EXAMEN FEBRERO 2007

01) La función $f(x)=\begin{cases} 2+x^2 & \text{si } x<0 \\ 3+x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ es:

a) Continua en $\Re$; b) Continua en $\Re-\{0\}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3=f(0)$

02) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ vale: a) No existe ; b) $+\infty$; c) 2

03) En la teoría de la empresa, se considera el coste total "C" como una función del nivel de producción "Q"; esto, es, $C=f(Q)$. De acuerdo con la definición de función real de una única variable real:

a) Se relaciona cada valor de coste con un nivel de producción
b) Cada nivel de producción determina un valor de coste único
c) Puede ocurrir que algunos niveles de producción no estén relacionados con valores de coste

04) Dadas las proposiciones "P": los pares ordenados $(a;b)$ y $(b;a)$ son iguales; "Q": "a" es igual a "b", se cumple:

a) $P \Leftrightarrow Q$; b) $P \nLeftarrow Q$; c) $P \nRightarrow Q$

05) Las coordenadas del vector $v=(3;1)$ en la base $B=\{(1;0),(-1;1)\}$ de $\Re^2$ son:

a) $[v]_B=(1;-1)_B$; b) $[v]_B=(3;-1)_B$; c) $[v]_B=(2;-1)_B$

06) El vector $(1;-3;5)$ se expresa como combinación lineal de los vectores:

a) $(1;1;1),(1;1;0),(1;0;0)$; b) $(1;1;0),(1;0;0)$
c) $(1;1;1),(1;0;0)$

07) ¿Cuál de los siguientes elementos no pertenece al producto cartesiano del conjunto de los números naturales por si mismo?

a) $(-1;5)$; b) $(3;7)$; c) $(1/2;1)$

08) Los vectores $(2;0;1)$, $(0;1;0)$ y $(-1;0;1)$ son:

a) Linealmente dependientes ; b) Linealmente independientes
c) Ortogonales dos a dos

09) Si los vectores u, v y w son ortogonales dos a dos, entonces:

a) v y $(u+v-w)$ son ortogonales
b) v y $(u-v)$ son ortogonales
c) v y $(u-2w)$ son ortogonales

©netkeynes.com

10) Si $u \in \Re^3$ es tal que $\| u \| = \sqrt{5}$, entonces:

a) $u \bullet u = 5$; b) $\| -3u \| = -3.\sqrt{5}$; c) $u = (1;1;3)$

11) Sea "A" una matriz ortogonal.

a) $\det(A) = 1$; b) $\det(A) = \det(A^{-1})$; c) $\det(A) < 0$

12) Sean "A" y "B" matrices cuadradas. Si "A" es simétrica, entonces:

a) $AB - 2I$ es simétrica ; b) $B^t AB$ es simétrica ; c) $B^t A$ es simétrica

13) La matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ es regular:

a) si $a = b = 0$; b) si $(a;b) \neq (0;0)$; c) $\forall a, b \in \Re$

14) El rango de $\begin{bmatrix} -6 & a & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es 2:

a) si $a = 0$; b) si $a \neq 0$; c) $\forall a \in \Re$

15) Sea $AX = b$ un sistema lineal de 4 ecuaciones con 5 incógnitas. Si $rg(A) = 4$ y $rg(A/b) = 4$, el sistema es:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

16) Sea $AX = b$ un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Si $rg(A/b) = 3$, el sistema no puede ser:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

17) Sea el subespacio $S = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \ / \ x + y + 2.z = 0 \right\}$:

a) $\{(-1;1;0), (-2;0;1)\}$ es una base ortogonal de "S"
b) $\{(-1;1;0), (-1;-1;1)\}$ es una base ortogonal de "S"
c) $\{(-1;1;0), (1;-1;1)\}$ es una base ortogonal de "S"

18) Una forma cuadrática es:

a) Una matriz ; b) Un polinomio ; c) Una aplicación lineal

19) Sean "A" y "B" matrices semejantes.

a) $\det(AB) = \det(A)$; b) $\det(AB) = 2.\det(B)$; c) $\det(AB) = \det(B)^2$

20) Sea $A \in M_{3\times 3}(\Re)$ con autovalores 0 (simple) y 1 (doble).

a) "A" es simétrica ; b) "A" es ortogonal ; c) "A" no es regular

©netkeynes.com

21) Sea $A \in M_{n\times n}(\Re)$ y $D \in M_{n\times n}(\Re)$ una matriz diagonal tal que $A = PDP^{-1}$

a) "P" es única y ortogonal
b) "A" es diagonalizable
c) Los vectores propios de "A" asociados a los valores propios de "A" forman una base ortonormal de $\Re^n$

22) La forma cuadrática $-x^2 - y^2 + 4.y.z$ restringida a $x + y + z = 0$ es:

a) Semidefinida negativa ; b) Definida negativa ; c) Indefinida

23) Se dice que $\lambda \in \Re$ es un valor propios de $A \in M_{n\times n}(\Re)$ si:

a) $\forall u \in \Re^n,\ u \neq 0,\ Au = \lambda u$
b) $\exists u \in \Re^n$ tal que $Au = \lambda u$
c) $\exists u \in \Re^n,\ u \neq 0$, tal que $Au = \lambda u$

24) El determinante de la matriz asociada a una forma cuadrática "Q" de 3 variables es positivo:

a) "Q" puede ser definida positiva o indefinida
b) "Q" es definida positiva ; c) "Q" es indefinida

25) La forma canónica de Jordan semejante a la matriz $A \in M_{3\times 3}(\Re)$ con autovalores -1 (doble) y 2 (simple), con $\dim.L(\lambda = -1) = 1$, es:

a) $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; b) $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

©netkeynes.com

SOLUCIÓN

01) La correcta es b), pues "f" carece de límite en $x = 0$:

$$* \text{ Si } x \to 0^- \Rightarrow f(x) = 2 + x^2 \to 2$$
$$* \text{ Si } x \to 0^+ \Rightarrow f(x) = 3 + x \to 3$$

02) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1).(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$

03) La correcta es b).

04) La correcta es a).

05) La correcta es c): $(3;-1) = \alpha \bullet (1;0) + \beta \bullet (-1;1) \Rightarrow \alpha = 2, \beta = -1$

06) La correcta es a), pues $(1;1;1), (1;1;0)$ y $(1;0;0)$ son una base de $\Re^3$.

07) La correcta es b).

08) La correcta es b).

09) La correcta es c): $v \bullet (u - 2w) = v \bullet u - 2.(v \bullet w) = 0 - 2.0 = 0$

10) La correcta es a).

11) La correcta es b): si $A^{-1} = A^t \Rightarrow \left| A^{-1} \right| = \left| A^t \right| = |A|$

12) La correcta es b): $(B^t AB)^t = B^t A^t (B^t)^t = B^t AB$

13) La correcta es b): $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$ siempre que $(a;b) \neq (0;0)$

14) $\text{rg}\begin{bmatrix} -6 & a & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{rg}\begin{bmatrix} -6 & a \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$ siempre que $a \neq 0$.

15) La correcta es b), pues $\text{rg}(A) = \text{rg}(A/b) = 4 <$ nº de incógnitas.

16) La correcta es b): como $\text{rg}(A/b) = 3$, no sucede que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A/b) <$ nº de incógnitas.

17) La correcta es b).

18) La correcta es b).

19) La correcta es c): $|AB| = |A|.|B| \underset{\uparrow}{=} |B|.|B| = (|B|)^2$

$\boxed{\text{"A" y "B" semejantes} \Rightarrow |A| = |B|}$

20) La correcta es c), pues $|A|$ es el producto de los autovalores de "A" .

21) La correcta es b), pues "A" es semejante a una matriz diagonal.

22) La correcta es b).

23) La correcta es c).

24) La correcta es a).

25) La correcta es b).

©netkeynes.com

TEORIA ECONOMÍA (0'75 PUNTOS)

Si el vector $\bar{v} \in \Re^n$ es ortogonal a los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k \in \Re^n$, ¿es ortogonal a cualquier combinación lineal de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$?

SOLUCIÓN

Siendo $\bar{v}$ ortogonal a $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$, es $\begin{cases} \bar{v} \bullet \bar{u}_1 = 0 \\ \bar{v} \bullet \bar{u}_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ \bar{v} \bullet \bar{u}_k = 0 \end{cases}$

Siendo $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in \Re$, sea $\bar{z} = \delta_1 \bullet \bar{u}_1 + \delta_2 \bullet \bar{u}_2 + \ldots + \delta_k \bullet \bar{u}_k$.

El vector $\bar{v}$ es ortogonal a $\bar{z}$, pues $\bar{v} \bullet \bar{z} = 0$:

$$\bar{v} \bullet \bar{z} = \bar{v} \bullet (\delta_1 \bullet \bar{u}_1 + \delta_2 \bullet \bar{u}_2 + \ldots + \delta_k \bullet \bar{u}_k) =$$
$$= \delta_1.(\bar{v} \bullet \bar{u}_1) + \delta_2.(\bar{v} \bullet \bar{u}_2) + \ldots + \delta_k.(\bar{v} \bullet \bar{u}_k) =$$
$$= \delta_1.0 + \delta_2.0 + \ldots \delta_k.0 = 0$$

TEORIA ECONOMÍA (0'5 PUNTOS)

Sean $A, B \in M_n(\Re)$ semejantes y regulares. ¿Son semejantes A^{-1} y B^{-1}?

SOLUCIÓN

Si "A" y "B" son semejantes, existe $P \in M_n(\Re)$ regular y tal que $A = P^{-1} \bullet B \bullet P$; así, existiendo A^{-1} y B^{-1}, es:

$$A^{-1} = \left(P^{-1} \bullet B \bullet P\right)^{-1} = P^{-1} \bullet B^{-1} \bullet (P^{-1})^{-1} = P^{-1} \bullet B^{-1} \bullet P$$

Por tanto, A^{-1} y B^{-1} son matrices semejantes.

TEORIA (0'5 PUNTOS)

¿Qué propiedades de los determinantes permiten escribir lo siguiente?

$$\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 18.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 9.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 9.2.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 18.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

un determinante no varía si a una de sus líneas se le suma cualquier combinación lineal de otras paralelas a ella. En nuestro caso, a la 2ª fila se le resta el triple de la 1ª

©nekeynes.com

TEORIA A ELEGIR ECONOMÍA (1'25 PUNTOS)

1) Demuestre que a cada vector propio $\bar{u}$ de $A \in M_n(\Re)$ le corresponde un único valor propio λ.

2) Demuestre que en un espacio vectorial "E", un conjunto $S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ de vectores de "E" es ligado si y sólo si alguno de los vectores de "S" es CL de los restantes.

SOLUCIÓN 1

Si $\bar{u} \neq \bar{0}$ es autovector asociado al autovalor λ_1, es $A \bullet \bar{u} = \lambda_1 \bullet \bar{u}$.

Si $\bar{u} \neq \bar{0}$ es autovector asociado al autovalor λ_2, es $A \bullet \bar{u} = \lambda_2 \bullet \bar{u}$.
Por tanto, es $\lambda_1 \bullet \bar{u} = \lambda_2 \bullet \bar{u}$, o sea $(\lambda_1 - \lambda_2) \bullet \bar{u} = \bar{0}$, y como $\bar{u} \neq \bar{0}$, ha de ser $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, es decir: $\lambda_1 = \lambda_2$.

SOLUCIÓN 2

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ es ligado, hay "n" reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos y tales que

$$\alpha_1 \bullet \bar{e}_1 + \alpha_2 \bullet \bar{e}_2 \ldots + \alpha_n \bullet \bar{e}_n = \bar{0}$$

Así, sin perder generalidad, supuesto que $\alpha_1 \neq 0$, es

$$\bar{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bullet \bar{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \bullet \bar{e}_n$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\bar{e}_1 = \beta_2 \bullet \bar{e}_2 + \ldots + \beta_n \bullet \bar{e}_n$ es $\bar{e}_1 - \beta_2 \bullet \bar{e}_2 - \ldots - \beta_n \bullet \bar{e}_n = \bar{0}$, por lo que $S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ es ligado.

TEORIA A ELEGIR ADE (1'25 PUNTOS)

1) Demuestre que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales.

2) Enuncie y demuestre el teorema de Rouché-Frobenius.

TEORIA ADE (0'5 PUNTOS)

Sean $A, B \in M_{n\times n}$ tales que $\bar{u}$ es autovector de ambas. Demuestre que $\bar{u}$ es autovector de $C = \alpha_1 \bullet A + \alpha_2 \bullet B$.

SOLUCIÓN

Si $\bar{u} \neq \bar{0}$ es autovector de $A, B \in M_{n\times n}$, entonces $A \bullet \bar{u} = \lambda_1 \bullet \bar{u}$ y $B \bullet \bar{u} = \lambda_2 \bullet \bar{u}$.

Es:

$$C \bullet \bar{u} = (\alpha_1 \bullet A + \alpha_2 \bullet B) \bullet \bar{u} = \alpha_1 \bullet (A \bullet \bar{u}) + \alpha_2 \bullet (B \bullet \bar{u}) =$$
$$= \alpha_1 \bullet (\lambda_1 \bullet \bar{u}) + \alpha_2 \bullet (\lambda_2 \bullet \bar{u}) = (\alpha_1.\lambda_1 + \alpha_2.\lambda_2) \bullet \bar{u}$$

©netkeynes.com

TEORIA ADE (0'5 PUNTOS)

Sea $A \in M_{n\times n}$ regular. Clasifique el sistema lineal homogéneo $A \bullet X = 0$.

SOLUCIÓN

Si $A \in M_{n\times n}$ es regular $\Rightarrow$ $rg(A) = n = n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema $A \bullet X = 0$ tiene solución única, que es la trivial.

TEORIA ADE (0'5 PUNTOS)

Si λ es autovalor de $A \in M_{n\times n}$, demuestre que $S = \left\{ \bar{u} \in \Re^n \,/\, A \bullet \bar{u} = \lambda \bullet \bar{u} \right\}$ es subespacio vectorial de $\Re^n$.

EJERCICIO ADE (0'75 PUNTOS)

Estúdiese la independencia lineal de $(0;k;1;1), (2;1;-1;1)$ y $(-2;1;2;0)$ según los valores de "k".

EJERCICIO ECONOMÍA (0'75 PUNTOS)

Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2.x+1}{2.x+3}\right)^{x^2}$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2.x+1}{2.x+3}\right)^{x^2} = \left(1^{\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} x^2.\left(\frac{2.x+1}{2.x+3} - 1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2.x^2}{2.x+3}} = e^{+\infty} = +\infty$$

EJERCICIO (2'5 PUNTOS)

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $a \neq 0$.

1) Justifique que "A" es diagonalizable.
2) Para $a = 1$:
   Calcule una matriz $D \in M_3$ diagonal semejante a "A" y una matriz $P \in M_3$ regular que diagonalice a "A".
   Calcule una matriz $C \in M_3$ ortogonal que diagonalice a "A".
   Calcule A^n, siendo "n" un natural.
   Clasifique la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3)$ asociada a "A", dé su expresión polinómica y su expresión canónica.
   Clasifique $Q(x_1;x_2;x_3)$ restringida a $x_1 + x_3 = 0$ y $x_2 = 0$.
   Clasifique $Q(x_1;x_2;x_3)$ restringida a $x_2 + x_3 = 0$.

©netkeynes.com