EXAMEN FEBRERO 2004

01) Dada la implicación $P \Rightarrow Q$, señale la afirmación correcta:

a) "Q" es condición suficiente para "P"
b) "P" es condición necesaria para "Q"
c) "P" es condición suficiente para "Q"

02) Al despejar "X" en $C(AXB + XB)^t - A = I$, donde A, I + A, B son regulares, C es ortogonal y A simétrica, es:

a) $X = B^{-1}C$; b) $X = (I + A)^{-1}C(I + A)B^{-1}$; c) $X = CB^{-1}$

03) Sea la matriz particionada $D = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & A \end{bmatrix}$, donde B es una matriz cuadrada de orden 2 y A cuadrada de orden "n". Señale la falsa:

a) $|D| = |B|.|A|$; b) $Tr(D) = Tr(B) + Tr(A)$
c) Sólo una de las anteriores opciones es verdadera

04) Sea A una matriz regular de orden "n", y sea la matriz B tal que su primera fila es la suma de todas las filas de A, y las restantes son iguales a las correspondientes de A. Señale la falsa:

a) La primera columna de B^{-1} es igual a la primera fila de A^{-1}
b) La primera columna de B^{-1} es igual a la primera columna de A^{-1}
c) Las anteriores son falsas

05) Si $\begin{Bmatrix} a.x + c.y + e.z = \alpha \\ b.x + d.y + f.z = \beta \end{Bmatrix}$ es incompatible, los vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ son:

a) Proporcionales ; b) Un sistema genmerador de $\Re^2$
c) Un sistema libre de $\Re^2$

06) Sean S y S' subconjuntos del espacio vectorial E tales que $S \subseteq S'$:

a) Si S es libre, entonces S' es libre
b) Si S' es libre, entonces S es libre
c) Las anteriores son falsas

07) Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base del espacio vectorial E. Indique cuál de los siguientes conjuntos es base de E:

a) $\{v_1, v_2\}$
b) $\{v_1, \alpha v_2 + 2v_3, v_3\}$
c) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_3\}$

08) Sean $f:E \mapsto F$ y $g:F \mapsto G$ aplicaciones lineales con matrices asociadas "A" y "B" respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la matriz asociada a $g \bullet f$?

$$a) \begin{bmatrix} -5 & 13 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \\ 11 & -2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; b) \begin{bmatrix} -5 & -3 & 11 \\ 13 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; c) \begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 10 & 1 & 13 \\ -5 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

09) Sean $A_{n\times n}$ una matriz con valores propios reales no diagonalizable:

a) "A" no es semejante a una forma canónica de Jordan
b) "A" es semejante a una matriz diagonal
c) "A" no es simétrica

10) Sea $A_{3\times 3}$ singular con traza 3, siendo $\lambda = 1$ un autovalor de ella.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "A" es diagonalizable o no

11) Sea "Q" una forma cuadrática definida positiva. Es falso que:

a) $Q(x) > 0, \forall \; x \neq 0$; b) $Q(0) > 0$; c) $Q(0) = 0$

12) Sea "Q" una FC con matriz asociada $A_{4\times 4}$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 los autovalores de "A".

a) Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 son distintos entre sí $\Rightarrow$ "Q" es indefinida
b) Si $\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3.\lambda_4 < 0 \Rightarrow$ "Q" es indefinida
c) Si $\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3.\lambda_4 > 0 \Rightarrow$ "Q" es definida positiva

<u>Solución</u>

01) La correcta es c).

02) La correcta es c).

$$C(AXB+XB)^t - A = I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C(AXB+XB)^t = A + I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AXB+XB)^t = C^{-1}(A+I) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left((A+I)XB\right)^t = C^{-1}(A+I) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (XB)^t(A+I)^t = C^{-1}(A+I) \Rightarrow$$
$$\boxed{\text{como } A+I \text{ es simétrica} \Rightarrow (A+I)^t = A+I}$$
$$\Rightarrow (XB)^t = C^{-1} \Rightarrow$$
$$\boxed{\text{pues C es ortogonal}}$$
$$\Rightarrow (XB)^t = C^t \Rightarrow XB = C \Rightarrow X = CB^{-1}$$

03) Como a) y b) son verdaderas, la falsa es c).

04) La falsa es b).

05) Si es incompatible $\Rightarrow$ la matriz $A = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$ de los coeficientes tiene rango 1 y la ampliada tiene rango 2. Si $rg(A) = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ son proporcionales.

06) La correcta es b).

07) La correcta es c).

08) La correcta es c): la matriz asociada a $g \bullet f$ es BA.

09) La correcta es c): si fuera simétrica sería diagonalizable.

10) La correcta es a): si $|A| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ es autovalor. Como $\lambda = 1$ también es autovalor y la suma de los autovalores coincide con la traza 3, el tercer autovalor es $\lambda = 2$. Siendo distintos los autovalores, la matriz es diagonalizable.

11) La falsa es b).

12) La correcta es b): si el producto de los cuatro autovalores es negativo $\Rightarrow$ hay autovalores con signo distinto $\Rightarrow$ indefinida.

TEORÍA (0'5 PUNTOS CADA UNA)

Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

1) Todo vector de un espacio vectorial "E" puede expresarse de manera única como combinación lineal de los vectores de una base de "E" ..... o sea: las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.
2) Si "A" es una matriz regular, entonces $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.
3) Si "A" es una matriz regular, entonces $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Tr}(A)}$.
4) Si "A" es una matriz cuadrada con x^1 y x^2 dos autovectores LI, entonces "A" tiene al menos dos autovalores distintos.

Solución

3) Falso. Vale el contraejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, pues $\mathrm{Tr}(A) = 4$ y $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = 4/3$.

4) Falso. Vale el contraejemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

TEORÍA (1'25 PUNTOS)

Demuestre que si "A" es una matriz simétrica, autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

EJERCICIO (1 PUNTO)

Sea el sistema

$$\begin{array}{l} x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4 + ... + n.x_n = 0 \\ -x_1 \qquad\quad + 3.x_3 + 4.x_4 + ... + n.x_n = 0 \\ -x_1 - 2.x_2 \qquad\quad + 4.x_4 + ... + n.x_n = 0 \\ -x_1 - 2.x_2 - 3.x_3 + \qquad\quad .... + n.x_n = 0 \\ :: \\ -x_1 - 2.x_2 - 3.x_3 - .... - (n-1).x_{n-1} = 0 \end{array}$$

1) Determine su matriz de coeficientes y calcule su determinante.
2) Discuta el sistema. Si tiene solución, calcúlela.

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & .... & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & .... & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & .... & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & .... & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & .... & n \\ : & : & : & : & : & :::: & : \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & .... & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & .... & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & .... & 2.n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & .... & 2.n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & .... & 2.n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & .... & 2.n \\ : & : & : & : & : & :::: & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .... & n \end{vmatrix} = n!$$

$\boxed{\text{Sumamos la 1ª fila a cada una de las restantes filas}}$

Como $|A| = n! \neq 0$, es $rg(A) = n$; así, el SLH dado sólo tiene la solución trivial.

EJERCICIO (1'5 PUNTOS)

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1) Calcule sus valores propios.
2) Determine los subespacios propios asociados a cada valor propio.
3) Encuentre una base de vectores propios ortogonales entre sí, y una matriz ortogonal "C" tal que $C^t AC$ sea diagonal.
4) Clasifique la forma cuadrática $Q(x) = x^t Ax$.

EJERCICIO (0'75 PUNTOS)

Sea la forma cuadrática $5.x_1^2 + 2.x_2^2 + a.x_3^2 - 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 - 2.x_2.x_3$.

1) Obtenga su expresión matricial.
2) Determine su signo según los valores de "a".
3) Si $a = 0$, determine su signo restringida al subespacio $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.