EXAMEN JUNIO 2003

01) Siendo "E" un espacio vectorial euclídeo sobre el cuerpo "K", no siempre es cierto que

a) $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v,\ \forall\ \alpha \in K,\ \forall\ u, v \in E$
b) $\alpha(\frac{\beta}{\alpha} u) = \beta u,\ \forall\ \alpha, \beta \in K - \{0\},\ \forall\ u \in E$
c) $\alpha(u \bullet v) = (\alpha u)(\alpha v),\ \forall\ \alpha \in K,\ \forall\ u, v \in E$

02) Sea "E" un espacio vectorial sobre el cuerpo "K" y E_1 y E_2 subespacios de "E". Si $E_1 + E_2 = \{u_1 + u_2 \ / \ u_1 \in E_1,\ u_2 \in E_2\}$, es falso que

a) $E_1 + E_2$ es subespacio de "E"
b) $E_1 \cap E_2$ es subespacio de "E"
c) No se cumple ni a) ni b)

03) En $\Re^3$ se consideran los vectores $u = (2;1;-2)$ y $v = (1;-1;1)$. ¿Para qué valor de "x" el vector $w = (x;4;7)$ es combinación lineal de "u" y "v"?

a) 0 ; b) 5 ; c) 1

04) Sean "A" y "B" matrices cuadradas equidimensionales y antisimétricas; así:

a) $A + B$ es antisimétrica ; b) $A \bullet B$ es antisimétrica
c) En general, a) y b) no son siempre ciertas

05) Sean "A" y "B" matrices cuadradas equidimensionales; es falso que:

a) "A" es regular si y sólo si A^m es regular para todo valor natural de "m"
b) "A" y "B" son regulares si y sólo si $A \bullet B$ es regular
c) Si "A" es regular entonces $A \bullet B$ es regular

06) Sea x^* una solución del sistema $Ax = b$ y x^h una solución del sistema lineal homogéneo $Ax = 0$; así:

a) $x^* + x^h$ es solución de $Ax = b$; b) $x^* + x^h$ es solución de $Ax = 0$
c) No siempre se cumplen ni a) ni b)

07) Sea el sistema lineal homogéneo $Ax = 0$, cuya matriz de coeficientes "A" es cuadrada; así:

a) Es compatible determinado si y sólo si "A" es regular
b) Es compatible indeterminado si y sólo si "A" es regular
c) Es incompatible determinado si y sólo si "A" es regular

08) Sean las aplicaciones lineales $f:E \mapsto F$, $g:E \mapsto F$, $h:F \mapsto G$; es falso que:

a) $f + g \,/\, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ es aplicación lineal
b) $h \bullet f$ es aplicación lineal ; c) No son ciertas ni a) ni b)

09) Si λ es autovalor de "A", un autovalor de $A - I$ es:

a) $\lambda - 1$; b) $\lambda + 1$; c) λ

10) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 3 con elementos reales; si los autovalores de "A" no son todos nulos y $tr(A) = |A| = 0$, así:

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es un diagonalizable
c) Forzosamente "A" es la matriz nula

11) Dada la expresión $x_1^{\alpha} + x_2^{\alpha+1} - 2.x_1.x_2 - 2.x_1.x_3$, siendo α un número natural, es cierto que:

a) Es una forma cuadrática de tres variables para todo valor de α
b) Es una forma cuadrática de tres variables si $\alpha = 2$
c) No es una forma cuadrática para ningún valor de α

12) Sean "A" y "B" matrices cuadradas de orden "n", siendo "A" definida negativa y "B" definida positiva. La forma cuadrática $Q(x) = x^t(A - B)x$ es

a) Definida positiva ; b) Definida negativa ; c) Indefinida

13) La gráfica de $f(x;y) = \sqrt{x+y}$ es el conjunto:

a) $\{(x;y) \in \Re^2 \,/\, \sqrt{x+y} = c,\ c \in \Re\}$
b) $\{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x + y \geq 0,\ z = \sqrt{x+y}\}$
c) $\{(x;y) \in \Re^2 \,/\, x + y \geq 0,\ \sqrt{x+y} = c\}$

14) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \to \Re$ tal que existe $\lim\limits_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y)$; necesariamente:

a) $(a;b)$ pertenece al dominio de "f"
b) $(a;b)$ es exterior al dominio de "f"
c) $(a;b)$ es punto de acumulación del dominio de "f"

15) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \to \Re$ tal que existe $\lim\limits_{(x;y)\to(0;1)} f(x;y)$ y toma el valor 0; así:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x;2.x) = 0$; b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x;2.x+1) = 0$; c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x;2.(x+1)) = 0$

16) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, f(x+z;y+z) = 2.z + f(x;y),\ \forall\ (x;y) \in \Re^2,\ \forall\ z \in \Re$

a) $D_{(1;1)}f(x;y) = -2$; b) $D_{(1;1)}f(x;y) = 0$; c) $D_{(1;1)}f(x;y) = 2$

17) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \to \Re$ diferenciable en el punto $(a;b) \in \Re^2$; ¿cuál de las siguientes aplicaciones es la diferencial de "f" en el punto $(a;b)$?:

a) $F(x;y) = x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b)$

b) $F(x;y) = x^2.f_{x^2}(a;b) + x.y.f_{xy}(a;b) + y^2.f_{y^2}(a;b)$

c) $F(x;y) = x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) + \dfrac{x^2.f_{x^2}(a;b) + x.y.f_{xy}(a;b) + y^2.f_{y^2}(a;b)}{2!}$

18) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \to \Re$ de clase C^2 en "D" y $a = (a_1;a_2) \in D$. Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de grado 1 de "f" en "a", podemos decir que:

a) $P(x) = Df(a)(x-a)$, siendo Df(a) la aplicación diferencial de "f" en "a"

b) $P(x) = Hf(a)(x-a)$, siendo Hf(a) la matriz hessiana de "f" en "a"

c) $P(x) = \nabla f(a)^t(x-a) + \dfrac{1}{2}(x-a)^t Hf(a)(x-a)$

19) Sea $Y = f(K;L)$ una función de producción homogénea de grado cero; así:

a) Las productividades marginales de "K" y de "L" coinciden.

b) La razón entre "K" y "L" es igual a la razón entre sus productividades marginales.

c) La razón entre "K" y "L" es igual al valor absoluto de la razón entre la productividad marginal de "L" y la productividad marginal de "K".

21) La sucesión de sumas parciales correspondiente a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es:

a) $\{a_n\}$; b) $\{S_n\}$, con $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_n$; c) Las anteriores son falsas

22) Si $k \in \Re$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (k+0'5)^n$ converge si:

a) $\forall\ k \in \Re$; b) $k \in (-1;1)$; c) $k \in (-1'5;0'5)$

23) Sea $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t).dt$, siendo "f" y "g" derivables en $\Re$; así:

a) $F'(x) = f(x).g'(x)$; b) $F'(x) = g'(x).\int_0^{g(x)} f(t).dt$; c) $F'(x) = f(g(x)).g'(x)$

24) Si "f" es derivable en $\Re$ y $|f(x)| \le 1,\ \forall\ x \in \Re$, la integral $\int_0^3 \dfrac{\sqrt{1-f(x)^2}}{\sqrt[3]{x}}.dx$

a) Es convergente ; b) Es divergente

c) Para algunas funciones f(x) es convergente y para otras es divergente

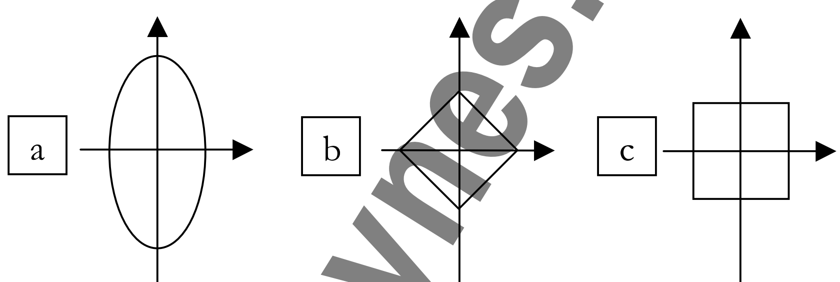
25) Sea $F:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ de clase C^1 y $(a;b) \in D$ tal que $F_y(a;b) \neq 0$. El vector $\nabla F(a;b)$ y el vector tangente a la curva de nivel de "F" que pasa por $(a;b)$

a) Tienen la misma dirección ; b) Son proporcionales
c) Son perpendiculares

26) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ de clase C^2 en "D" y $a=(a_1;a_2) \in D$. Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de grado 1 de "f" en "a", podemos decir que:

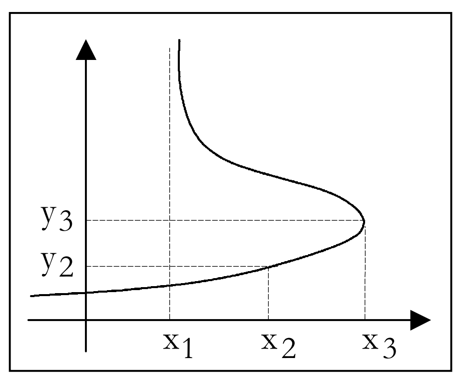
a) $P(x) = f(a) + Df(a)(x-a)$, siendo Df(a) la diferencial de "f" en "a"
b) $P(x) = Hf(a)(x-a)$, siendo Hf(a) la matriz hessiana de "f" en "a"
c) $P(x) = \nabla f(a)^t (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^t Hf(a)(x-a)$

27) Se llama "distancia de Manhattan" a la aplicación $d:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $d(x;y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$. Si en $\Re^2$ tomamos como distancia la de Manhattan, ¿cuál de las siguientes regiones corresponde a la bola de centro en $(0;0)$ y radio "r"?

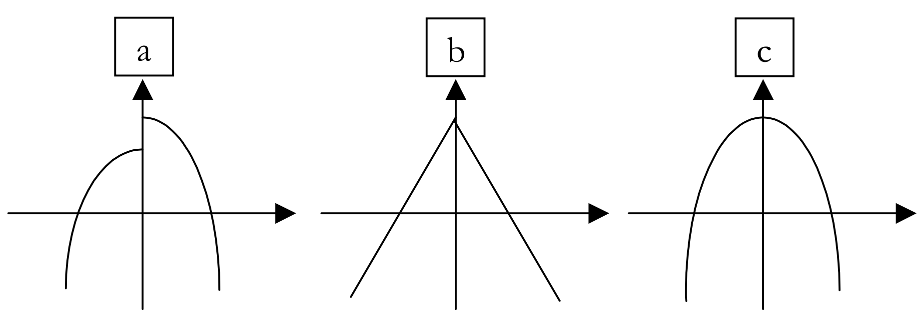


28) Sea $F:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ de clase C^1. Si su curva de nivel "c" tiene la forma de la figura, podemos asegurar que la ecuación $F(x;y)=c$ define implícitamente a la variable "y" como función de la variable "x"

a) En el intervalo $[x_1;x_3]$
b) En un entorno del punto $(x_2;y_2)$
c) En un entorno del punto $(x_3;y_3)$



29) ¿Qué gráfica es la de una función diferenciable en todo punto de su dominio?



30) Una función del tipo CES de la forma

$$f(K;L) = A.\left(\alpha.K^{\Psi} + (1-\alpha).L^{\Psi}\right)^{v/\Psi},\ v > 0,\ \Psi < 1,\ 0 < \alpha < 1$$

se aproxima, cuando Ψ tiende a cero

a) A una función del tipo Cobb - Douglas ; b) A una constante

c) Al número "e"

Solución

01) No siempre es cierto que $\alpha(u \bullet v) = (\alpha u)(\alpha v)$.

02) La correcta es la c): siendo E_1 y E_2 subespacios de "E", su suma $E_1 + E_2$ y su intersección $E_1 \cap E_2$ son subespacios de "E".

03) El valor de "x" es el que anula al determinante de la matriz cuyas columnas son $u = (2;1;-2)$, $v = (1;-1;1)$ y $w = (x;4;7)$. Resulta $x = 5$.

04) La correcta es la a).

05) Es falso que si "A" es regular entonces $A \bullet B$ es regular.

06) La correcta es la a): $A \bullet (x^* + x^h) = A \bullet x^* + A \bullet x^h = b + 0 = b$

07) Un SLH con matriz de coeficientes regular es compatible y determinado (sólo tiene la solución trivial).

08) La correcta es la c).

09) La correcta es la a).

10) La matriz "A" es diagonalizable, pues sus tres autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 son distintos: como $|A| = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$, si $|A| = 0$ hay algún autovalor nulo, que es único (el enunciado garantiza que los autovalores de "A" no son todos nulos, y como $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, si dos autovalores fueran 0, por ser $tr(A) = 0$, también sería 0 el tercero) y los otros dos autovalores no nulos tienen el mismo valor absoluto pero signo distinto.

11) La correcta es la c): el pedrusco $x_1^{\alpha} + x_2^{\alpha+1} - 2.x_1.x_2 - 2.x_1.x_3$ corresponde a una forma cuadrática sólo si $\alpha = 2$ y $\alpha + 1 = 2$, lo que es imposible.

12) La correcta es la b): $Q(x) = x^t \bullet (A - B) \bullet x = \underbrace{x^t \bullet A \bullet x}_{<0} - \underbrace{x^t \bullet B \bullet x}_{>0} < 0$

13) La correcta es la b).

14) La correcta es la c).

15) La correcta es la b): si "f" tiene límite 0 en el punto $(0;1)$, el límite de "f" en dicho punto según cualquier trayectoria de aproximación a él también es 0; en concreto, es 0 el límite según la trayectoria $y = 2.x + 1$ (las trayectorias $y = 2.x$ e $y = 2.(x+1)$ no "pasan" por el punto $(0;1)$).

16) La correcta es la c):

$$D_{(1;1)}f(x;y) = \lim_{k\to 0} \frac{f((x;y)+k\bullet(1;1)) - f(x;y)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k;y+k) - f(x;y)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{2.k + f(x;y) - f(x;y)}{k} = 2$$

$$\boxed{f(x+k;y+k) = 2.k + f(x;y)}$$

17) La correcta es la a).

18) Las tres son falsas. La a) sería correcta si dijera $P(x) = f(a) + Df(a)(x-a)$. ***La pregunta fue anulada.***

19) Si $f(K;L)$ es homogénea de grado 0, según Euler, es:

$$K.f_K(K;L) + L.f_L(K;L) = 0.f(K;L) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} = -\frac{f_L(K;L)}{f_K(K;L)} = \left|\frac{f_L(K;L)}{f_K(K;L)}\right|$$

$$\boxed{\text{Pues "K" y "L" no son negativos}}$$

21) La correcta es la b).

22) Serie geométrica de razón $k + 0'5$, que converge sólo si $|\text{razón}| < 1$:

$$|k+0'5| < 1 \Rightarrow -1 < k + 0'5 < 1 \Rightarrow -1'5 < k < 0'5$$

23) La correcta es la c): si $F(x) = \int_{k(x)}^{g(x)} f(t;x).dt$, es:

$$F'(x) = \int_{k(x)}^{g(x)} \frac{\partial f(t;x)}{\partial x}.dt + f(g(x);x).g'(x) - f(k(x);x).k'(x)$$

24) La correcta es la a): como $|f(x)| \le 1,\ \forall\ x \in \Re$, es $0 \le \sqrt{1-f(x)^2} \le 1;$ así:

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{1-f(x)^2}}{\sqrt[3]{x}}.dx \le \int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.dx$$

La última integral (que es impropia de segunda especie, por falta de acotación del integrando en el punto $x = 0$) es convergente:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.dx = \lim_{h\to 0} \int_{0+h}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.dx = \frac{3}{2}.\lim_{h\to 0} \left(x^{2/3}\right)_{0+h}^{3} =$$

$$= \frac{3}{2}.\lim_{h\to 0} \left(3^{2/3} - h^{2/3}\right) = \frac{3}{2}.3^{2/3}$$

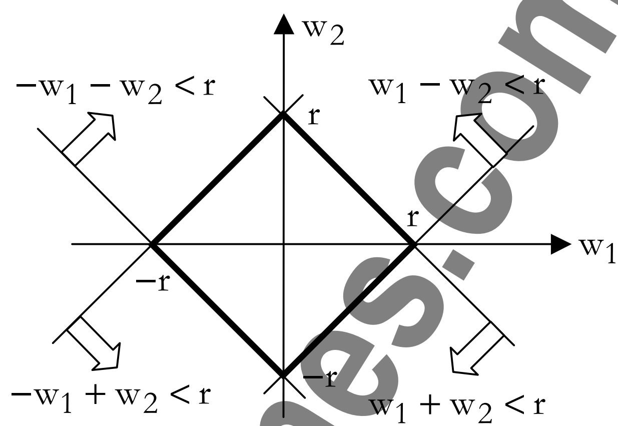
Por tanto, la integral dada también es convergente

25) La correcta es la c): famosa propiedad.

26) La correcta es la a).

27) La correcta es la b): la bola $B((0;0);r)$ de centro en el punto $(0;0)$ y radio "r" la forman los puntos $w=(w_1;w_2)\in\Re^2$ cuya distancia de Manhattan a $(0;0)$ es inferior a "r":

$$B((0;0);r)=\left\{w=(w_1;w_2)\in\Re^2\ /\left|w_1-0\right|+\left|w_2-0\right|<r\right\}=$$
$$=\left\{w=(w_1;w_2)\in\Re^2\ /\left|w_1\right|+\left|w_2\right|<r\right\}=$$
$$=\left\{w=(w_1;w_2)\in\Re^2 \middle/ \begin{array}{c} w_1+w_2<r \text{ si } w_1\geq 0 \text{ y } w_2\geq 0 \\ w_1-w_2<r \text{ si } w_1\geq 0 \text{ y } w_2<0 \\ -w_1+w_2<r \text{ si } w_1<0 \text{ y } w_2\geq 0 \\ -w_1-w_2<r \text{ si } w_1<0 \text{ y } w_2<0 \end{array}\right\}$$



28) La a) y la c) no son correctas: la recta tangente a la curva de nivel en el punto $(x_3;y_3)$ es paralela al eje de ordenadas $\Rightarrow$ el vector $\nabla F(x_3;y_3)$, que es perpendicular a dicha recta, es paralelo al eje de abcisas $\Rightarrow$ en el punto $(x_3;y_3)$ sucede que $F_y(x_3;y_3)=0$ $\Rightarrow$ en dicho punto se incumple la tercera exigencia del teorema de existencia de campos definidos mediante una ecuación.

29) Una función $f:\Re\mapsto\Re$ es diferenciable en el punto "Pepe" sólo si tiene derivada finita en "Pepe". La correcta es la c). La función "f" representada en a) no es diferenciable en $x=0$: como ***está rota*** (o sea, no es continua) en dicho punto, carece de derivada en él. La función "f" representada en b) no es diferenciable en $x=0$, pues carece de derivada en dicho punto, ya que en $x=0$ hay un ***punto anguloso***.

30) La correcta es la a):

$$\lim_{\Psi\to 0} A.\left(\alpha.K^{\Psi}+(1-\alpha).L^{\Psi}\right)^{v/\Psi}=(1^{\infty})=$$

$$\boxed{\lim_{\Psi\to 0}(h(\Psi))^{m(\Psi)}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{\Psi\to 0} m(\Psi).(h(\Psi)-1)}}$$

$$= A.e^{\lim\limits_{\Psi\to 0} \frac{v.(\alpha.K^{\Psi}+(1-\alpha).L^{\Psi}-1)}{\Psi}} = (0/0) =$$

$\boxed{\text{Aplicamos la regla de L'Hospital}}$

$$= A.e^{\lim\limits_{\Psi\to 0} \frac{v.(\alpha.K^{\Psi}.\text{Ln } K+(1-\alpha).L^{\Psi}.\text{Ln } L)}{1}} =$$

$$= A.e^{v.\alpha.\text{Ln } K+v.(1-\alpha).\text{Ln } L} =$$

$$= A.e^{\text{Ln } K^{v.\alpha}+\text{Ln } L^{v.(1-\alpha)}} =$$

$$= A.e^{\text{Ln } K^{v.\alpha}.L^{v.(1-\alpha)}} =$$

$$= A.K^{v.\alpha}.L^{v.(1-\alpha)}$$

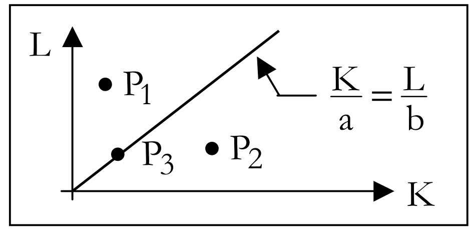
$\boxed{\text{pues } e^{\text{Ln Pepe}} = \text{Pepe}}$

TEORÍA (ECONOMÍA)

Sea $f(K;L) = \min.\{K/a;L/b\}$, $a,b>0$. Encuentre sus derivadas parciales y demuestre que no es diferenciable en todos los puntos de su dominio.

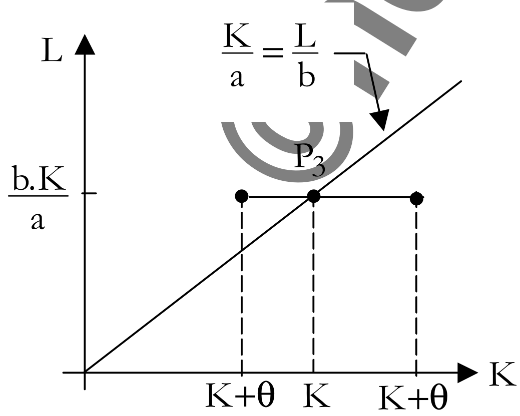
Solución

Como es absurdo pensar que "K" (cantidad de capital) o "L" (cantidad de trabajo) son negativos, el dominio de definición de "f" es el primer cuadrante del plano.



- Si $f(K;L) = \min.\{K/a;L/b\}$, es claro que la recta $K/a = L/b$ es quien corta el bacalao en lo que se refiere al valor que toma "f" en cada punto de su dominio.
- Si el punto $P_1 = (K;L)$ está encima de la recta $K/a = L/b$, es $K/a < L/b$; por lo que $f(K;L) = \min.\{K/a;L/b\} = K/a$. Así, en dicho punto, sin más que aplicar las reglas de derivación, resulta ser $f_K(K;L) = 1/a$ y $f_L(K;L) = 0$.
- Si el punto $P_2 = (K;L)$ está debajo de la recta $K/a = L/b$, es $K/a > L/b$; por lo que $f(K;L) = \min.\{K/a;L/b\} = L/b$. Así, en dicho punto, sin más que aplicar las reglas de derivación, resulta ser $f_K(K;L) = 0$ y $f_L(K;L) = 1/b$.
- En todo punto $P_3 = (K;b.K/a)$ de la recta $K/a = L/b$ sucede que al dividir su abcisa por "a" se obtiene lo mismo que al dividir su ordenada por "b"; así, es $f(K;b.K/a) = \min.\{K/a;K/a\} = K/a$, y no existe la derivada parcial de "f" respecto de "K", pues el cociente $\big(f(K+\theta;b.K/a) - f(K;b.K/a)\big)/\theta$ tiene límites distintos según que $\theta \to 0^+$ ó $\theta \to 0^-$:

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{f(K+\theta;b.K/a) - f(K;b.K/a)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\frac{b.K/a}{b} - \frac{K}{a}}{\theta} = 0$$

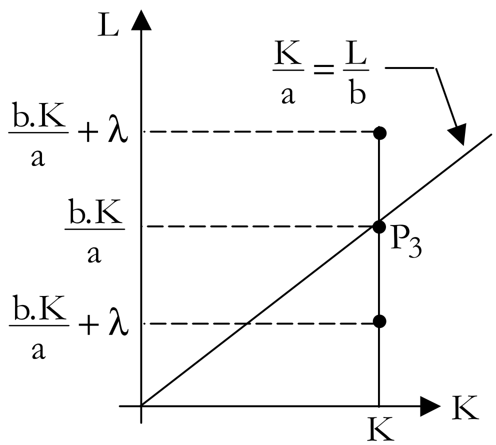


Si $\theta \to 0^+$, el punto $(K+\theta;b.K/a)$ está por debajo de la recta $K/a = L/b$, pero si $\theta \to 0^-$, el punto $(K+\theta;b.K/a)$ está por encima de esa recta ..... y sabemos que según que el punto $(Pepe;Juan)$ esté por debajo o por encima de la recta en cuestión sucede que $f(Pepe;Juan) = Juan/b$ ó $f(Pepe;Juan) = Pepe/a$

$$\lim_{\theta\to 0^-} \frac{f(K+\theta; b.K/a) - f(K; b.K/a)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^-} \frac{\frac{K+\theta}{a} - \frac{K}{a}}{\theta} = \frac{1}{a}$$

- Tampoco tiene "f" derivada respecto de "L" en el punto $P_3 = (K; b.K/a)$, pues el cociente $\big(f(K;(b.K/a)+\lambda) - f(K;L)\big)/\lambda$ tiene límites distintos según que $\lambda \to 0^+$ ó $\lambda \to 0^-$:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f(K;(b.K/a)+\lambda) - f(K; b.K/a)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\frac{K}{a} - \frac{K}{a}}{\lambda} = 0$$



Si $\lambda \to 0^+$, el punto $(K;(b.K/a)+\lambda)$ está por encima de la recta $K/a = L/b$, pero si $\lambda \to 0^-$, el punto $(K;(b.K/a)+\lambda)$ está por debajo de esa recta ..... y sabemos que según que el punto $(Pepe; Juan)$ esté por encima o por debajo de la recta en cuestión sucede que $f(Pepe; Juan) = Pepe/a$ ó $f(Pepe; Juan) = Juan/b$

$$\lim_{\lambda\to 0^-} \frac{f(K;(b.K/a)+\lambda) - f(K; b.K/a)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0^-} \frac{\frac{(b.K/a)+\lambda}{b} - \frac{K}{a}}{\lambda} = \frac{1}{b}$$

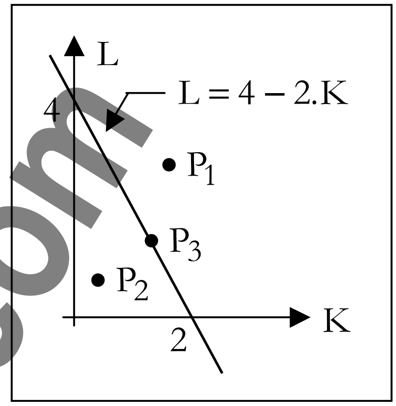
- Como "f" carece de derivadas parciales en el punto P_3, no es diferenciable en dicho punto; por tanto, "f" no es diferenciable en todo punto de su dominio.

IGUAL QUE EL ANTERIOR (POR SI ACASO)

Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que $f(K;L) = \text{máx.}\{1+2.K\,;5-L\}$. Encuentre sus derivadas parciales y demuestre que no es diferenciable en todos los puntos de su dominio.

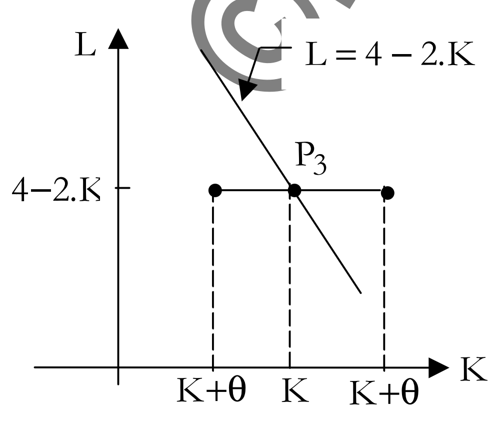
Solución

- Siendo $f(K;L) = \text{máx.}\{1+2.K\,;5-L\}$, es obvio que la recta $1+2.K = 5-L$ (o sea, la recta $L = 4-2.K$) es quien corta el bacalao en lo que se refiere al valor que toma "f" en cada punto.



- En todo punto $P_1 = (K;L)$ encima de la recta $1+2.K = 5-L$ sucede que $1+2.K > 5-L$, por lo que $f(K;L) = \text{máx.}\{1+2.K\,;5-L\} = 1+2.K$ Así, en dicho punto, sin más que aplicar las reglas de derivación, resulta ser $f_K(K;L) = 2$ y $f_L(K;L) = 0$.
- En todo punto $P_2 = (K;L)$ situado debajo de la recta $1+2.K = 5-L$ sucede que $1+2.K < 5-L$, por lo que $f(K;L) = \text{máx.}\{1+2.K\,;5-L\} = 5-L$. Así, en dicho punto, sin más que aplicar las reglas de derivación, resulta ser: $f_K(K;L) = 0$; $f_L(K;L) = -1$
- En todo punto $P_3 = (K\,;4-2.K)$ de la recta $1+2.K = 5-L$ sucede que al sumar 1 al doble de su abcisa se obtiene lo mismo que al restar la ordenada de 5; así, es $f(K\,;4-2.K) = \text{máx.}\{1+2.K\,;5-(4-2.K)\} = 1+2.K$. Como el cociente $\big(f(K+\theta;4-2.K) - f(K;4-2.K)\big)/\theta$ tiene límites distintos según que $\theta \to 0^+$ ó $\theta \to 0^-$, en $P_3 = (K;4-2.K)$ no existe la derivada parcial respecto de "K"

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{f(K+\theta;4-2.K) - f(K;4-2.K)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{(1+2.(K+\theta)) - (1+2.K)}{\theta} = 2$$

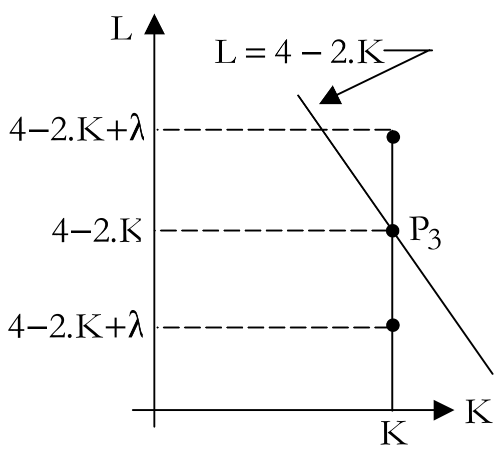


Si $\theta \to 0^+$, el punto $(K+\theta;4-2.K)$ está por encima de la recta $1+2.K = 5-L$, pero si $\theta \to 0^-$, el punto $(K+\theta;4-2.K)$ está por debajo de esa recta ..... y sabemos que según que el punto $(\text{Pepe};\text{Juan})$ esté por encima o por debajo de la recta en cuestión es $f(\text{Pepe};\text{Juan}) = 1+2.\text{Pepe}$ ó $f(\text{Pepe};\text{Juan}) = 5-\text{Juan}$

$$\lim_{\theta \to 0^-} \frac{f(K+\theta;4-2.K)-f(K;4-2.K)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \frac{(5-(4-2.K))-(5-(4-2.K))}{\theta} = 0$$

- No tiene "f" derivada respecto de "L" en el punto $P_3 = (K;4-2.K)$, pues el cociente $\left(f(K;4-2.K+\lambda)-f(K;4-2.K)\right)/\lambda$ tiene límites distintos según que $\lambda \to 0^+$ ó $\lambda \to 0^-$:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(K;4-2.K+\lambda)-f(K;4-2.K)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{(1+2.K)-(1+2.K)}{\lambda} = 0$$



Si $\lambda \to 0^+$, el punto $(K;4-2.K+\lambda)$ está por encima de la recta $1+2.K = 5-L$, pero si $\lambda \to 0^-$, el punto $(K;4-2.K+\lambda)$ está por debajo de esa recta ..... y sabemos que según que el punto (Pepe; Juan) esté por encima o por debajo de la recta en cuestión es $f(\text{Pepe};\text{Juan}) = 1+2.\text{Pepe}$ ó $f(\text{Pepe};\text{Juan}) = 5-\text{Juan}$

$$\lim_{\lambda \to 0^-} \frac{f(K;4-2.K+\lambda)-f(K;4-2.K)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{(5-(4-2.K+\lambda))-(5-(4-2.K))}{\lambda} = -1$$

- Como "f" carece de derivadas parciales en el punto P_3, no es diferenciable en dicho punto; por tanto, "f" no es diferenciable en todo punto de su dominio.

TEORÍA (ADE Y ECONOMÍA)

Sea $A \in M_{2\times 2}(\Re)$ una matriz que admite un único autovalor λ y cualquier vector no nulo es autovector del mismo. Identifique dicha matriz. Escriba el sistema lineal homogéneo que la tiene como matriz de coeficientes y resuelva dicho sistema.

Solución (tablón de la Facultad)

Como "A" admite un autovalor λ (evidentemente de multiplicidad 2) y todo vector $v \in \Re^2$ ("v" no nulo) es autovector suyo, se tiene que el subespacio propio $L(\lambda) = \Re^2$ y por tanto "A" es diagonalizable. Así, "A" será semejante a

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

O sea, existe "P" regular tal que $A = P \bullet D \bullet P^{-1}$. Teniendo en cuenta que $D = \lambda \bullet I$, se tiene que $A = \lambda \bullet P \bullet P^{-1} = \lambda \bullet I$.

El sistema lineal homogéneo es: $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si $\lambda \neq 0$ tiene la solución $x_1 = x_2 = 0$. Si $\lambda = 0$, cualquier $(x_1; x_2)$ es solución del sistema.

EJERCICIO (ADE Y ECONOMÍA)

Sea $f : \Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica de $\Re^3$ es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Encontrar una matriz ortogonal "C" tal que $C^t \bullet A \bullet C$ sea diagonal.
2) ¿Es "f" un isomorfismo? Calcular una base de $Ker.f$ y una base de $Im.f$
3) Obtenga las expresiones polinómica y canónica de la forma cuadrática asociada a la matriz "A". Clasifique dicha forma cuadrática.

Solución

1) Para "construir" (por columnas) la matriz ortogonal "C" cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su correspondiente subespacio de autovectores.

- Calculemos los autovalores de "A": son las soluciones de $\left| A - \lambda \bullet I \right| = 0$, que es la ecuación característica de "A":

$$\left| A - \lambda \bullet I \right| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 2.\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2, -1$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con Tr(A) y su producto coincide con $\left| A \right|$ .... así podrás detectar errores de cálculo.

• *Autovectores de λ = 1*

$$(A-1\bullet I)\bullet \overline{p}=\overline{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ -1\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & -1\end{matrix} & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos "z"; resulta $x=0$, $y=-z$; por tanto: $L(\lambda=1)=\{(0\,;-a\,;a),\ \forall\ a\in\Re\}=\{a\bullet(0\,;-1\,;1),\ \forall\ a\in\Re\}$.

El vector $\overline{h}_1=(0\,;-1\,;1)$ es una base del subespacio $L(\lambda=1)$, y el vector $\overline{w}_1=\overline{h}_1/\|\overline{h}_1\|=(0;-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$ es una base ortonormal de dicho subespacio.

• *Autovectores de λ = 2*

$$(A-2\bullet I)\bullet \overline{p}=\overline{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & \begin{matrix}0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{matrix}}\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos "x"; resulta $y=z=0$; por tanto: $L(\lambda=2)=\{(b;0;0),\ \forall\ b\in\Re\}=\{b\bullet(1;0;0),\ \forall\ b\in\Re\}$.

El vector $\overline{h}_2=(1;0;0)$ es una base del subespacio $L(\lambda=2)$, y una base ortonormal de dicho subespacio es la que forma el vector $\overline{w}_2=\overline{h}_2/\|\overline{h}_2\|=(1;0;0)$.

• *Autovectores de λ =– 1*

$$(A+1\bullet I)\bullet \overline{p}=\overline{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ -1\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & -1\end{matrix} & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos "z"; resulta $x=0$, $y=z$; por tanto: $L(\lambda=-1)=\{(0\,;c\,;c),\ \forall\ c\in\Re\}=\{c\bullet(0\,;1\,;1),\ \forall\ c\in\Re\}$.

El vector $\overline{h}_3=(0\,;1\,;1)$ es una base de subespacio $L(\lambda=-1)$, y el vector $\overline{w}_3=\overline{h}_3/\|\overline{h}_3\|=(0;1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$ es una base ortonormal del subespacio.

• *Obtención de "C"*

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3\end{matrix}$$

2) Como es sabido, siendo "U" y "V" espacios vectoriales, la aplicación lineal $f: U \mapsto V$ es isomorfismo (o sea, biyectiva) si es monomorfismo (o sea, inyectiva; es decir, sucede que $f(\bar{p}) \neq f(\bar{q})$ si $\bar{p} \neq \bar{q}$) y epimorfismo (o sea, sobreyectiva; es decir, sucede que $\text{Img}.\ f = V$).

La aplicación lineal "f" es inyectiva, pues el rango de "A" (es 3) coincide con la dimensión del espacio "inicial" .... y "f" también es sobreyectiva, pues el rango de "A" coincide con la dimensión del espacio "final". Por ser inyectiva y sobreyectiva, la aplicación lineal "f" es biyectiva (isomorfismo).

Es $\ker.\ f = \{\bar{p} \in \Re^3 / f(\bar{p}) = \bar{0}\} = \{\bar{0}\}$, pues el sistema lineal homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas $f(\bar{p}) = \bar{0}$ sólo tiene la solución trivial, ya que su matriz de coeficientes "A" tiene rango 3. Así, carece de sentido hablar de una base del núcleo de "f".

Como el núcleo de "f" tiene dimensión 0, el subespacio $\text{Im}.\ f$ tiene dimensión 3 (siempre sucede que $\dim.(\ker.\ f) + \dim.(\text{Im}.\ f) = \text{Dim}.(\text{Espacio Final})$); así, es $\text{Im}.\ f = \Re^3$ y cualquier base de $\Re^3$ es base de $\text{Im}.\ f$.

3) La expresión matricial de la forma cuadrática $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ que tiene a la matriz "A" como asociada respecto de la base canónica de $\Re^3$ es

$$Q(\bar{p}) = (x; y; z) \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

siendo $(x; y; z)$ las coordenadas del vector $\bar{p} \in \Re^3$ respecto de dicha base.

La expresión polinómica de "Q" respecto de la base canónica es

$$Q(\bar{p}) = 2.x^2 - 2.y.z$$

- Denotando $(x_1; y_1; z_1)$ a las coordenadas del vector $\bar{p} \in \Re^3$ respecto de la base ortonormal de $\Re^3$ que forman los vectores $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$, la expresión matricial de la forma cuadrática "Q" respecto de dicha base es:

$$Q(\bar{p}) = (x_1; y_1; z_1) \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{C^t \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Así, la expresión canónica de "Q" es $Q(\bar{p}) = 2.x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$.

Como los autovalores de "A" tienen distinto signo, la forma cuadrática "Q" es indefinida; es decir, en $\Re^3$ hay vectores cuya imagen según "Q" es positiva, y hay vectores cuya imagen según "Q" es negativa.

EJERCICIO (ADE Y ECONOMÍA)

Sea $B(p;p_m)$ la función de beneficio de una empresa, siendo "p" el precio al que dicha empresa vende su producto y p_m el precio medio al que lo venden las empresas de la competencia. Actualmente, cuando $p=10$ y $p_m=15$, se estima que

$$\frac{\partial B}{\partial p}(10;15)=-2\ ;\ \frac{\partial B}{\partial p_m}(10;15)=3$$

Según la política de la empresa, su precio debe ajustarse al de la competencia de modo que $p.p_m+3.p^2=2.p_m^2$.

1) Determine que "p" es función de p_m en un entorno de los precios actuales.
2) Justifique que el beneficio de la empresa es función únicamente de p_m y calcule la variación que sufriría si se produce un incremento unitario de p_m.

Solución (tablón de la Facultad)

1) Siendo $F(p;p_m)=p.p_m+3.p^2-2.p_m^2$, se cumple que:

$$* \ F(10;15)=0$$

$$* \left.\begin{cases} F_p(p;p_m)=p_m+6.p \\ F_{p_m}(p;p_m)=p-4.p_m \end{cases}\right\} \text{ambas derivadas son continuas en } \Re^2$$

$$* \ F_p(10;15)=75\neq 0$$

En consecuencia, la ecuación $F(p;p_m)=0$ define implícitamente a "p" como función de p_m en un entorno de $(10;15)$.

2) $B(p;p_m)=B(p(p_m);p_m)$ y por tanto es función sólo de p_m.

Se tiene, por tanto:

$$B'(p_m)=\frac{d(B(p(p_m);p_m))}{dp_m}=\frac{\partial B}{\partial p}.p'(p_m)+\frac{\partial B}{\partial p_m}$$

Por otro lado:

$$p'(15)=-\frac{\dfrac{\partial F(10;15)}{\partial p_m}}{\dfrac{\partial F(10;15)}{\partial p}}=-\left(\frac{p-4.p_m}{p_m+6.p}\right)_{(10;15)}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$$

y así:

$$B'(15)=(-2).(\frac{2}{3})+3=\frac{5}{3}$$

EJERCICIO (ECONOMÍA)

Siendo $D=\left\{(x;y)\in\Re^2 \;/\; x+y=-1,\ x+y=1,\ x=y,\ x=1+y\right\}$, calcule

$$\iint_D (x+y)^2.e^{x^2-y^2}.dx.dy$$

Utilice el cambio de variables $u=x+y,\ v=x-y$.

Solución

En general, si para calcular $\iint_D f(x;y).dx.dy$ realizamos el cambio de variables

$$x=h_1(u;v)\ ;\ y=h_2(u;v)$$

es:

$$\iint_D f(x;y).dx.dy=\iint_{D*} f(h_1(u;v);h_2(u;v)).\left|J\right|.du.dv$$

donde $D*$ es el domino en que se transforma "D" como consecuencia del cambio de variables, y "J" es el determinante jacobiano del cambio:

$$J=\begin{vmatrix}\partial h_1/\partial u & \partial h_1/\partial v\\ \partial h_2/\partial u & \partial h_2/\partial v\end{vmatrix}$$

En nuestro caso:

$$\left.\begin{matrix}u=x+y\\ v=x-y\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=h_1(u;v)=(u+v)/2\\ y=h_2(u;v)=(u-v)/2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

Siendo $D=\left\{(x;y)\in\Re^2 \;/\; x+y=-1,\ x+y=1,\ x=y,\ x=1+y\right\}$ y siendo

$$u=x+y\ ;\ v=x-y$$

resulta que $D*$ es un hermoso rectángulo:

$$D^*=\left\{(u;v)\in\Re^2 \;/\; u=-1,\ u=1,\ v=0,\ v=1\right\}$$

En consecuencia:

$$\iint_D (x+y)^2.e^{x^2-y^2}.dx.dy=\iint_{D*} u^2.e^{u.v}.\left|-\frac{1}{2}\right|.du.dv=$$

$$=\frac{1}{2}.\iint_{D*} u^2.e^{u.v}.du.dv=\frac{1}{2}.\int_{u=-1}^{u=1}\left(\int_{v=0}^{v=1} u^2.e^{u.v}.dv\right).du=$$

$$=\frac{1}{2}.\int_{u=-1}^{u=1}\left(u.e^{u.v}\right)_{v=0}^{v=1}.du=\frac{1}{2}.\int_{u=-1}^{u=1}(u.e^u-u).du=\underbrace{....}_{\text{por partes una vez para calcular la primitiva de } u.e^u}=e^{-1}$$

TEORÍA (ADE)

Demuestre que la serie armónica es divergente.

TEORÍA (ADE)

Demuestre que si las funciones "f" y "g" son integrables en el intervalo $[a;b]$ entonces la función "$f+g$" también es integrable en dicho intervalo y se cumple que

$$\int_a^b (f(x)+g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$$

TEORÍA (ECONOMÍA)

Demuestre que si $f:D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ es diferenciable en el punto $x \in D$, entonces sucede que $Df(x)(v) = \nabla f(x)^t \bullet v$.