EXAMEN JUNIO 2004

01) ¿Qué implicación expresa que P es condición suficiente para Q?:

a) $P \Rightarrow Q$; b) $Q \Rightarrow P$; c) No $P \Rightarrow Q$

02) Sean "A" y "b" matrices regulares:

a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; b) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$; c) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

03) Sea $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, con $A \neq 0$ e "I" la matriz unidad de orden "n":

a) $rg(B) = rg(A)$; b) $rg(B) = rg(A) + n$; c) $rg(B) = n$

04) Dado un sistema homogéneo $Ax = 0$, con $A \in M_{m\times n}$, ¿cuál de las siguientes condiciones garantiza que el sistema sólo tiene la solución trivial?:

a) $m = n$ y $|A| = 0$
b) $m = n$ y $|A| \neq 0$
c) $m < n$ y $rg(A) = m$

05) Sea el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = \alpha \\ 2.y - z = \beta \\ x - y + 2.z = \gamma \end{array} \right\}$.

a) No puede ser compatible determinado
b) No puede ser incompatible
c) No puede ser compatible indeterminado

06) Sean los vectores $(2;0;0)$, $(0;1,1)$ y $(0;a;0)$.

a) Son LI para todo valor real de "a"
b) Son LI para todo valor real no nulo de "a"
c) Son LD para todo valor real de "a"

07) Sea $A_{3\times 3}$ singular con traza 5, siendo $\lambda = 2$ un autovalor de ella.

a) "A" es diagonalizable
b) "A" no es diagonalizable
c) $\lambda = 2$ es un valor propio con multiplicidad 3

08) Sea $A \in M_n(\Re)$ una matriz diagonalizable, que es regular e idempotente:

a) "A" es la matriz nula
b) "A" es la matriz identidad
c) Las anteriores son falsas

09) Sea $A \in M_{3\times 3}(\Re)$ con polinomio característico $-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$:

a) $\lambda = 3$ es autovalor
b) $\lambda = 1$ es autovalor
c) $\lambda = 0$ es autovalor

10) Una aplicación entre $\Re^2$ y $\Re$ que a cada par $(x;y)$ le hace corresponder el número real $x^2 + 2.x.y$ es:

a) Una aplicación lineal ; b) Una forma cuadrática
c) Las anteriores son falsas

11) La forma cuadrática $Q(x) = x^t Ax$, con "A" regular y $Tr(A) = 0$, es:

a) Semidefinida positiva o semidefinida negativa
b) Definida positiva o definida negativa ; c) Indefinida

12) La forma cuadrática $Q(x;y) = 8.x^2 + 4.y^2 + 4.x.y$ es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida positiva ; c) Indefinida

13) Un subconjunto "A" de $\Re^n$ es un entorno del punto $a \in \Re^n$ si:

a) "A" es abierto ; b) $a \in Int.(A)$; c) $a \in Fr.(A)$

14) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ y $(a;b) \in Ac.(D)$. Si $\lim\limits_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y) = L$, entonces:

a) La función "f" es continua en $(a;b)$
b) Existen todos los límites direccionales y toman el mismo valor "L"
c) Existen todos los límites reiterados y toman el mismo valor "L"

15) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $f(0;0) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x;m.x) = 0, \forall m \in \Re$.

a) "f" no es continua en $(0;0)$; b) "f" es continua en $(0;0)$
c) No puede saberse si "f" es continua en $(0;0)$

16) Sea $f: \Re^n \mapsto \Re$ y un punto $a \in \Re^n$:

a) Si "f" es continua en "a", entonces "f" es diferenciable en "a"
b) Si existe $D_v f(a), \forall v \in \Re^n$, entonces "f" es diferenciable en "a"
c) Si existen todas las derivadas parciales de "f" en un entorno de "a" y son continuas en "a", entonces "f" es diferenciable en "a"

17) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ con curvas de nivel decrecientes. ¿Cuál de los siguientes vectores podría corresponder al gradiente de "f" en un punto $a \in D$?

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

18) Sea una función $z(x;y;t)$ tal que $x = x(t)$ e $y = y(t)$, es:

a) $z'(t) = \dfrac{\partial z}{\partial t}$; b) $z'(t) = \dfrac{\partial z}{\partial x}.x' + \dfrac{\partial z}{\partial y}.y'$; c) $z'(t) = \dfrac{\partial z}{\partial x}.x' + \dfrac{\partial z}{\partial y}.y + \dfrac{\partial z}{\partial t}$

19) Si $z = z(x;y)$ es la función definida implícitamente por $z^3 - x.z - 2.y = 0$ en un entorno del punto $(1;0;1)$, su polinomio de Taylor de orden 1 uno en $(1;0)$ es:

a) $1 + \dfrac{1}{2}.(x-1) + \dfrac{1}{2}.y$; b) $1 + \dfrac{1}{2}.x + y$; c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.x + y$

20) Sea $f:\Re \mapsto \Re$ una función de clase C^{∞} y "a" un punto de su dominio. Sea $p(x)$ su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto "a":

a) Los valores de f(a) y p(a) pueden ser distintos
b) Las pendientes de "f" y "p" en el punto "a" pueden ser distintas
c) $f(a)=p(a),\ f'(a)=p'(a),\ f''(a)=p''(a)$

21) Si $f:D\subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ es homogénea de clase C^1, en todo punto de "D" cumple:

$$\text{a) } \varepsilon_x f(x;y)+\varepsilon_y f(x;y)=\text{cte} \ ; \ \text{b) } x.\varepsilon_x f(x;y)+y.\varepsilon_y f(x;y)=\text{cte}$$
$$\text{c) } f_x(x;y)+f_y(x;y)=\text{cte}$$

22) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ es: a) Convergente ; b) Divergente ; c) Oscilante

23) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\{S_n\}$ su sucesión de sumas parciales. Para que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es necesario que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=0$; c) La serie sea de términos positivos

24) El valor de $\int_0^1 x.(1-x)^{-1/2}.dx$ es: a) $\frac{4}{3}$; b) π ; c) $\sqrt{\pi}$

25) Si $D=[1;2]\times[3;4]$, el valor de $\iint_D x.y.dx.dy$ es: a) $\frac{21}{4}$; b) $\frac{27}{4}$; c) π

26) Curvas de nivel de un casquete de esfera

Solución

01) La correcta es la a).

02) La correcta es la a), famosa propiedad.

04) La correcta es b): como el rango de una matriz expresa el número máximo de filas LI que tiene, si $rg(A)=r$, en el bloque $\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}$ hay "r" filas LI, y en el bloque $\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ hay "n" filas LI. Además, cualquier fila de uno de estos dos bloques no es CL de las filas del otro bloque; por tanto:

$$rg(B)=rg(A)+rg(I)=rg(A)+n.$$

04) La correcta es b): el número de ecuaciones debe coincidir con el de incógnitas y la matriz de coeficientes debe ser regular.

05) La correcta es a): hay 3 incógnitas y la matriz de coeficientes tiene rango 2.

06) La correcta es b): el valor de "a" tal que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2.a\neq 0.$

07) La correcta es a): si $|A|=0 \Rightarrow \lambda=0$ es autovalor. Como $\lambda=2$ también es autovalor y la suma de los autovalores coincide con la traza 5 el tercer autovalor es $\lambda=3$. Siendo distintos los autovalores, la matriz es diagonalizable.

08) La correcta es b): si $A^2 = A$ y $|A| \neq 0$, postmultiplicando por A^{-1} es $A = I$.

09) La correcta es la b).

10) La correcta es la b).

11) La correcta es c): "A" regular $\Rightarrow \lambda = 0$ no es autovalor $\Rightarrow$ no es semidefinida. No es definida, pues si lo fuera, no sería $Tr(A) =$ suma de autovalores $= 0$.

12) La correcta es a).

13) La correcta es b).

14) La correcta es b), famosa propiedad.

15) La correcta es a), pues $f(0;0) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x;m.x) = 0$.

16) La correcta es c): condición suficiente de diferenciabilidad.

17) La correcta es c).

18) La correcta es c).

19) La correcta es c).

20) La correcta es c).

21) La correcta es a):

$$\varepsilon_x f(x;y) + \varepsilon_y f(x;y) = \frac{x}{f(x;y)}.f_x(x;y) + \frac{y}{f(x;y)}.f_y(x;y) =$$

$$= \frac{x.f_x(x;y) + y.f_y(x;y)}{f(x;y)} = k$$

$$\boxed{\text{"f" homogénea de grado "k"} \Rightarrow x.f_x(x;y) + y.f_y(x;y) = k.f(x;y)}$$

22) La correcta es a): serie geométrica tal que $|\text{razón}| < 1$.

23) La correcta es b): condición necesaria de convergencia de series numéricas.

24) La correcta es a).

25) La correcta es a).

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Elija una de las siguientes opciones.

- Demuestre que los autovectores de una matriz cuadrada asociados a autovalores distintos son LI.
- Demuestre el teorema de Euler.

TEORÍA (0'75 PUNTOS)

Calcule el rango de una matriz "A" simétrica de orden 3, singular e indefinida.

Solución

Si "A" es singular $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ es autovalor.

Si "A" es indefinida, los otros dos autovalores λ_2 y λ_3 son de signo distinto.

Si "A" es simétrica, es diagonalizable; o sea, es semejante a $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$,

que tiene rango 2 (pues $\lambda_1 = 0$), lo mismo que "A".

TEORÍA (0'5 PUNTOS)

Si $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, represente las curvas de nivel de la función $Y(K;L) = A.K^{\alpha}.L^{\beta}$.

Solución

Si $Y(K;L) = A.\sqrt{K.L}$, su dominio "D" es $D = \{(K;L) / K \geq 0,\ L \geq 0\}$.

La curva S_c de nivel "c" es:

$$S_c = \{(K;L) / Y(K;L) = c\} = \{(K;L) / A.\sqrt{K.L} = c\} =$$
$$= \{(K;L) / K.L = (c/A)^2\} \equiv \text{familia de hipérbolas equiláteras}$$

TEORÍA (0'75 PUNTOS)

Sea "f" una función de clase C^∞ en $\Re^n$. Considere su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $a \in \Re^n$ y demuestre que si $\nabla f(a) = 0$ y $Hf(a)$ es definida positiva, el citado polinomio de Taylor toma en "a" un valor menor que el que toma en cualquier otro punto "x". ¿Qué sucedería si $Hf(a)$ es semidefinida positiva?

Solución

Es $p(x) = f(a) + \nabla^t f(a)^t \bullet (x - a) + \frac{1}{2}.(x-a)^t \bullet Hf(a).(x-a)$, y $f(a) = p(a) = 0$.

Si $\nabla f(a) = 0$, es $p(x) = f(a) + \frac{1}{2}.(x-a)^t \bullet Hf(a).(x-a) > f(a) = p(a)$

$$\boxed{Hf(a) \text{ definida positiva} \Rightarrow (x-a)^t \bullet Hf(a).(x-a) > 0 \text{ si } x \neq a}$$

Es $p(x) = f(a) + \frac{1}{2}.(x-a)^t \bullet Hf(a).(x-a) \geq f(a) = p(a)$

$$\boxed{Hf(a) \text{ semidefinida positiva} \Rightarrow (x-a)^t \bullet Hf(a).(x-a) \geq 0,\ \forall\, x}$$

EJERCICIO (0'5 PUNTOS)

Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-z^2}.dz$

Solución

$$\int_0^{+\infty} e^{-z^2}.dz = \frac{1}{2}.\int_0^{+\infty} e^{-u}.u^{-1/2}.du = \frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z = \sqrt{u} \Rightarrow dz = \frac{1}{2}.u^{-1/2}.du \\ \text{Los límites de integración no cambian} \end{array}}$$

EJERCICIO (1 PUNTO)

Sea $f(x;y)=\begin{cases}(x^2-y^2).\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{si } (x;y)=(0;0)\end{cases}$

Analice su continuidad en $(0;0)$ y calcule sus derivadas parciales en todo punto.

Solución

La función es continua en $(0;0)$ si su límite en $(0;0)$ coincide con $f(0;0)=0$, como en efecto sucede:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} (x^2-y^2).\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

$$\boxed{\text{pues el factor } x^2-y^2 \text{ tiende a 0 y el factor sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}\text{ está acotado}}$$

Es:

$$f_x(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2-0^2).\text{sen}\,\frac{1}{h^2+0^2}-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0} h.\text{sen}\,\frac{1}{h^2}=0$$

$$f_y(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{(0^2-k^2).\text{sen}\,\frac{1}{0^2+k^2}-0}{k}=$$

$$=-\lim_{k\to 0} k.\text{sen}\,\frac{1}{k^2}=0$$

Si $(x;y)\neq(0;0)$, es:

$$f_x(x;y)=(2.x).\left(\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\left(x^2-y^2\right).\left((-1).\frac{2.x}{(x^2+y^2)^2}.\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$f_y(x;y)=(-2.y).\left(\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\left(x^2-y^2\right).\left((-1).\frac{2.y}{(x^2+y^2)^2}.\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$

1) Encuentre una matriz diagonal semejante a ella.
2) Encuentre una matriz de paso ortogonal.
3) Clasifique la forma cuadrática asociada a "A" restringida al subespacio $x=0$.

Solución

1) Autovalores: $|A-\lambda \bullet I| = -\lambda^3+\lambda^2+9.\lambda-9=0 \Rightarrow \lambda=1,3,-3$

- La matriz $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$ es semejante a "A".

2) Autovectores de $\lambda=1$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}}_{A-1\bullet I}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=-x_3\\ x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=1)=\{(-x_3;0;x_3),\ \forall x_3\in\Re\}=\{x_3\bullet(-1;0;1),\ \forall x_3\in\Re\}$$

El vector $\bar{v}_1=(-1;0;1)$ es base de $L(\lambda=1)$.

El vector $\bar{w}_1=\dfrac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}=(-1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2})$ es base ortonormal de $L(\lambda=1)$.

- Autovectores de $\lambda=3$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -4 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}}_{A-3\bullet I}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=x_3\\ x_2=x_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=3)=\{(x_3;x_3;x_3),\ \forall x_3\in\Re\}=\{x_3\bullet(1;1;1),\ \forall x_3\in\Re\}$$

El vector $\bar{v}_2=(1;1;1)$ es base de $L(\lambda=3)$.

El vector $\bar{w}_2=\dfrac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|}=(1/\sqrt{3};1/\sqrt{3};1/\sqrt{3})$ es base ortonormal de $L(\lambda=3)$.

- Autovectores de $\lambda=-3$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}}_{A+3\bullet I}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_2=-2.x_1\\ x_3=x_1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-3)=\{(x_1;-2.x_1;x_1),\ \forall x_1\in\Re\}=\{x_1\bullet(1;-2;1),\ \forall x_3\in\Re\}$$

El vector $\bar{v}_3=(1;-2;1)$ es base de $L(\lambda=-3)$.

El vector $\bar{w}_3=\dfrac{\bar{v}_3}{\|\bar{v}_3\|}=(1/\sqrt{6};-2/\sqrt{6};1/\sqrt{6})$ es base ortonormal de $L(\lambda=-3)$.

- La matriz de paso ortogonal es

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 \end{array}$$

3) Siendo

$$Q(x;y;z) = x^2 - y^2 + z^2 + 4.x.y + 4.y.z$$

es:

$$Q(0;y;z) = -y^2 + z^2 + 4.y.z$$

que es indefinida.