqrt{x} - \sqrt{y - 1}) \cdot \text{sen} \frac{2 \cdot \pi}{x} = 0 = f(0; 1) \end{aligned}$$

pues el factor $\sqrt{x} - \sqrt{y - 1}$ tiende a 0 y el factor $\text{sen} \frac{2 \cdot \pi}{x}$ está acotado

- En un punto $(x; y)$ tal que $x > 0$ e $y > 1$, es (reglas de derivación):

$$* f_x(x; y) = \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y-1}) - (x-y+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y-1})^2} \right) \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{x} +$$

$$+ \left(\frac{x-y+1}{\sqrt{x} + \sqrt{y-1}} \right) \cdot \left(-\frac{2\pi}{x^2} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{x}$$

$$* f_y(x; y) = \frac{(-1) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y-1}) - (x-y+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y-1})^2} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{x}$$

Por tanto:

$$f_x(2; 2) = \frac{\pi}{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)} ; f_y(2; 2) = 0$$

- Es:

$$D_{(1;1)}f(2;2) = \nabla f(2;2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)}$$

Pues "f" es diferenciable en $(2;2)$, ya que las funciones f_x y f_y son continuas en $(2;2)$