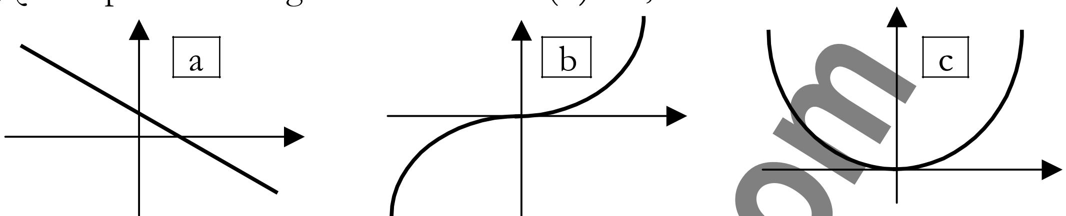
EXAMEN JUNIO 2006

01) Dada la función $y = 2.x^2/(x^2 - 9)$, se tiene:

a) $y = 2$ es una asíntota horizontal ; b) $x = 2$ es una asíntota vertical
c) $y = 2.x + 2$ es una asíntota oblicua

02) ¿Cuál puede ser la gráfica de "f" si $f'(x) > 0, \forall x \in \Re$?



03) Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas:

a) Por ser los vectores de una base linealmente independientes
b) Por ser los vectores de una base un sistema de generadores
c) Por ninguna de las anteriores razones

04) Si $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ son vectores ortonormales, los vectores $3 \bullet \overline{v}_1$ y $-2 \bullet \overline{v}_2$ son:

a) Linealmente dependientes ; b) Unitarios ; c) Ortogonales

05) Sean "A", "C", "D" y "X" matrices del mismo orden y $C - A$ una matriz invertible. Al despejar "X" en $AX + C = CX - D$, resulta:

a) $X = (C - A)^{-1}(C + D)$; b) $X = (C + D)(C - A)^{-1}$
c) $X = (C - D)(C - A)^{-1}$

06) Sean "A", "B" y "C" matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 2$, $|B| = 4$ y $|C| = 3$. El determinante $\left|\frac{1}{|A|}B^tC^{-1}\right|$ vale: a) 2/3 ; b) 1/6 ; c) 6

07) La representación vectorial de un sistema de ecuaciones lineales expresa el vector de términos independientes como:

a) Combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes
b) Combinación lineal de las filas de la matriz de coeficientes
c) Semejante a la matriz de coeficientes

08) Un sistema lineal de 2 ecuaciones con 4 incógnitas no puede ser:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

09) Sea $A \in M_{4\times4}(\Re)$ con autovalores $\lambda_1 = 2$ (triple) y $\lambda_2 = 0$ (simple), con $\dim.L(\lambda_1) = 1$. ¿Cuál de las siguientes matrices es una forma canónica de Jordan asociada a ella?

$$a)\ J=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\ ;\ b)\ J=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\ ;\ c)\ J=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

10) Sea "A" es una matriz cuadrada semejante a la matriz diagonal "D":

a) "A" y "D" tienen la misma diagonal principal
b) La diagonal principal de "D" la forman los autovalores de "A"
c) La matriz "D" puede estar formada por elementos cualesquiera de $\Re$

11) Si el determinante de la matriz asociada a una forma cuadrática de 3 variables es negativo, la forma cuadrática no puede ser:

a) Semidefinida negativa ; b) Indefinida ; c) Definida negativa

12) Si "A" es definida positiva, la forma cuadrática con matriz asociada A^{-1} es:

a) Semidefinida positiva ; b) Definida positiva ; c) Indefinida

Solución

01) La correcta es la a), pues $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2.x^2}{x^2-9}=2.$

02) La correcta es la b), pues "f" es creciente en todo punto, ya que su derivada es positiva en todo punto.

03) La correcta es la a).

04) La correcta es la c).

05)
$$AX+C=CX-D\Rightarrow C+D=CX-AX\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C+D=(C-A)X\Rightarrow X=(C-A)^{-1}(C+D)$$

06) $\left|\dfrac{1}{|A|}B^tC^{-1}\right|=\left(\dfrac{1}{|A|}\right)^3.\left|B^tC^{-1}\right|=\left(\dfrac{1}{|A|}\right)^3.\left|B^t\right|.\left|C^{-1}\right|=\left(\dfrac{1}{|A|}\right)^3.|B|.\dfrac{1}{|C|}=\dfrac{1}{6}$

07) La correcta es la a). Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}2.x+3.y+4.z=7\\8.x+5.y+6.z=9\end{array}\right\}\Leftrightarrow x\bullet\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}+y\bullet\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}+z\bullet\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$$

08) La correcta es la c), pues como la matriz de los coeficientes tiene 2 filas, su rango no puede ser igual al número de incógnitas, que es 4.

09) La correcta es la a).

10) La correcta es la b).

11) La correcta es la a): si el determinante es negativo $\Rightarrow \lambda=0$ no es autovalor $\Rightarrow$ no es semidefinida.

12) La correcta es la b).

TEORÍA

Demuestre que los autovalores de una matriz cuadrada son las raíces de su polinomio característico.

TEORÍA

Demuestre que en un espacio vectorial de dimensión finita, todas las bases tienen el mismo número de vectores.

TEORÍA

Si "A" es una matriz con rango "r", determine el rango de $B=\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

Solución

- Es $\text{rg}(B)=\text{rg}(A)=r$, pues si "A" tiene "m" filas, a los efectos del cálculo del rango de "B", podemos eliminar las "m" últimas filas de "B", por ser respectivamente iguales a las "m" primeras.
- Como el rango de una matriz expresa el número máximo de filas LI que tiene, si $\text{rg}(A)=r$, en el bloque $\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}$ hay "r" filas LI, lo mismo que en el bloque $\begin{bmatrix} 0 & A \end{bmatrix}$. Además, cualquier fila de uno de estos dos bloques no es CL de las filas del otro bloque; por tanto, es $\text{rg}(C)=r+r=2.r$.

EJERCICIO

Dada la matriz asociada a una forma cuadrática $Q(x)=x^t Ax$ de 3 variables

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

1) Determinar "a" para que "Q" sea semidefinida positiva.
2) Si $a=4$, hallar la expresión canónica y obtener una matriz de paso P ortogonal.

Solución

1) Es $H_1=4>0$, $H_2=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}>0$ y $H_3=|A|=3.(4.a-1)$.

   Como $H_1>0$ y $H_2>0$, es semidef. positiva si $H_3=3.(4.a-1)=0 \Rightarrow a=1/4$

2) Autovalores si $a=4$: $|A-\lambda \bullet I|=0 \Rightarrow \lambda=3$ (doble), 5 (simple)

- La expresión canónica es $Q(y_1;y_2;y_3)=3.y_1^2+3.y_2^2+5.y_3^2$.
- Autovectores de $\lambda=3$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=3)=\{(x_3;x_2;x_3),\ \forall x_2,x_3 \in \Re\}=$$

$$=\{x_3 \bullet (1;0;1)+x_2 \bullet (0;1;0),\ \forall x_2,x_3 \in \Re\}$$

Los vectores $\overline{v}_1 = (1;0;1)$ y $\overline{v}_2 = (0;1;0)$ forman una base de $L(\lambda = 3)$.

Los vectores $\overline{w}_1 = \dfrac{\overline{v}_1}{\|\overline{v}_1\|} = (1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2})$ y $\overline{w}_2 = \dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = (0;1;0)$ forman una base ortonormal de $L(\lambda = 3)$.

- Autovectores de $\lambda = 5$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A-5\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 5) = \{(-x_3;0;x_3), \forall x_3 \in \Re\} = \{x_3 \bullet (-1;0;1), \forall x_3 \in \Re\}$$

El vector $\overline{v}_3 = (-1;0;1)$ es una base de $L(\lambda = 5)$.

El vector $\overline{w}_3 = \dfrac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = (-1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2})$ es una base ortonormal de $L(\lambda = 5)$.

- La matriz de paso ortogonal es

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 \end{matrix}$$

EJERCICIO

Determine "a" y "b" para que $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & b & 2 \end{bmatrix}$ sea diagonalizable.

Solución

Las autovalores de ""A" son $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ ambos dobles.

La matriz "A" es diagonalizable sólo si $a = b = 0$, pues sólo en tal caso sucede que

$$\dim . L(\lambda = -1) = 4 - rg \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & b & 3 \end{bmatrix} = 2$$

$$\dim . L(\lambda = 2) = 4 - rg \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ a & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & b & 0 \end{bmatrix} = 2$$