

EXAMEN FEBRERO 1998

01) Sea $f: E \mapsto F$ una aplicación lineal. Es cierto que:

- a) $\text{Im.}f = \{y \in E / \exists x \in F \text{ con } y = f(x)\}$
- b) $\text{Im.}f = \{y \in F / \exists x \in F \text{ con } y = f(x)\}$
- c) $\text{Im.}f = \{y \in F / f(0) = y\}$

02) Se dice que una matriz "A" es simétrica si:

- a) $A^t = A^{-1}$; b) $A^t = -A$; c) $A^t = A$

03) Si la matriz "A" es ortogonal, siempre es cierto que:

- a) $|A| \neq 0$; b) $|A| = 0$; c) $|A| = 1$

04) De los siguientes polinomios característicos, ¿cuál corresponde necesariamente a una matriz diagonalizable de orden 3?:

- a) $-(\lambda - 1)^3$; b) $-(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1)$; c) $-(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2)$

05) Sea $f: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^n$ una aplicación lineal. ¿cuál de las siguientes afirmaciones no tiene que cumplirse forzosamente siempre?

- a) $f(0) = 0$; b) $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathfrak{R}^n$
- c) $f(e_i) = e_i$, siendo e_i el i -ésimo vector de la base canónica de \mathfrak{R}^n

06) Sea λ un valor propio de la matriz $A \in M_{n \times n}(\mathfrak{R})$ y "m" la multiplicidad de λ .

Si $L(\lambda)$ es el subespacio propio asociado a λ , siempre se cumple que:

- a) $\dim.(L(\lambda)) = m$; b) $\dim.(L(\lambda)) < m$; c) $\dim.(L(\lambda)) \leq m$

07) Una forma cuadrática es:

- a) Una aplicación entre dos espacios vectoriales cualesquiera
- b) Una aplicación entre un espacio vectorial y \mathfrak{R}
- c) Una aplicación entre las matrices simétricas y \mathfrak{R}

08) Dos matrices semejantes tienen en común

- a) los mismos vectores propios
- b) los mismos valores propios
- c) nada

09) En el subespacio $x = y$, la forma cuadrática $Q(x; y) = x^2 - 2 \cdot x \cdot y$ es:

- a) semidefinida negativa ; b) indefinida ; c) definida negativa

10) Si $Q(x)$ es una forma cuadrática semidefinida negativa, al restringirla a un subespacio vectorial puede ser

a) definida negativa ; b) indefinida ; c) de cualquier signo

11) Sea $f(x;y) = \text{Ln}(1 - x^2 - y^2)$. Su dominio de definición está formado por los puntos de \mathbb{R}^2 que

- a) están dentro del círculo de centro en el origen y radio 1
- b) están en la circunferencia de centro en el origen y radio 1
- c) están fuera del círculo de centro en el origen y radio 1

12) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $D_{(1;0)}f(a;b) = 1$ y $D_{(0;1)}f(a;b) = 2$

a) $\nabla f(a;b) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; b) $\nabla f(a;b) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; c) $\nabla f(a;b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

13) Si $f(x;y) = \text{Ln} \sqrt{\text{sen}^3(x.y)}$, es:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3.y.\cos(x.y)}{2.\text{sen}(x.y)}$; b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3.y.\text{sen}^2(x.y).\cos(x.y)}{\sqrt[3]{\text{sen}(x.y)}}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3.y.\cos^3(x.y)}{2.\text{sen}^3(x.y)}$

14) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que los límites direccionales a lo largo de las rectas que pasan por el punto $(0;1)$ valen 0. Puede afirmarse que:

- a) el límite doble de "f" en $(0;1)$ existe y vale 0
- b) La función "f" es continua en $(0;1)$
- c) si existe el límite doble de "f" en $(0;1)$, para que "f" sea continua en $(0;1)$ debe ocurrir que $f(0;1) = 0$

16) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que existen $f_1(x)$ y $f_2(y)$ y no existe $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$

a) no existe $\lim_{y \rightarrow b} f_2(y)$; b) no existe $\lim_{(x;y) \rightarrow (a;b)} f(x;y)$

c) existe $\lim_{(x;y) \rightarrow (a;b)} f(x;y)$

Solución

- 01) La correcta es la b): definición hiperfamosa.
- 02) La correcta es la a): definición hiperfamosa.
- 03) El determinante de una matriz ortogonal es $\neq 0$ (vale 1 ó -1).
- 04) La correcta es la c): los autovalores son todos distintos.
- 05) La correcta es la c): no sería serio que necesariamente tuviera que ser $f(e_i) = e_i$.
- 06) La correcta es la c): propiedad hiperfamosa.
- 07) La correcta es la b): definición hiperfamosa.
- 08) La correcta es la b): propiedad hiperfamosa.
- 09) La correcta es la c): $Q(x; x) = x^2 - 2 \cdot x^2 = -x^2 < 0, \forall x \neq 0$.
- 10) La correcta es la a): si en tu pueblo nadie tiene saldo positivo en el banco, puede ocurrir que los que viven en tu calle tengan saldo negativo.
- 11) La correcta es la a):
- $$f(x; y) = \text{Ln} (1 - x^2 - y^2) \in \mathfrak{R} \text{ si } 1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$$
- 12) La correcta es la b): te dan las derivadas parciales de "f" en el punto (a; b) y te piden el gradiente de "f" en dicho punto.
- 13) La correcta es la a):
- $$f(x; y) = \text{Ln} \sqrt{\text{sen}^3(x \cdot y)} = \frac{3}{2} \cdot \text{Ln} \text{sen}(x \cdot y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3 \cdot y \cdot \cos(x \cdot y)}{2 \cdot \text{sen}(x \cdot y)}$$
- 14) El que los límites direccionales de "f" a lo largo de las rectas que pasan por el punto (0;1) valgan 0 no garantiza ni tan siquiera que "f" tenga límite doble en (0;1); por tanto, a) y b) son falsas.
- 15) La correcta es la b): famosa propiedad.

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Sea la forma cuadrática $Q(x;y;z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2.a.x.y$

- 1) Determine los valores de "a" para los que "Q" es definida negativa.
- 2) Determine los valores propios de la matriz asociada a "Q".
- 3) Siendo $a \neq 0$, estudie el signo de "Q" en el subespacio "S" de ecuaciones

$$z - y = 0 ; a.x + y - 2.z = 0$$

Solución

- 1) Una forma cuadrática con matriz asociada es definida negativa sii:

$$H_1 = a_{11} < 0 ; H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 ; H_3 = |A| < 0$$

En nuestro caso es $A = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, siendo:

$$H_1 = -1 ; H_2 = 1 - a^2 ; H_3 = -1 + a^2 = -H_2$$

Por tanto, la forma cuadrática "Q" es definida negativa sii:

$$H_2 = 1 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 1 \Rightarrow |a| < 1$$

- 2) Es:

$$\begin{aligned} & |A - \lambda \cdot I| = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{vmatrix} -1 - \lambda & a & 0 \\ a & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda) \cdot ((-1 - \lambda)^2 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 - a \\ \lambda = -1 + a \end{cases} \end{aligned}$$

- 3) Es:

$$S = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / z - y = 0, a.x + y - 2.z = 0\} = \{(z/a; z; z), \forall z \in \mathbb{R}\}$$

pametrizando la incógnita "z"

La forma cuadrática "Q" es definida negativa en "S", pues:

$$Q(z/a; z; z) = -(z/a)^2 - z^2 - z^2 + 2.a.(z/a).z = -(z/a)^2 < 0, \forall z \neq 0$$

TEORÍA (1 PUNTO)

Indicar, de manera razonada, cómo se estudia el carácter de una aplicación lineal a través de su matriz asociada.

TEORÍA (1 PUNTO)

Sea $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y $Q(x)$ una forma cuadrática definida positiva con matriz asociada "A". Sea la forma cuadrática $Q_1(x) = Q(f(x))$. Demuestre "Q" es definida positiva si "f" es monomorfismo. ¿Qué puede afirmarse si "f" no es monomorfismo?

Solución

- El que "Q" sea definida positiva significa que $Q(x) > 0, \forall x \neq 0$. El que "f" sea monomorfismo significa que $f(x) \neq 0, \forall x \neq 0$. Por tanto, siendo $x \neq 0$, es:

$$Q_1(x) = Q(f(x)) > 0$$

ya $f(x) \neq 0$ y $Q(\text{Pepe}) > 0, \forall \text{Pepe} \neq 0$

- Si "f" no es monomorfismo, la forma cuadrática Q_1 es semidefinida positiva. En efecto, si "f" no es monomorfismo, hay vectores $x \in \mathbb{R}^n (x \neq 0)$ tales que $f(x) = 0$, y para esos vectores sucede que:

$$Q_1(x) = Q(f(x)) = Q(0) = 0$$

pues $f(x) = 0$

Para los vectores $x \in \mathbb{R}^n (x \neq 0)$ tales que $f(x) \neq 0$, se tiene que:

$$Q_1(x) = Q(f(x)) > 0$$

ya $f(x) \neq 0$ y $Q(\text{Pepe}) > 0, \forall \text{Pepe} \neq 0$

TEORÍA (1 PUNTO)

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (a; b) \in D$ y $v \in \mathbb{R}^2$. Dar la definición de

$$\frac{\partial f(a; b)}{\partial x}; \frac{\partial f(a; b)}{\partial y}; D_v f(a; b)$$

TEORÍA (1 PUNTO, ADE)

Demuestre que si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = p$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = q$, es $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = p + q$.

TEORÍA (1 PUNTO)

Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- 1) Si "A" es una matriz idempotente, sus valores propios son 0 y 1.
- 2) Si λ es autovalor de la matriz regular "A", entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1} .
- 3) Si "A" es una matriz simétrica, entonces $A^n = C \cdot D^n \cdot C^{-1}$, donde "D" es la matriz diagonal formada por los valores propios de "A" y "C" es la matriz regular de los autovectores de "A".
- 4) Si "A" y "B" son matrices cuadradas simétricas del mismo orden, la matriz $A \cdot B$ también es simétrica.

Solución

1) Siendo "A" idempotente, es $A^2 = A$.

Si λ es autovalor de "A", existen vectores $\bar{x} \neq \bar{0}$ tales que $A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$; así:

$$\begin{aligned}
 A \cdot (A \cdot \bar{x}) &= A \cdot (\lambda \cdot \bar{x}) \Rightarrow A^2 \cdot \bar{x} = \lambda \cdot (A \cdot \bar{x}) \Rightarrow \\
 &\boxed{A^2 = A} \quad \uparrow \\
 \Rightarrow A \cdot \bar{x} &= \lambda \cdot (A \cdot \bar{x}) \Rightarrow \lambda \cdot \bar{x} = \lambda^2 \cdot \bar{x} \Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\boxed{A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}}
 \end{aligned}$$

2) Si λ es autovalor de "A", existen vectores $\bar{x} \neq \bar{0}$ tales que $A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$; así:

$$A^1 \cdot (A \cdot \bar{x}) = A^{-1} \cdot (\lambda \cdot \bar{x}) \Rightarrow A^{-1} \cdot \bar{x} = \lambda^{-1} \cdot \bar{x}$$

Lo que demuestra que λ^{-1} (o sea, $1/\lambda$) es autovalor de A^{-1} .

3) Si la matriz "A" es simétrica entonces es diagonalizable; es decir, siendo "D" la matriz diagonal formada por los valores propios de "A" y "C" es la matriz regular de los autovectores de "A", es $C^{-1} \cdot A \cdot C = D$; por tanto, despejando "A":

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$$

Así:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= A \cdot A = (C \cdot D \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot D \cdot C^{-1}) = C \cdot D^2 \cdot C^{-1} \\
 A^3 &= A^2 \cdot A = (C \cdot D^2 \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot D \cdot C^{-1}) = C \cdot D^3 \cdot C^{-1} \\
 &\dots\dots\dots \\
 A^n &= A^{n-1} \cdot A = (C \cdot D^{n-1} \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot D \cdot C^{-1}) = C \cdot D^n \cdot C^{-1}
 \end{aligned}$$

4) El que "A" y "B" sean simétricas no garantiza que lo sea $A \cdot B$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \equiv \text{simétrica} ; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \text{simétrica} \\
 A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \equiv \text{no simétrica}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x;y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y - x}{x^2 - 2 \cdot x + y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 1/2 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$

- 1) Demuestre que "f" no es continua en el punto (0;0).
- 2) Si existen, calcule las derivadas parciales de "f" en (0;0).

Solución

- 1) La función "f" no es continua en el punto (0;0), pues el límite de "f" en dicho punto según la trayectoria $x = m \cdot y^2$ depende del valor de "m":

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x;y) \rightarrow (0;0) \\ x=m \cdot y^2}} f(x;y) &= \lim_{y \rightarrow 0} f(m \cdot y^2; y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(m \cdot y^2) \cdot y - m \cdot y^2}{(m \cdot y^2)^2 - 2 \cdot (m \cdot y^2) + y^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{m \cdot y - m}{m^2 \cdot y^2 - 2 \cdot m + 1} = \frac{m}{2 \cdot m - 1} \\ &\quad \boxed{\text{siempre que } -2 \cdot m + 1 \neq 0} \end{aligned}$$

- 2) Es:

$$\begin{aligned} * f_x(0;0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0 + \lambda; 0) - f(0;0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{-\lambda}{\lambda^2 - 2 \cdot \lambda} - \frac{1}{2}}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} -\frac{\lambda^2}{2 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda)} = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot (\lambda - 2)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * f_y(0;0) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(0;0 + \theta) - f(0;0)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{\theta^2} - \frac{1}{2}}{\theta} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} = \text{no existe} \end{aligned}$$

EJERCICIO (1 PUNTO, ECONOMÍA)

Sea $S = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < 1/2, x = 1 - (1/2)^n, n = 1, 2, \dots\}$.

Caracterice topológicamente el punto $(1;0)$. ¿Es abierto "S"? ¿es cerrado?

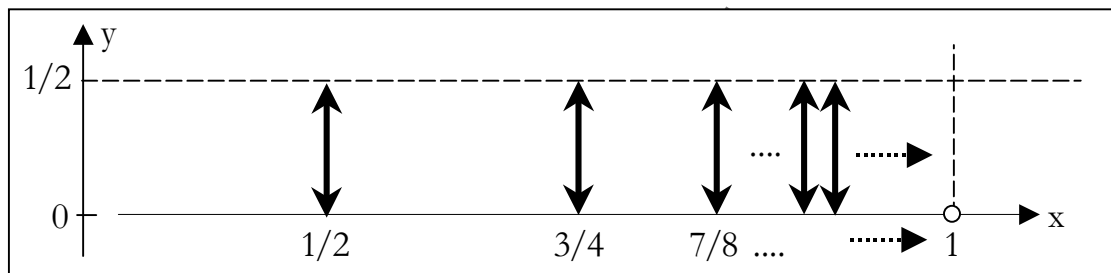
Solución

Si en $x = 1 - (1/2)^n$ asignamos a "n" los valores 1, 2, 3, vamos obteniendo los infinitos valores que pueden tomar las abscisas de los puntos del conjunto "S"

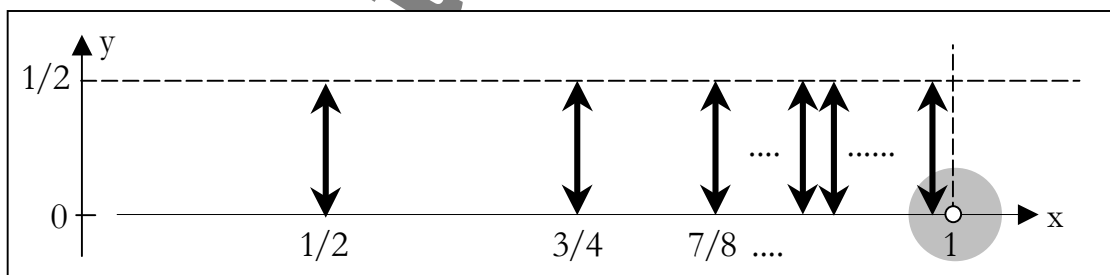
$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots \rightarrow 1$$

Si $n \rightarrow \infty$, el número $x = 1 - (1/2)^n$ tiende a 1 con valores inferiores a 1, pues $(1/2)^n$ tiende a 0 con valores positivos si $n \rightarrow \infty$.

Por tanto, siendo $0 < y < 1/2$, el conjunto "S" lo constituyen los puntos $(x;y)$ que forman las flechas indicadas en la siguiente figura.



El punto $(1;0)$, que no pertenece al conjunto "S", no es exterior a "S", pues toda bola abierta de centro en $(1;0)$ contiene algún punto de "S". En consecuencia, si $(1;0)$ no es exterior a "S", es adherente a "S"; y también es punto de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en $(1;0)$ contiene infinitos puntos de "S".



El punto $(1;0)$ no es interior "S", pues no pertenece a "S". El punto $(1;0)$ es frontera de "S", pues toda bola abierta de centro en $(1;0)$ contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S". Como $\text{Int.}(S) = \emptyset \neq S$, el conjunto "S" no es abierto. Como $\text{Adh.}(S) = A_1 \cup A_2 \neq S$, el conjunto "S" no es cerrado:

$$A_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1/2, x = 1 - (1/2)^n, n = 1, 2, \dots\}$$

$$A_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1/2, x = 1\}$$