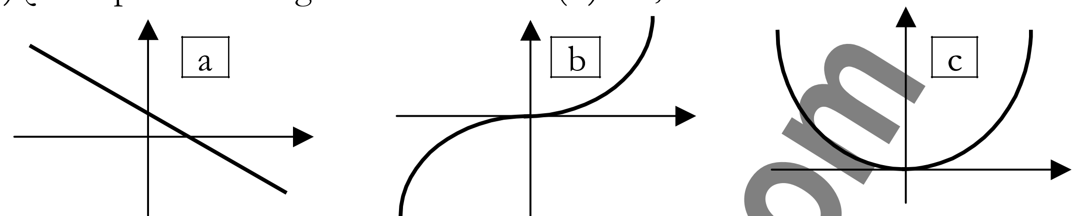
EXAMEN FEBRERO 2006

01) Dada la función $y = 2.x^2/(x^2 - 9)$, se tiene:

a) $y = 2$ es una asíntota horizontal ; b) $x = 2$ es una asíntota vertical
c) $y = 2.x + 2$ es una asíntota oblicua

02) ¿Cuál puede ser la gráfica de "f" si $f'(x) > 0, \forall x \in \Re$?



03) Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas:

a) Por ser los vectores de una base linealmente independientes
b) Por ser los vectores de una base un sistema de generadores
c) Por ninguna de las anteriores razones

04) Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son vectores ortonormales, los vectores $3 \bullet \bar{v}_1$ y $-2 \bullet \bar{v}_2$ son:

a) Linealmente dependientes ; b) Unitarios ; c) Ortogonales

05) Sean "A", "C", "D" y "X" matrices del mismo orden y $C - A$ una matriz invertible. Al despejar "X" en $AX + C = CX - D$, resulta:

a) $X = (C - A)^{-1}(C + D)$; b) $X = (C + D)(C - A)^{-1}$
c) $X = (C - D)(C - A)^{-1}$

06) Sean "A", "B" y "C" matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 2$, $|B| = 4$ y $|C| = 3$. El determinante $\left|\frac{1}{|A|}B^tC^{-1}\right|$ vale: a) 2/3 ; b) 1/6 ; c) 6

07) La representación vectorial de un sistema de ecuaciones lineales expresa el vector de términos independientes como:

a) Combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes
b) Combinación lineal de las filas de la matriz de coeficientes
c) Semejante a la matriz de coeficientes

08) Un sistema lineal de 2 ecuaciones con 4 incógnitas no puede ser:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

09) Sea $A \in M_{4\times4}(\Re)$ con autovalores $\lambda_1 = 2$ (triple) y $\lambda_2 = 0$ (simple), con $\dim.L(\lambda_1) = 1$. ¿Cuál de las siguientes matrices es una forma canónica de Jordan asociada a ella?

©netkeynes.com

$$a)\ J=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\ ;\ b)\ J=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\ ;\ c)\ J=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

10) Sea "A" es una matriz cuadrada semejante a la matriz diagonal "D":

a) "A" y "D" tienen la misma diagonal principal
b) La diagonal principal de "D" la forman los autovalores de "A"
c) La matriz "D" puede estar formada por elementos cualesquiera de $\Re$

11) Si el determinante de la matriz asociada a una forma cuadrática de 3 variables es negativo, la forma cuadrática no puede ser:

a) Semidefinida negativa ; b) Indefinida ; c) Definida negativa

12) Si "A" es definida positiva, la forma cuadrática con matriz asociada A^{-1} es:

a) Semidefinida positiva ; b) Definida positiva ; c) Indefinida

13) El conjunto $X=\left\{(x;y)\in\Re^2\ /\ x>0,\ x+y\leq 1\right\}$:

a) Es cerrado ; b) Es abierto ; c) No es abierto ni cerrado

14) Las curvas de nivel de cota "C" de la función $g(x;y)=e^{f(x;y)}$ son:

a) Las de "f" de la misma cota "C" ; b) Las de "f" de cota Ln C
c) Las de "f" de cota e^C

15) Si $f:D\subseteq\Re\mapsto\Re$ es continua en $a\in D$, el valor de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ coincide con:

a) $f(a)$; b) $f'(a)$; c) $\int_0^a f(x).dx$

16) Sea $f:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$. La derivada $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ se define:

a) Para un punto $a\in D$; b) Para un punto $a\in Ac.(D)$
c) Para un punto $a\in Int.(D)$

17) Si $a\neq 0$, la ecuación $z^3-a.x.z+x.y=0$ define a "z" como función de "x" e "y" en un entorno del punto:

a) (0;0;1) ; b) (0;1;0) ; c) (a;0;a)

18) La matriz jacobiana de $f(x;y)=(x^2.y\ ;\ e^{sen\,(x+y)})$ es:

a) $\begin{bmatrix}2.x.y. & x^2\\ e^{sen(x+y)}.\cos(x+y) & e^{sen(x+y)}.\cos(x+y)\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2.x.y. & x^2\\ y.e^{sen(x+y)}.\cos(x+y) & x.e^{sen(x+y)}.\cos(x+y)\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2.x.y. & e^{sen(x+y)}.\cos(x+y)\end{bmatrix}$

©netkeynes.com

19) La función $f:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$, con "D" abierto es diferenciable en $a\in D$ si:

$$\text{a) } \lim_{v\to 0} \frac{f(a+v)-f(a)-\nabla f(a)^t\bullet v}{\|v\|}=0$$
$$\text{b) } \lim_{v\to 0} f(a+v)-f(a)-\nabla f(a)^t\bullet v=0$$
$$\text{c) } \lim_{v\to 0} \frac{f(a+v)-f(a)}{\|v\|}=0$$

20) Sea $f:D\subseteq\Re^2\mapsto\Re$ homogénea de grado "r", la función $g(x;y)=f(f(x;y);y)$

a) No es homogénea para ningún "r" ; b) Es homogénea de grado "r"
c) Es homogénea si $r=1$

21) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2.n}$

a) Es convergente ; b) Es divergente

c) Es convergente sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos

22) Si $f:[a;b]\mapsto\Re$ es continua en $[a;b]$, entonces:

a) $\int_a^b f(x).dx=f(b)-f(a)$; b) $\int_a^b f(x).dx=f(b-a)$
c) $\int_a^b f(x).dx=f(c).(b-a)$, siendo $c\in[a;b]$

23) ¿Cuál de las siguientes integrales es impropia?

a) $\int_0^1 x^3.(1-x^2).dx$; b) $\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^2}.dx$; c) $\int_1^2 \frac{\text{Ln } x}{x}.dx$

24) Es cierto que:

a) $\int_1^2 \int_0^{2-x} f(x;y).dx.dy=\int_0^1 \int_0^{2-y} f(x;y).dx.dy$
b) $\int_1^2 \int_0^{2-x} f(x;y).dx.dy=\int_0^1 \int_1^{2-y} f(x;y).dx.dy$
c) $\int_1^2 \int_0^{2-x} f(x;y).dx.dy=\int_1^2 \int_{2-y}^{1} f(x;y).dx.dy$

Solución

01) La correcta es la a), pues $\lim_{x\to\infty} \frac{2.x^2}{x^2-9}=2$.

02) La correcta es la b), pues "f" es creciente en todo punto, ya que su derivada es positiva en todo punto.

03) La correcta es la a).

04) La correcta es la c).

©netkeynes.com

05) $$AX + C = CX - D \Rightarrow C + D = CX - AX \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C + D = (C - A)X \Rightarrow X = (C - A)^{-1}(C + D)$$

06) $\left|\frac{1}{|A|}B^tC^{-1}\right| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 .\left|B^tC^{-1}\right| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 .\left|B^t\right|.\left|C^{-1}\right| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 .|B|.\frac{1}{|C|} = \frac{1}{6}$

07) La correcta es la a). Por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} 2.x + 3.y + 4.z = 7 \\ 8.x + 5.y + 6.z = 9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} + y \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + z \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

08) La correcta es la c), pues como la matriz de los coeficientes tiene 2 filas, su rango no puede ser igual al número de incógnitas, que es 4.

09) La correcta es la a).

10) La correcta es la b).

11) La correcta es la a): si el determinante es negativo $\Rightarrow \lambda = 0$ no es autovalor $\Rightarrow$ no es semidefinida.

12) La correcta es la b).

13) La correcta es la c).

14) La correcta es la b): $g(x;y) = C \Rightarrow e^{f(x;y)} = C \Rightarrow f(x;y) = \text{Ln } C$

15) La correcta es la a).

16) La correcta es la c).

17) La correcta es la c): siendo $F(x;y;z) = z^3 - a.x.z + x.y$, el punto $(a;0;a)$ satisface la ecuación $F(x;y;z) = 0$ y además $F_z(a;0;a) \neq 0$.

18) La correcta es la a).

19) La correcta es la a).

20) La correcta es la c):

$$g(\lambda.x;\lambda.y) = f(f(\lambda.x;\lambda.y);\lambda.y) = f(\lambda.f(x;y);\lambda.y) =$$

$$\boxed{\text{Siendo "f" homogénea de grado } r = 1, \text{ es } f(\lambda.x;\lambda.y) = \lambda.f(x;y)}$$

$$= \lambda.f(f(x;y);y) = \lambda.g(x;y)$$

21) La correcta es la a): la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2.n}$ es STP y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n^{2.n}} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$.

22) La correcta es la c).

23) La correcta es la b): $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ no está acotada en $x = 2 \in [1;5]$.

24) La correcta es la b).

©netkeynes.com

TEORÍA

Demuestre que los autovalores de una matriz cuadrada son las raíces de su polinomio característico.

TEORÍA

Si "A" es una matriz con rango "r", determine el rango de $B=\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

Solución

- Es $rg(B)=rg(A)=r$, pues si "A" tiene "m" filas, a los efectos del cálculo del rango de "B", podemos eliminar las "m" últimas filas de "B", por ser respectivamente iguales a las "m" primeras.
- Como el rango de una matriz expresa el número máximo de filas LI que tiene, si $rg(A)=r$, en el bloque $\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}$ hay "r" filas LI, lo mismo que en el bloque $\begin{bmatrix} 0 & A \end{bmatrix}$. Además, cualquier fila de uno de estos dos bloques no es CL de las filas del otro bloque; por tanto, es $rg(C)=r+r=2.r$.

©netkeynes.com

TEORÍA

Sea $D \subseteq \Re^2$ un cono y $F:D \mapsto \Re$ una función homogénea de clase C^2 en "D".

1) Calcule la pendiente de una curva de nivel de "F", demostrando que es constante a lo largo de cualquier semirrecta que parta del origen.
2) Calcule la derivada segunda de una curva de nivel de "F". ¿Es constante a lo largo de cualquier semirrecta que parta del origen?

Solución

Si el punto $(x;z)$ pertenece a la curva S_k de nivel "k" de "F" (o sea, $F(x;z)=k$), la pendiente $z'(x)$ de dicha curva de nivel en dicho punto la obtenemos derivando respecto de "x" los dos miembros de la ecuación $F(x;z)=k$:

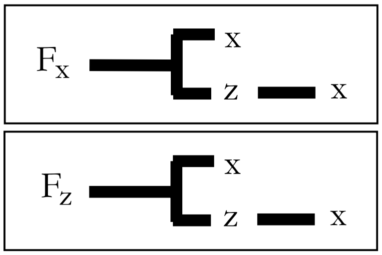
$$F_x(x;z)+F_z(x;z).z'(x)=0 \Rightarrow z'(x)=-\frac{F_x(x;z)}{F_z(x;z)}$$

Como $F_x(x;z)$ y $F_z(x;z)$ son homogéneas del mismo grado, la función derivada $z'(x)=-\dfrac{F_x(x;z)}{F_z(x;z)}$ es homogénea de grado 0; así: $z'(\lambda.x)=\lambda^0.z'(x)=z'(x)$.

En el punto $(x;z)$ es $z'(x)=-\dfrac{F_x(x;z)}{F_z(x;z)}$; así:

$$z''(x)=\frac{d(z'(x))}{dx}=-\frac{d(F_x/F_z)}{dx}\underset{\boxed{\text{regla de derivación de un cociente}}}{=}-\frac{\frac{d(F_x)}{dx}.F_z-F_x.\frac{d(F_z)}{dx}}{(F_z)^2}=$$

$$= -\frac{\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\right).F_z - F_x.\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\right)}{(F_z)^2} =$$



Si el valor que toma "F" depende de los valores de "x" y "z", los valores que toman las funciones derivadas F_x y F_z también dependen de los valores de "x" y "z"

$$= -\frac{\left(F_{x2} + F_{zx}\cdot\frac{dz}{dx}\right).F_z - F_x.\left(F_{xz} + F_{z2}\cdot\frac{dz}{dx}\right)}{(F_z)^2}$$

Como $z'(x)$ es homogénea de grado 0, la función $z''(x)$ es homogénea de grado -1; así: $z''(\lambda.x) = \lambda^{-1}.z''(x) \neq z''(x)$.

EJERCICIO

Calcule el vector gradiente y la matriz hessiana de $f(x;y;z) = \mathrm{Ln}\,(x^2.y + 2.z)$

Solución

$$\nabla f(x;y;z) = \begin{bmatrix} \frac{2.x.y}{x^2.y+2.z} \\ \frac{x^2}{x^2.y+2.z} \\ \frac{2}{x^2.y+2.z} \end{bmatrix}$$

$$Hf(x;y;z) = \begin{bmatrix} 2.y.\frac{2.z - x^2.y}{(x^2.y+2.z)^2} & \frac{4.x.z}{(x^2.y+2.z)^2} & -\frac{4.x.y}{(x^2.y+2.z)^2} \\ \frac{4.x.z}{(x^2.y+2.z)^2} & -\frac{x^4}{(x^2.y+2.z)^2} & -\frac{2.x^2}{(x^2.y+2.z)^2} \\ -\frac{4.x.y}{(x^2.y+2.z)^2} & -\frac{2.x^2}{(x^2.y+2.z)^2} & -\frac{4}{(x^2.y+2.z)^2} \end{bmatrix}$$

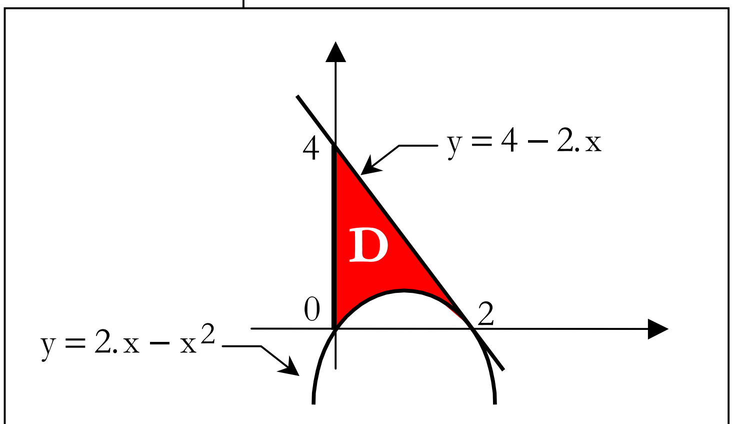
©netkeynes.com

EJERCICIO

Resuelva $\iint_D \frac{3}{5}.dx.dy$, siendo $D=\{(x;y)\in\Re^2 \;/\; 2.x+y\le 4,\; y\ge 2.x-x^2,\; x\ge 0\}$

Solución

$$\iint_D \frac{3}{5}.dx.dy = \frac{3}{5}.\int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=2.x-x^2}^{y=4-2.x} dy\right).dx =$$



$$=\frac{3}{5}.\int_{x=0}^{x=2}(y)_{2.x-x^2}^{4-2.x}.dx=\frac{3}{5}.\int_{x=0}^{x=2}\left(4-4.x+x^2\right).dx=$$

$$=\frac{3}{5}.\left(4.x-2.x^2+\frac{1}{3}.x^3\right)_0^2=\frac{3}{5}.\left(4.2-2.2^2+\frac{1}{3}.2^3\right)=\frac{8}{5}$$

EJERCICIO

Dada la matriz asociada a una forma cuadrática $Q(x)=x^tAx$ de 3 variables

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & a\end{bmatrix}$$

1) Determinar "a" para que "Q" sea semidefinida positiva.
2) Si $a=4$, hallar la expresión canónica y obtener una matriz de paso P ortogonal.

Solución

1) Es $H_1=4>0$, $H_2=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}>0$ y $H_3=|A|=3.(4.a-1)$.

Si $H_1>0$ y $H_2>0$, es semidefinida positiva si $H_3=3.(4.a-1)=0\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

2) Si $a=4\Rightarrow A=\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$

- Autovalores: $|A-\lambda\bullet I|=-\lambda^3+11.\lambda^2-39.\lambda+45=0\Rightarrow\lambda=\begin{cases}3\text{ (doble)}\\ 5\text{ (simple)}\end{cases}$
- La expresión canónica es $Q(y_1;y_2;y_3)=3.y_1^2+3.y_2^2+5.y_3^2$.

©netkeynes.

- Autovectores de $\lambda = 3$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 3) = \{(x_3; x_2; x_3),\ \forall\, x_2, x_3 \in \Re\} =$$
$$= \{x_3 \bullet (1;0;1) + x_2 \bullet (0;1;0),\ \forall\, x_2, x_3 \in \Re\}$$

Los vectores $\overline{v}_1 = (1;0;1)$ y $\overline{v}_2 = (0;1;0)$ forman una base de $L(\lambda = 3)$.

Los vectores $\overline{w}_1 = \dfrac{\overline{v}_1}{\|\overline{v}_1\|} = (1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2})$ y $\overline{w}_2 = \dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = (0;1;0)$ forman una base ortonormal de $L(\lambda = 3)$,

- Autovectores de $\lambda = 5$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A-5\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 5) = \{(-x_3; 0; x_3),\ \forall\, x_3 \in \Re\} = \{x_3 \bullet (-1;0;1),\ \forall\, x_3 \in \Re\}$$

El vector $\overline{v}_3 = (-1;0;1)$ es una base de $L(\lambda = 5)$.

El vector $\overline{w}_3 = \dfrac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = (-1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2})$ es una base ortonormal de $L(\lambda = 5)$.

- La matriz de paso ortogonal es

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 \end{matrix}$$

©netkeynes.com