EXAMEN FEBRERO 2005 ADE

01) Dado el enunciado: **"si descienden los tipos de interés entonces aumenta la inversión",** se verifica que:

a) El descenso de tipos de interés es necesario para que aumente la inversión
b) Si hay un cambio en la inversión entonces varían los tipos de interés
c) Es suficiente que desciendan los tipos de interés para que aumente la inversión

02) Sean "A" y "B" matrices regulares de igual orden:

a) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$; b) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$; c) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

03) Sea "A" una matriz regular:

a) Siempre se cumple que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$
b) Sólo se cumple que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ si "A" es ortogonal
c) Sólo se cumple que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ si "A" es simétrica

04) Siendo "x" e "y" las incógnitas, si el sistema $\begin{Bmatrix} a.x + c.y = \alpha \\ b.x + d.y = \beta \end{Bmatrix}$ es compatible e indeterminado, los vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ son:

a) Proporcionales ; b) Un sistema genmerador de $\Re^2$
c) Un sistema libre de $\Re^2$

05) El sistema $\begin{Bmatrix} m.x + y + z = 1 \\ x + m.y + z = 1 \\ x + y + m.z = 1 \end{Bmatrix}$ no es compatible y determinado si:

a) $m = 1$; b) $m = 0$; c) $m = 2$

06) Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ son linealmente independientes si:

a) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0, \ \forall \ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Re$
b) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$
c) $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

07) El vector $(-2;1;x)$ es CL de $(1;2;0)$ y $(2;3;1)$ si:

a) $x = 0$; b) $x = -5$; c) $x = 1$

08) Sean "A" y "B" matrices cuadradas de orden "n" diagonalizables. En general, no se cumple que:

a) A^2 es diagonalizable ; b) B^{-1} es diagonalizable ; c) AB es diagonalizable

09) Sea "Q" una forma cuadrática semidefinida positiva. Al restringirla a un subespacio vectorial:

a) Es semidefinida positiva ; b) Es definida positiva
c) No puede ser indefinida

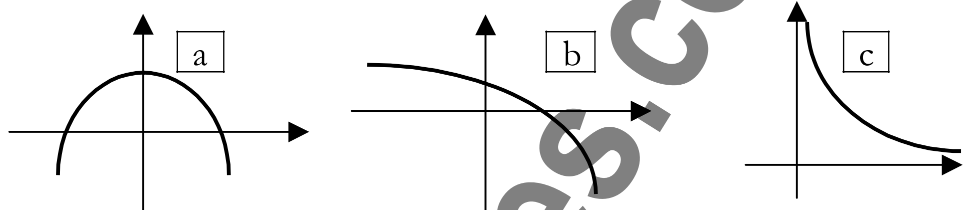
10) Si la matriz "A" es definida negativa y "m" es natural, la matriz $(A^{-1})^{2.(m+1)}$ es:

a) Definida positiva ; b) Definida negativa
c) Semidefinida negativa

11) Sea $A_{2\times2}$ con polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$

a) "A" es simétrica ; b) "A" no es simétrica
c) No puede saberse si "A" es simétrica o no

12) Dada una función, se sabe que, en todo su dominio, es decreciente y el valor absoluto de su pendiente es decreciente. ¿Cuál podría ser su gráfica?



Solución

01) La correcta es c).

02) La correcta es a): famosa propiedad.

03) La correcta es a): $(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$

04) Si es CD $\Rightarrow \text{rg}\left[\begin{array}{cc|c} a & c & \alpha \\ b & d & \beta \end{array}\right] = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ son proporcionales.

05) Si $m = 1 \Rightarrow$ las tres ecuaciones son la misma $\Rightarrow$ el sistema no es compatible y determinado.

06) La correcta es b): famosa definición.

07) La correcta es b): el valor de "x" tal que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

08) La a) siempre es cierta: si la matriz "A" es semejante a la matriz diagonal "Λ", la matriz A^2 es semejante a la matriz diagonal Λ^2. En efecto: si existe "P" tal que $A = P\Lambda P^{-1}$, es $A^2 = AA = P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$.

La b) siempre es cierta: si la matriz "B" es semejante a la matriz diagonal "Λ", la matriz B^{-1} (si existe) es semejante a la matriz diagonal Λ^{-1}. En efecto: si existe "P" tal que $B = P\Lambda P^{-1}$, es $B^{-1} = (P\Lambda P^{-1})^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$.

09) La correcta es c): si en tu pueblo no hay tontos, en tu calle no puede haber listos y tontos.

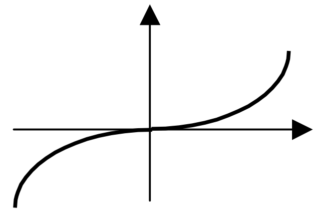
10) La correcta es a): si "A" es definida negativa $\Rightarrow$ sus autovalores son negativos $\Rightarrow$ los autovalores de A^{-1} son negativos (pues son los inversos de los autovalores de "A") .... y como $2.(m+1)$ es par, los autovalores de $(A^{-1})^{2.(m+1)}$ son positivos.

11) La correcta es b), pues $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ carece de raíces reales.

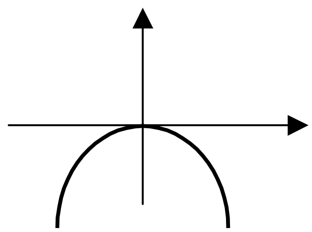
12) La correcta es c).

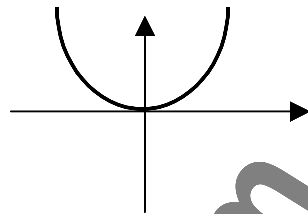
TEORÍA (0'5 PUNTOS)

La gráfica de la derivada de la función $f(x)$ es



¿Cuál podría ser la gráfica de $f(x)$?





Solución

Como la derivada de "f" es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$, la función "f" es decreciente si $x < 0$ y creciente si $x > 0$, que es lo que le sucede a la 2ª opción dada.

TEORÍA (1'25 PUNTOS)

Demuestre una de las dos propiedades siguientes.

- Si unos vectores son ortogonales dos a dos, son LI.
- Los valores propios de una matriz cuadrada "A" son las raíces de su polinomio característico.

TEORÍA (0'5 PUNTOS CADA UNA)

1) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 7 tal que $\lambda = -1$ es autovalor triple. Si $\text{rg}(A + I) = 5$, ¿Es diagonalizable la matriz "A"?

2) Si el conjunto de vectores $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es libre, estudie si es libre el conjunto $\{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4\}$.

3) Sea $f(x) = (ax)^t A(ax)$ definido para cada $x \in \Re^n$, $a \neq 0$ y "A" una matriz simétrica. ¿Es esta aplicación una forma cuadrática?. En caso afirmativo, diga la matriz que tiene asociada y la relación entre su signo y el de "A".

Solución

1) Es $MA(\lambda = -1) = 3$ y $MG(\lambda = -1) = 7 - \text{rg}(A + I) = 7 - 5 = 2 \neq MA(\lambda = -1)$; por tanto, la matriz "A" no es diagonalizable.

2) Como $x_1, ... ,x_4$ son LI, la ecuación vectorial $\alpha_1 \bullet x_1 + ... + \alpha_4 \bullet x_4 = \bar{0}$ sólo tiene la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_4 = 0$.

Los vectores $x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + x_2 + ... + x_4$ son LI si la ecuación vectorial $\alpha_1 \bullet x_1 + \alpha_2 \bullet (x_1 + x_2) + ... + \alpha_n \bullet (x_1 + x_2 + ... + x_4) = \bar{0}$ sólo tiene la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_4 = 0$. Veamos:

$$\alpha_1 \bullet x_1 + \alpha_2 \bullet (x_1 + x_2) + ... + \alpha_4 \bullet (x_1 + x_2 + ... + x_4) = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_4) \bullet x_1 + (\alpha_2 + ... + \alpha_4) \bullet x_2 + ... + \alpha_4 \bullet x_4 = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_4 = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{pues los vectores } x_1, ... , x_4 \text{ son LI}}$

$$\Rightarrow x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + x_2 + ... + x_4 \text{ son LI}$$

3) La aplicación $f(x) = (ax)^t A(ax)$ es la FC cuya matriz asociada es la matriz simétrica "a^2A", pues $f(x) = (ax)^t A(ax) = x^t(a^2A)x$.

Como $a^2 > 0$, el signo de $x^t(a^2A)x$ coincide con el de x^tAx.

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Halle $a \in \Re$ de modo que (3;0;3) pueda expresarse de modo único como CL de (2;1;0), (0;1;2) y (1;a;1). Si $a = -2$, determine los coeficientes de dicha CL.

Solución

1) El vector $u = (3;0;3)$ es CL única de $v = (2;1;0)$, $w = (0;1;2)$ y $z = (1;a;1)$ si $\alpha \bullet v + \beta \bullet w + \gamma \bullet z = u$ tiene solución única:

$$\alpha \bullet (2;1;0) + \beta \bullet (0;1;2) + \gamma \bullet (1;a;1) = (3;0;3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$$

$\boxed{\text{para que haya solución única}}$

2) Si $a = -2$, la única solución es $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

EJERCICIO (1'75 PUNTOS)

Sea la forma cuadrática $Q(x;y;z) = x^2 + y^2 - 2.y.z + z^2$

1) Calcular su expresión matricial y canónica. Clasificarla.
2) Calcular los vectores propios y obtener la matriz de paso ortogonal que permite obtener la expresión canónica de dicha forma cuadrática.