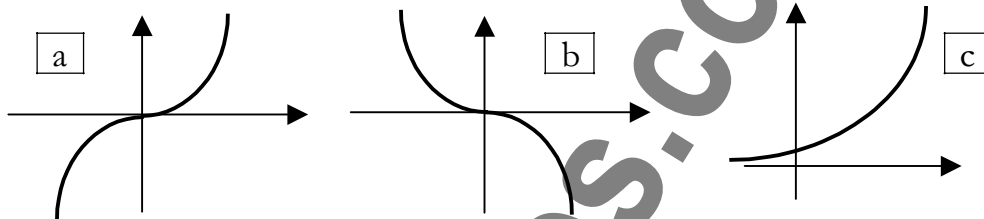


# EXAMEN FEBRERO 2005 ECONOMIA

- 01) Sabiendo que se cumple la implicación  $P \Rightarrow Q$ , si un elemento "a" de un conjunto no cumple "Q":
- a) No cumple "P" ; b) Puede cumplir "P"
  - c) No se sabe nada sobre el cumplimiento de "P"
- 02) Sea  $\{v_1, v_2, v_3\}$  una base ortogonal de un espacio vectorial "E". El conjunto  $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ :
- a) También es una base ortogonal ; b) Es una base, pero no ortogonal
  - c) No es base
- 03) Los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son linealmente dependientes si:
- a)  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0, \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{R}$
  - b)  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ , siendo  $\alpha_i \neq 0$  para algún "i"
  - c)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$
- 04) Si un sistema  $Ax = b$  es compatible:
- a) "b" es combinación lineal de las columnas de "A"
  - b) "b" es combinación lineal de las filas de "A"
  - c) No se cumple en general a) ni b)
- 05) Sea un sistema homogéneo  $Ax = 0$ , con  $A \in M_{m \times n}(\mathfrak{R})$  y sea "S" el conjunto de soluciones, entonces:
- a) "S" es un subespacio vectorial de dimensión "n"
  - b) "S" no es un subespacio vectorial
  - c) "S" es un subespacio vectorial de dimensión  $n - \text{rg}(A)$
- 06) La inversa de la matriz particionada  $A = \begin{bmatrix} B & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$  es
- a)  $\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$  ; b)  $\begin{bmatrix} B^{-1} & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$  ; c)  $\begin{bmatrix} B^{-1} & B^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$
- 07) Si  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , el polinomio característico de  $A^{-1}$  es:
- a)  $P(\lambda) = (\lambda - 1).(\lambda + 2).(\lambda - 2)$
  - b)  $P(\lambda) = (\lambda + 1).(\lambda^2 - 4)$
  - c)  $P(\lambda) = (\lambda - 1).(\lambda + \frac{1}{2}).(\lambda - \frac{1}{2})$

- 08) Sean "A" y "B" matrices cuadradas de orden "n" diagonalizables. En general, no se cumple que:
- a)  $A^2$  es diagonalizable ; b)  $B^{-1}$  es diagonalizable ; c) AB es diagonalizable
- 09) Dada la forma cuadrática  $Q(x) = x^t Ax$  con "A" de orden par. Si  $|A| < 0$ :
- a) Es definida positiva ; b) Es indefinida  
c) No puede ser indefinida
- 10) Sea "Q" una forma cuadrática semidefinida. Al restringirla a un subespacio:
- a) Es semidefinida ; b) No puede ser definida  
c) No puede ser indefinida
- 11) Dada una función, se sabe que es creciente y su pendiente es creciente. ¿Cuál podría ser su gráfica?



## Solución

01) Si  $P \equiv$  nacido en Caravaca y  $Q \equiv$  nacido en la provincia de Murcia, es obvio que  $P \Rightarrow Q$ . Por tanto, si no se cumple "Q", no se cumple "P".

02)  $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$  es una base, pues  $\text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$ , pero no es ortogonal, ya que los vectores no son ortogonales dos a dos:

$$v_1 \cdot (v_1 + v_2) = v_1 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_1 \neq 0$$

$$v_1 \cdot v_2 = 0, \text{ pues } v_1 \text{ y } v_2 \text{ son ortogonales}$$

03) La correcta es b): famosa definición.

04) La correcta es a).

05) La correcta es c).

06) La correcta es a):  $\begin{bmatrix} B & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

07) La correcta es c), pues los autovalores de  $A^{-1}$  son  $1, \frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$ .

08) La a) siempre es cierta: si la matriz "A" es semejante a la matriz diagonal " $\Lambda$ ", la matriz  $A^2$  es semejante a la matriz diagonal  $\Lambda^2$ . En efecto: si existe "P" tal que

$$A = P\Lambda P^{-1}, \text{ es } A^2 = \Lambda\Lambda = P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}.$$

La b) siempre es cierta: si la matriz "B" es semejante a la matriz diagonal " $\Lambda$ ", la matriz  $B^{-1}$  (si existe) es semejante a la matriz diagonal  $\Lambda^{-1}$ . En efecto: si existe "P" tal que  $B = P\Lambda P^{-1}$ , es  $B^{-1} = (P\Lambda P^{-1})^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$ .

09) La correcta es b).

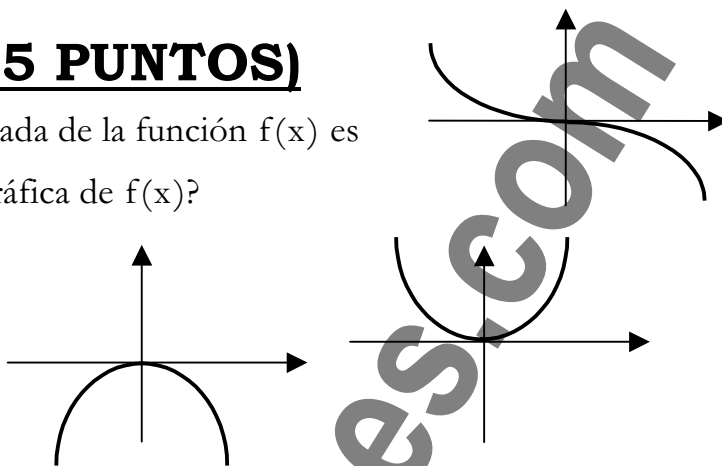
10) La correcta es c).

11) La curva que es creciente y tiene pendiente creciente (o sea, es cóncava hacia arriba) es la c).

## **TEORÍA (0'5 PUNTOS)**

La gráfica de la derivada de la función  $f(x)$  es

¿Cuál podría ser la gráfica de  $f(x)$ ?



### **Solución**

Como la derivada de "f" es positiva si  $x < 0$  y negativa si  $x > 0$ , la función "f" es creciente si  $x < 0$  y decreciente si  $x > 0$ , que es lo que le sucede a la 1ª opción dada.

## **TEORÍA (0'5 PUNTOS CADA UNA)**

1) Sea "A" una matriz regular y "B" la matriz cuya primera fila es la suma de todas las filas de "A", y las restantes filas son las mismas que las de "A".

Indique la relación entre  $|A|$  y  $|B|$ .

Indique la relación entre la 1ª fila de  $\text{Adj.}(A)$  y la 1ª fila de  $\text{Adj.}(B)$ .

Indique la relación entre la 1ª columna de  $A^{-1}$  y la 1ª columna de  $B^{-1}$ .

2) Sea "A" una matriz cuadrada de orden "n" que tiene todos sus valores propios distintos. ¿Es diagonalizable la matriz  $A - I$ ?

3) Sea la matriz particionada  $A^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , donde "A" es una matriz simétrica. Si

"A" es definida positiva, ¿lo es también  $A^*$ ?

### **Solución**

1) Es  $|A| = |B|$ .

Como "A" y "B" sólo se diferencian en la 1ª fila, la 1ª fila de  $\text{Adj.}(A)$  coincide con la 1ª fila de  $\text{Adj.}(B)$ , pues en la formación de la 1ª fila de  $\text{Adj.}(A)$  no intervienen

los elementos de la 1ª fila de "A" y en la formación de la 1ª fila de Adj.(B) no intervienen los elementos de la 1ª fila de "B". Así, siendo

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj.}(A)^t ; B^{-1} = \frac{1}{|B|} \bullet \text{Adj.}(B)^t$$

la 1ª columna de  $A^{-1}$  coincide con la 1ª columna de  $B^{-1}$ .

- 2) La matriz  $A - I$  es diagonalizable, pues si  $\lambda$  es autovalor de "A" entonces  $\lambda - 1$  es autovalor de  $A - I$ . Así, si los valores propios de "A" son todos distintos, también son todos distintos los autovalores de  $A - I$ .
- 3) Si la matriz "A" es definida positiva ( $\Leftrightarrow$  todos los autovalores de "A" son positivos), la matriz  $A^*$  también lo es, pues los autovalores de  $A^*$  son los de "A" y  $\lambda = 1$  (múltiple del orden "k" si "I" es la matriz unidad de orden "k").

Por ejemplo, si  $A^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ , es:

$$|A^* - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por la 5ª fila

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 5 \\ 3 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por la 4ª fila

$$= (1-\lambda)^2 \cdot |A - \lambda \bullet I|$$

## **EJERCICIO (1'5 PUNTOS)**

Discuta el siguiente sistema según los valores de "a". Resuélvalo para  $a = 1$ .

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + y + z &= 6 \\ a \cdot x - 2 \cdot y + a \cdot z &= 7 \\ x - a \cdot y + 2 \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

### **Solución**

$$A / B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ a & -2 & a & 7 \\ 1 & -a & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Es  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix} = a^2 - a - 6$ , que se anula si  $a = 3, -2$ .

Si  $a \neq \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(B) = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{solución única}$ .

Si  $a = 3 \Rightarrow A / B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right]$ , con  $\text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A) \Rightarrow \text{incompatible}$ .

Si  $a = -2 \Rightarrow A / B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right]$ , con  $\text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A) \Rightarrow \text{incompatible}$ .

Si  $a = 1$  hay solución única que se obtiene mediante Cramer.

## **EJERCICIO (1'75 PUNTOS)**

Dada una forma cuadrática  $Q(x) = x^t A x$ , se sabe que los autovalores de "A" son  $\lambda_1 = -1$  (doble) y  $\lambda_2 = 2$  y los subespacios propios son

$$L(\lambda_1) = \langle (1; -1; 0), (2; 0; 1) \rangle ; L(\lambda_2) = \langle (1; 1; -2) \rangle$$

- 1) Halle la expresión canónica de "Q". Clasificarla.
- 2) Obtener la matriz de paso ortogonal que permite obtener la expresión canónica de dicha forma cuadrática.
- 3) Halle la matriz "A"

### **Solución**

- 1) Si los autovalores son  $\lambda_1 = -1$  (doble) y  $\lambda_2 = 2$ , la expresión canónica de "Q" es

$$Q(y_1; y_2; y_3) = -y_1^2 - y_2^2 + 2 \cdot y_3^2$$

Es indefinida, pues "A" tiene autovalores de signo distinto.

- 2) Los vectores  $\bar{h}_1 = (1; -1; 0)$  y  $\bar{h}_2 = (2; 0; 1)$  son una base de  $L(\lambda_1)$ , pero esta base no es ortogonal (pues los vectores que la forman no son ortogonales); así, para calcular una base ortonormal de  $L(\lambda_1)$  debemos calcular previamente una base  $\{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$  que sea ortogonal, y recurrimos a Graam-Schmidt:

$$\bar{d}_1 = \bar{h}_1 = (1; -1; 0)$$

$$\bar{d}_2 = \bar{h}_2 + \alpha \cdot \bar{d}_1 = (2; 0; 1) - (1; -1; 0) = (1; 1; 1)$$

Para calcular " $\alpha$ " exigimos que  $\bar{d}_1$  y  $\bar{d}_2$  sean ortogonales:

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2 = 0 &\Rightarrow \bar{d}_1 \cdot (\bar{h}_2 + \alpha \cdot \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \cdot \bar{h}_2 + \alpha \cdot (\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1; -1; 0) \cdot (2; 0; 1) + \alpha \cdot (1; -1; 0) \cdot (1; -1; 0) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 + 2 \cdot \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \end{aligned}$$

Los vectores  $\bar{w}_1 = \bar{d}_1 / \|\bar{d}_1\|$  y  $\bar{w}_2 = \bar{d}_2 / \|\bar{d}_2\|$  forman una base ortonormal del subespacio  $L(\lambda_1)$ :

$$\begin{aligned}\bar{w}_1 &= \bar{d}_1 / \|\bar{d}_1\| = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0) \\ \bar{w}_2 &= \bar{d}_2 / \|\bar{d}_2\| = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})\end{aligned}$$

El vector  $\bar{d}_3 = (1; 1; -2)$  es una base de  $L(\lambda_2)$ , y el vector  $\bar{w}_3 = \bar{d}_3 / \|\bar{d}_3\|$  es una base ortonormal del subespacio  $L(\lambda_2)$ :

$$\bar{w}_3 = \bar{d}_3 / \|\bar{d}_3\| = (1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}; -2/\sqrt{6})$$

La matriz de paso ortogonal "C" que permite obtener la expresión canónica de dicha forma cuadrática es

$$C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 \end{matrix}$

3) Siendo

$$C^t \cdot A \cdot C = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_D$$

despejando "A" y teniendo en cuenta que "C" es ortogonal (o sea,  $C^t = C^{-1}$ ), resulta:

$$A = C \cdot D \cdot C^t = \text{lo que salga}$$

## **TEORÍA (1'25 PUNTOS)**

Demuestre una de las dos propiedades siguientes.

- Enuncie y demuestre el teorema fundamental de la diagonalización de matrices.
- Enuncie y demuestre el teorema de Rouché Frobenius.