MATEMÁTICAS PARA LA EMPRESA
LICENCIATURA EN ADE+DERECHO
EXAMEN 24/01/04

TEORÍA

Demuestre que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales.

TEORÍA

Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando su respuesta.

1) Si el conjunto de vectores $\{u, v, w\}$ es una base ortogonal, también es una base ortogonal el conjunto $\{u+v, u-v, w\}$.
2) Si "A" y "B" son matrices semejantes, A^2 y B^2 también son semejantes.
3) Si $\lambda \neq 0$ es autovalor de la matriz regular "A", entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.
4) Si la forma cuadrática $Q(x) = x^t Ax$ es semidefinida positiva, la aplicación lineal de matriz asociada "A" es un isomorfismo.

Solución

1) Si $\{u, v, w\}$ es una base ortogonal, el conjunto $S = \{u+v, u-v, w\}$ es base, pues los vectores que forman "S" son LI, pero sólo es ortogonal si $u \bullet u = v \bullet v$:

$$(u+v) \bullet w = u \bullet w + v \bullet w = 0 + 0 = 0$$

$$(u-v) \bullet w = u \bullet w - v \bullet w = 0 - 0 = 0$$

$$(u+v) \bullet (u-v) = u \bullet u - u \bullet v + v \bullet u - v \bullet v = u \bullet u - v \bullet v \underset{\boxed{\text{sólo si } u \bullet u = v \bullet v}}{=} 0$$

2) Verdadero, famosa propiedad.

3) Verdadero, famosa propiedad.

4) Si "Q" es semidefinida $\Rightarrow$ "A" no es regular $(|A| = 0) \Rightarrow$ la aplicación lineal de matriz asociada "A" no es un isomorfismo.

EJERCICIO

Diga si las siguientes aplicaciones son lineales, justificando la respuesta.

$$1)\ f(x;y)=(1+x;y)\ ;\ 2)\ f(x;y)=(x^2;y)\ ;\ f(x;y)=(y;x)$$

Solución

1) No es lineal, pues $f(\alpha.x;\alpha.y)=(1+\alpha.x;\alpha.y)\neq\alpha\bullet f(x;y)$.

2) No es lineal, pues $f(\alpha.x;\alpha.y)=(\alpha^2.x^2;\alpha.y)\neq\alpha\bullet f(x;y)$.

3) Es lineal, pues:

$$f(\alpha.x;\alpha.y)=(\alpha.y;\alpha.x)=\alpha\bullet(y;x)=\alpha\bullet f(x;y)$$

$$f((x;y)+(u;v))=f(x+u;y+v)=(y+v;x+u)=.$$

$$=(y;x)+(v;u)=f(x;y)+f(u;v)$$

EJERCICIO

Sea el endomorfismo $f:\Re^3\mapsto\Re^3$ tal que $f(x;y;z)=(y-z;x+z;y-x)$.

1) Calcular el núcleo y la imagen de "f" ¿Es "f" un isomorfismo?
2) Determine la matriz asociada a "f" respecto de las bases canónicas.
3) Obténganse las expresiones polinómica y canónica de la forma cuadrática asociada al endomorfismo.
4) Determínese la matriz de paso ortogonal que permite obtener la expresión canónica.
5) Estúdiese el signo de la forma cuadrática restringida al subespacio asociado al autovalor $\lambda=-2$.

Solución