EXAMEN SEPTIEMBRE 2006

01) En la teoría de la empresa, se considera el coste total "C" como una función del nivel de producción "Q"; esto, es, $C = f(Q)$. De acuerdo con la definición de función real de una única variable real:

a) Se relaciona cada valor de coste con un nivel de producción
b) Cada nivel de producción determina un valor de coste único
c) Puede ocurrir que algunos niveles de producción no estén relacionados con valores de coste

02) Dadas las proposiciones "P": los pares ordenados $(a;b)$ y $(b;a)$ son iguales; "Q": "a" es igual a "b", se cumple:

a) $P \Leftrightarrow Q$; b) $P \not\Leftarrow Q$; c) $P \not\Rightarrow Q$

03) Sea el subespacio $S = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \;/\; x + y + 2.z = 0 \right\}$:

a) $\{(-1;1;0), (-2;0;1)\}$ es una base ortogonal de "S"
b) $\{(-1;1;0), (-1;-1;1)\}$ es una base ortogonal de "S"
c) $\{(-1;1;0), (1;-1;1)\}$ es una base ortogonal de "S"

04) Se dice que $\lambda \in \Re$ es un valor propios de $A \in M_{n\times n}(\Re)$ si:

a) $\forall u \in \Re^n$, $u \neq 0$, $Au = \lambda u$; b) $\exists u \in \Re^n$ tal que $Au = \lambda u$
c) $\exists u \in \Re^n$, $u \neq 0$, tal que $Au = \lambda u$

05) La matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ es regular:

a) si $a = b = 0$; b) si $(a;b) \neq (0;0)$; c) $\forall a, b \in \Re$

06) Sea $A \in M_{n\times n}(\Re)$ y $D \in M_{n\times n}(\Re)$ una matriz diagonal tal que $A = PDP^{-1}$

a) "P" es única y ortogonal
b) "A" es diagonalizable
c) Los vectores propios de "A" asociados a los valores propios de "A" forman una base ortonormal de $\Re^n$

07) Sea $A \in M_{3\times 3}(\Re)$ con autovalores 0 (simple) y 1 (doble).

a) "A" es simétrica ; b) "A" es ortogonal ; c) "A" no es regular

08) El determinante de la matriz asociada a una forma cuadrática "Q" de 3 variables es positivo:

a) "Q" puede ser definida positiva o indefinida
b) "Q" es definida positiva ; c) "Q" es indefinida

09) La forma cuadrática $-x^2 - y^2 + 4.y.z$ restringida a $x + y + z = 0$ es:

a) Semidefinida negativa ; b) Definida negativa ; c) Indefinida

10) Si $u \in \Re^3$ es tal que $\| u \| = \sqrt{5}$, entonces:

a) $u \bullet u = 5$; b) $\| -3u \| = -3.\sqrt{5}$; c) $u = (1;1;3)$

11) Si los vectores u, v y w son ortogonales dos a dos, entonces:

a) v y $(u + v - w)$ son ortogonales
b) v y $(u - v)$ son ortogonales
c) v y $(u - 2w)$ son ortogonales

12) Sea "A" una matriz ortogonal.

a) $\det(A) = 1$; b) $\det(A) = \det(A^{-1})$; c) $\det(A) < 0$

13) Sea $AX = b$ un sistema lineal de 4 ecuaciones con 5 incógnitas. Si $rg(A) = 4$ y $rg(A/b) = 4$, el sistema es:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

14) Sea $AX = b$ un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Si $rg(A/b) = 3$, el sistema no puede ser:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

15) La forma canónica de Jordan semejante a la matriz $A \in M_{3\times 3}(\Re)$ con autovalores -1 (doble) y 2 (simple), con $\dim. L(\lambda = -1) = 1$, es?

a) $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; b) $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

16) ¿Cuál de los siguientes conjuntos de puntos es la gráfica de una función real de la variable real "x"?

a) $\left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; y^2 = x \right\}$; b) $\left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; y^2 = x^2 \right\}$
c) $\left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; y = x^2 \right\}$

17) Sea $f : D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ tal que existe $\lim\limits_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y)$.

Sea $g(x) = f(x; 2.(x-a)^2 + b)$

a) No podemos asegurar la existencia de $\lim\limits_{x\to a} g(x)$

b) Existe de $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a;b)$

c) Existe de $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y)$

18) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ continua en "D" y $g:\Re \mapsto \Re$ tal que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$..

$$\text{a) } \lim_{x \to a} f(x;g(x)) = f(a;b) \text{ ; b) } \lim_{x \to a} f(x;g(x)) \neq \lim_{(x;y) \to (a;b)} f(x;y)$$

$$\text{c) } \lim_{x \to a} f(x;g(x)) \neq f(a;b)$$

19) Sea $f:D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ y $a \in D$. La matriz $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \ldots \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^t$ se llama

a) Jacobiana de "f" en "a" ; b) Hessiana de "f" en "a"
c) Gradiente de "f" en "a"

20) Sea $f:D \subseteq \Re^n \mapsto \Re^m$ diferenciable en $a \in D$ y $g:D \subseteq \Re^m \mapsto \Re$ diferenciable en $\Re^m$. El gradiente de $g \bullet f$ en "a" es:

$$\text{a) } \nabla g(a)^t \bullet Jf(a) \text{ ; b) } \nabla g(f(a))^t \bullet Jf(a) \text{ ; c) } Jg(a) \bullet \nabla g(f(a))$$

21) Sea $g(x;y) = f(x+y;2.y;x-y)$, siendo $f(u;v;w)$ una función diferenciable:

$$\text{a) } \frac{\partial g(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x+y;2.y;x-y)}{\partial u} + 2.\frac{\partial f(x+y;2.y;x-y)}{\partial v} - \frac{\partial f(x+y;2.y;x-y)}{\partial w}$$

$$\text{b) } \frac{\partial g(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x+y;2.y;x-y)}{\partial u} + \frac{\partial f(x+y;2.y;x-y)}{\partial v} + \frac{\partial f(x+y;2.y;x-y)}{\partial w}$$

$$\text{c) } \frac{\partial g(x;y)}{\partial y} = 2.\frac{\partial f(x+y;2.y;x-y)}{\partial v}$$

22) Si $f:\Re^3 \mapsto \Re$ es de clase C^3, su polinomio de Taylor de orden 2 en $(a;b)$ es:

$$\text{a) } f(a;b) + \nabla^t f(a;b) \bullet \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + (x-a;y-b) \bullet Hf(a;b) \bullet \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } f(a;b) + \nabla^t f(a;b) \bullet \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}.(x-a;y-b) \bullet Jf(a;b) \bullet \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } f(a;b) + \nabla^t f(a;b) \bullet \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}.(x-a;y-b) \bullet Hf(a;b) \bullet \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

23) Si $x - y^3 + x.\text{Ln } y = 0$ define implícitamente a "y" como función de "x" en un entorno del punto (1;1), la elasticidad de $y(x)$ en puntos de dicho entorno es:

$$\text{a) } -\frac{x + x.\text{Ln } y}{3.y^3} \text{ ; b) } -\frac{x + x.\text{Ln } y}{x - 3.y^3} \text{ ; c) } \frac{1}{3}$$

24) Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re$ de clase C^1 y homogénea. Si la pendiente de la curva de nivel que pasa por el punto (1;2) es 2, la pendiente de la curva de nivel que pasa por el punto $(2;4)$ es:

a) 2 ; b) 4 ; c) 8

25) Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re$ de clase C^1 y homogénea de grado 2:

a) $x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) = 2$
b) $x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) = 2.f(x;y)$
c) $x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) = \lambda^2.f(x;y)$

26) Sea $f:\Re \mapsto \Re$ continua en $[a;b]$. La integral $\int_a^b f(x).dx$ es:

a) Una función de "x" ; b) La diferencial de "f" en "x"
c) Un número real

27) Si $f:\Re \mapsto \Re$ es continua en $[a;b]$ y $F(x)$ es una primitiva de "f" en dicho intervalo, existe $c \in [a;b]$ tal que:

a) $\int_a^b f(x).dx = f(c).(b-a)$; b) $\int_a^b F(x).dx = f(c).(b-a)$
c) $\int_a^b F(x).dx = f(c).(b-a)$

28) Sea $f:\Re \mapsto \Re$ continua en $[a;b]$ y $F(x)$ una primitiva de "f" en dicho intervalo:

a) $\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$; b) $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b F(x).dx$
c) $\int_a^b F(x).dx = f(b) - f(a)$

29) La integral $\int_a^8 \frac{dx}{(x-4)^2}$

a) Es impropia si $a < 4$; b) Es impropia si $a > 4$
c) No es impropia

30) Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re$ de clase C^1:

a) $\int_a^b \int_c^d \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.dx.dy = f(b;d) - f(a,c)$
b) $\int_a^b \int_c^d \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.dx.dy = \int_a^b f(x;y).dy$
c) $\int_a^b \int_c^d \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.dx.dy = \int_a^b (f(x;d) - f(x,c)).dx$

SOLUCIÓN

01) La correcta es b).
02) La correcta es a).
03) La correcta es b).
04) La correcta es c).
05) La correcta es b): $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$ siempre que $(a;b) \neq (0;0)$
06) La correcta es b), pues "A" es semejante a una matriz diagonal.
07) La correcta es c), pues $|A|$ es el producto de los autovalores de "A" .
08) La correcta es a).
09) La correcta es b).
10) La correcta es a).
11) La correcta es c): $v \bullet (u - 2w) = v \bullet u - 2.(v \bullet w) = 0 - 2.0 = 0$
12) La correcta es b): si $A^{-1} = A^t \Rightarrow |A^{-1}| = |A^t| = |A|$
13) La correcta es b), pues $rg(A) = rg(A/b) = 4 <$ nº de incógnitas.
14) La correcta es b): como $rg(A/b) = 3$, no es $rg(A) = rg(A/b) <$ nº incógnitas.
15) La correcta es b).
16) La correcta es c): a cada valor de "x" le corresponde un único valor de "y".
17) La correcta es c): el límite según $y = 2.(x-a)^2 + b$ coincide con el límite doble
18) Supuesto que $(a;b) \in D$, la correcta es a).
19) La correcta es a).
20) La correcta es b): regla de la cadena.
21) La correcta es a): regla de la cadena.
22) La correcta es c).
23) La elasticidad es $\frac{x}{y}.y' = \frac{x}{y}.\left(-\frac{1 + \text{Ln } y}{(x/y) - 3.y^2}\right) = -\frac{x + x.\text{Ln } y}{x - 3.y^3}$
24) La correcta es a): si $f:\Re^2 \mapsto \Re$ es homogénea, la pendiente de la curva de nivel que pasa por (1;2) coincide con la pendiente de la curva de nivel que pasa por $\lambda \bullet (1;2)$. En nuestro caso es $\lambda = 2$.
25) La correcta es b): Teorema de Euler.
26) La correcta es c).
27) La correcta es a): Teorema del valor medio.
28) La correcta es a): regla de Barrow.
29) La correcta es a): si $a < 4 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ no está acotada en $x = 4 \in [a;8]$.
30) $\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.dy\right).dx = \int_a^b (f(x;y))_{y=c}^{y=d}.dx = \int_a^b (f(x;d) - f(x,c)).dx$

TEORIA (0'5 PUNTOS)

Si el vector $\bar{v} \in \Re^n$ es ortogonal a los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k \in \Re^n$, ¿es ortogonal a cualquier combinación lineal de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$?

SOLUCIÓN

Siendo $\bar{v}$ ortogonal a $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$, es $\begin{cases} \bar{v} \bullet \bar{u}_1 = 0 \\ \bar{v} \bullet \bar{u}_2 = 0 \\ \vdots \\ \bar{v} \bullet \bar{u}_k = 0 \end{cases}$

Siendo $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in \Re$, sea $\bar{z} = \delta_1 \bullet \bar{u}_1 + \delta_2 \bullet \bar{u}_2 + \ldots + \delta_k \bullet \bar{u}_k$.

El vector $\bar{v}$ es ortogonal a $\bar{z}$, pues $\bar{v} \bullet \bar{z} = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{v} \bullet \bar{z} &= \bar{v} \bullet (\delta_1 \bullet \bar{u}_1 + \delta_2 \bullet \bar{u}_2 + \ldots + \delta_k \bullet \bar{u}_k) = \\ &= \delta_1.(\bar{v} \bullet \bar{u}_1) + \delta_2.(\bar{v} \bullet \bar{u}_2) + \ldots + \delta_k.(\bar{v} \bullet \bar{u}_k) = \\ &= \delta_1.0 + \delta_2.0 + \ldots \delta_k.0 = 0 \end{aligned}$$

TEORIA (0'5 PUNTOS)

Sean $A, B \in M_n(\Re)$ semejantes y regulares, ¿son semejantes A^{-1} y B^{-1}?

SOLUCIÓN

Si "A" y "B" son semejantes, existe $P \in M_n(\Re)$ regular y tal que $A = P^{-1} \bullet B \bullet P$; así, existiendo A^{-1} y B^{-1}, es:

$$A^{-1} = \left(P^{-1} \bullet B \bullet P\right)^{-1} = P^{-1} \bullet B^{-1} \bullet (P^{-1})^{-1} = P^{-1} \bullet B^{-1} \bullet P$$

Por tanto, A^{-1} y B^{-1} son matrices semejantes.

TEORIA (0'5 PUNTOS)

¿Qué propiedades de los determinantes permiten escribir lo siguiente?

$$\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 18.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 9.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 9.2.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 18.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

un determinante no varía si a una de sus líneas se le suma cualquier combinación lineal de otras paralelas a ella. En nuestro caso, a la 2ª fila se le resta el triple de la 1ª

TEORIA A ELEGIR (1'25 PUNTOS)

1) Demuestre que a cada vector propio $\overline{u}$ de $A \in M_n(\Re)$ le corresponde un único valor propio λ

2) Dada $f: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ diferenciable en el punto $a \in D$, diga como está definida la aplicación diferencial de "f" en "a", $Df(a)$, aportando la demostración correspondiente.

TEORIA (0'5 PUNTOS)

Si la ecuación $F(x^2; x - y^2; z) = 0$ define implícitamente a "z" como función de "x" e "y", determine $\nabla z(x;y)$.

SOLUCIÓN

Sea $u = x^2$ y $v = x - y^2$. Es: $\nabla z(x;y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2.x.F_u + F_v}{F_z} \\ \dfrac{2.y.F_v}{F_z} \end{pmatrix}$

- Al derivar respecto de "x" los dos miembros de $F(u;v;z) = 0$, resulta:

$$F_u.\frac{\partial u}{\partial x} + F_v.\frac{\partial v}{\partial x} + F_z.z_x = 0 \Rightarrow F_u.(2.x) + F_v.(1) + F_z.z_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_x = -\frac{2.x.F_u + F_v}{F_z}$$

- Al derivar respecto de "y" los dos miembros de $F(u;v;z) = 0$, resulta:

$$F_v.\frac{\partial v}{\partial y} + F_z.z_y = 0 \Rightarrow F_v.(-2.y) + F_z.z_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{2.y.F_v}{F_z}$$

TEORIA (0'5 PUNTOS)

Sean $f: \Re^n \mapsto \Re^m$ y $g: \Re^m \mapsto \Re^k$.

1) ¿Cuándo puede afirmarse que $Dom.(g \bullet f) = Dom.f$?

2) ¿Cuándo puede afirmarse que $Dom.(g \bullet f) = Dom.g$?

SOLUCIÓN

Es:

$$Dom.(g \bullet f) = \left\{ \overline{x} \in \Re^n \Big/ \begin{matrix} \overline{x} \in Dom.f \\ f(\overline{x}) \in Dom.g \end{matrix} \right\} =$$

$$\boxed{f(\overline{x}) \in Dom.g \Rightarrow \overline{x} \in f^{-1}(Dom.g)}$$

$$= \left\{ \overline{x} \in \Re^n \,/\, \overline{x} \in (Dom.f) \cap f^{-1}(Dom.g) \right\}$$

1) $Dom.(g \bullet f) = Dom.f$ sólo si $Dom.g = \Re^m$.

2) $Dom.(g \bullet f) = Dom.g$ sólo si $n = m$ y $(Dom.f) \cap f^{-1}(Dom.g) = Dom.g$.

EJERCICIO

Sea $f(K;L)=K^{1/3}.L^{2/3}$.

1) ¿Es continua en el punto (1;1)?
2) ¿Es diferenciable en el punto (1;1)?
3) Determine el desarrollo de Taylor de segundo orden de "f" en el punto (1;1).

SOLUCIÓN

1) La función "f" es continua en (1;1), pues $\lim\limits_{(K;L)\to(1;1)} K^{1/3}.L^{2/3}=1=f(1;1)$.

2) La función "f" es diferenciable en (1;1), pues sus funciones derivadas primeras son continuas en dicho punto:

$$f_K(K;L)=\frac{1}{3}.K^{-2/3}.L^{2/3}\ ;\ f_L(K;L)=\frac{2}{3}.K^{1/3}.L^{-1/3}.$$

3) Es:

$$f(K;L)=f(1;1)+\nabla f(1;1)\bullet\begin{bmatrix}K-1\\L-1\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2!}.\begin{bmatrix}K-1 & L-1\end{bmatrix}\bullet Hf(1;1)\bullet\begin{bmatrix}K-1\\L-1\end{bmatrix}+R_L=$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\nabla f(1;1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}.K^{-2/3}.L^{2/3} & \frac{2}{3}.K^{1/3}.L^{-1/3}\end{bmatrix}_{(1;1)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\\ Hf(1;1)=\begin{bmatrix}-\frac{2}{9}.K^{-5/3}.L^{2/3} & \frac{2}{9}.K^{-2/3}.L^{-1/3}\\ \frac{2}{9}.K^{-2/3}.L^{-1/3} & -\frac{2}{9}.K^{1/3}.L^{-4/3}\end{bmatrix}_{(1;1)}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9}\end{bmatrix}.\end{array}}$$

$$=1+\frac{1}{3}.(K-1)+\frac{2}{3}.(L-1)+$$

$$+\frac{1}{2}.\left(-\frac{2}{9}.(K-1)^2+\frac{4}{9}.(K-1).(L-1)-\frac{2}{9}.(L-1)^2\right)+R_L$$

EJERCICIO

Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 1/a & 0\\ a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $a\neq 0$.

1) Justifique que "A" es diagonalizable.
2) Para $a=1$:
   Calcule una matriz $D\in M_3$ diagonal semejante a "A" y una matriz $P\in M_3$ regular que diagonalice a "A".
   Calcule una matriz $C\in M_3$ ortogonal que diagonalice a "A".
   Calcule A^n, siendo "n" un natural.
   Clasifique la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3)$ asociada a "A", dé su expresión polinómica y su expresión canónica
   Clasifique $Q(x_1;x_2;x_3)$ restringida a $x_1+x_3=0$ y $x_2=0$.

EJERCICIO

Calcule $\iint_D (x+y)^2.(x^2-y^2).dx.dy$, siendo "D" la región limitada por las rectas $y=x,\ y=-x\ \text{y}\ x=1$. Utilice el cambio de variables $u=\dfrac{x+y}{2},\ v=\dfrac{x-y}{2}$.

SOLUCIÓN

Si $\left\{\begin{matrix} u=(x+y)/2 \\ v=(x-y)/2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=u+v \\ y=u-v \end{matrix}\right\}$.

En general, si para calcular la integral doble de la función $f:\Re^2 \mapsto \Re$ en el dominio $D \subseteq \Re^2$ hacemos $x=h_1(u;v)$ e $y=h_2(u;v)$, es:

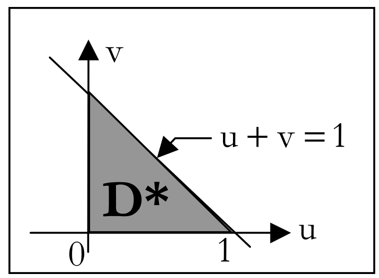
$$\iint_D f(x;y).dx.dy = \iint_{D^*} f(h_1(u;v);h_2(u;v)).|J|.du.dv$$

donde D* es el dominio en que se transforma "D" como consecuencia del cambio de variables, y "J" es el jacobiano de dicho cambio.

Determinemos D*:

$$\left.\begin{matrix} y=x \\ y=-x \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u-v=u+v \\ u-v=-(u+v) \\ u+v=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} v=0 \\ u=0 \\ u+v=1 \end{matrix}\right.$$

$$\boxed{x=u+v\ ;\ y=u-v}$$



Jacobiano:

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Por tanto:

$$\iint_D (x+y)^2.(x^2-y^2).dx.dy = \iint_D (x+y)^3.(x-y).dx.dy =$$

$$\boxed{\left.\begin{matrix} x=u+v \\ y=u-v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+y=2.u \\ x-y=2.v \\ dx.dy=|J|.du.dv=2.du.dv \end{matrix}\right.}$$

$$=2.\iint_{D^*} (2.u)^3.(2.v).du.dv =$$

$$=32.\int_{u=0}^{u=1}\left(\int_{v=0}^{v=1-u} u^3.v.dv\right).du = 32.\int_{u=0}^{u=1} u^3\left(\frac{v^2}{2}\right)_{v=0}^{v=1-u}.du =$$

$$=16.\int_{u=0}^{u=1} u^3.(1-u)^2.du = 16.\beta(4;3) = 16.\frac{\Gamma(4).\Gamma(3)}{\Gamma(7)} =$$

$$=16.\frac{3!.2!}{6!} = \frac{4}{15}$$