MATEMÁTICAS PARA LA EMPRESA
LICENCIATURA EN ADE+DERECHO
EXAMEN 24/02/03

01) Sea "E" un espacio vectorial definido sobre $\Re$; siempre es cierto que

a) $\|x+y\| = \|x\| + \|x+y\|,\ \forall x,y \in E$
b) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|,\ \forall x \in E, \forall \alpha \in \Re^{+}$
c) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|,\ \forall x \in E, \forall \alpha \in \Re$

02) ¿Cuál de los siguientes conjuntos NO es subespacio de $\Re^3$?

a) $A = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \ / \ x = 0,\ y = 0,\ z \in \Re\right\}$
b) $B = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \ / \ x,y,z \text{ son números naturales}\right\}$
c) $C = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \ / \ x + y = 0,\ 2.z = 1\right\}$

03) Si $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto ligado de "n" vectores, cualquier otro conjunto "A" que contenga a "S" será:

a) libre ; b) ligado ; c) no podemos saber a priori cómo es

04) Sea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ es un sistema generador de un espacio vectorial "E":

a) $\dim.(E) \le p$; b) $\dim.(E) > p$; c) $\dim.(E) = 0$

05) Siendo "A" una matriz ortogonal, es cierto que:

a) A es singular ; b) A^t no es ortogonal ; c) A es regular

06) Si $A \in M_{2\times 2}$ tiene rango 2, entonces:

a) Los vectores columna que forman A son LI
b) Los vectores columna que forman A son LD
c) Los vectores columna que forman A pueden ser LI o LD

07) Sea $Ax = b$ un sistema lineal con "m" ecuaciones y "n" incógnitas:

a) El sistema es incompatible sii $rg(A) \ne rg(A/b)$
b) El sistema es incompatible sii $rg(A) = rg(A/b) < n$
c) El sistema es incompatible sii $rg(A) = rg(A/b) < m$

08) Siendo A una matriz regular e idempotente, es:

$$a)\ |A| = 0\ ;\ b)\ |A| = -1\ ;\ c)\ |A| = 1$$

09) Siendo A y B matrices cuadradas de orden 3, con $|A| = 2$ y $|B| = 1$, es:

$$a)\ |2A| = 4\ ;\ b)\ |2AB| = 4\ ;\ c)\ |2AB| = 16$$

10) Sean A y B matrices congruentes, con $|A| > 0$.

$$a)\ |A| = |B|\ ;\ b)\ |B| > 0\ ;\ c)\ |B| < 0$$

11) Sea $f: \Re^4 \mapsto \Re^3$ tal que $\dim.(\ker. f) = 1$.

a) "f" es sobreyectiva ; b) "f" es inyectiva ; c) "f" no es sobreyectiva

12) Sea $f: E \mapsto F$ una aplicación lineal. Es cierto que:

$$a)\ f(x + \alpha y) = \alpha[f(x) + f(y)]\ ;\ b)\ \text{Si } f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \forall x \in E$$
$$c)\ f(x - y) = f(x) - f(y), \forall x, y \in E$$

13) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 3 singular tal que $tr(A) = 5$ y $\lambda = 2$ es valor propio de ella. Podemos asegurar que:

a) "A" no es diagonalizable ; b) "A" es diagonalizable

c) $\lambda = 2$ es un valor propio doble de "A"

14) Si la matriz "A" es cuadrada de orden 3 y sus autovalores son $1, -1$ y 0, los autovalores de A^3 son:

a) $1, -1, 0$; b) $3, -3, 0$; c) no podemos conocerlos

15) Si la matriz "A" es cuadrada de orden 2 y sus autovalores son 1 y 2, los vectores propios asociados son: a) Ortogonales ; b) LI ; c) LD

16) Si $Q(x) = x^t A x$ es definida positiva, la forma cuadrática $Q_1(x) = x^t A^{-1} x$ es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida negativa ; c) Indefinida

17) La forma cuadrática $Q(x; y; z) = x^2 + y^2 + 2.x.z + 2.y.z$ restringida al subespacio $V = \{(x; y; z) / z = 0\}$ es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida positiva ; c) Indefinida

18) ¿Cuál es una forma cuadrática?:

$$a)\ Q(x; y; z) = x^2 + 2.x + x.z$$
$$b)\ Q(x; y; z) = 2.x.y + 3.x.z + 2.y.z$$
$$c)\ Q(x; y; z) = x^2 + 3.y^3 + 2.y.z$$

Solución

01) La correcta es b).

02) La correcta es b).

03) Si "S" es ligado (en "S" hay "información repetida"), en cualquier conjunto "W" que contenga a "S" hay "información repetida", por lo que "W" es ligado.

04) La correcta es a).

05) La correcta es c): el determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1.

06) La correcta es a).

07) La correcta es a).

08) La correcta es c):

$$\text{A idempotente} \Rightarrow A \bullet A = A \Rightarrow |A \bullet A| = |A| \Rightarrow |A|^2 = |A| \Rightarrow |A| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

La solución $|A| = 0$ debe descartarse, pues "A" es regular.

09) $|2AB| = 2^3.|AB| = 2^3.|A|.|B| = 16$.

10) La correcta es b).

11) La correcta es a):

$$\begin{gathered} \dim.(\ker.f) + \dim.(\mathrm{Im}.f) = \dim.(\text{Espacio Inicial}) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + \dim.(\mathrm{Im}.f) = 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim.(\mathrm{Im}.f) = 3 = \dim.(\text{Espacio Final}) \Rightarrow \text{"f" es sobreyectiva} \end{gathered}$$

12) La correcta es c).

13) La correcta es b), pues todos los autovalores son distintos: si "A" es singular entonces $\lambda = 0$ es autovalor; como $\lambda = 2$ también es autovalor y la suma de los autovalores coincide con $tr(A) = 5$, el tercer autovalor es $\lambda = 3$.

14) La correcta es a): los autovalores de A^3 son los de "A" elevados al cubo.

15) La correcta es b): autovectores asociados a autovalores distintos son LI.

16) La correcta es la b): si $Q(x) = x^t A x$ es definida positiva, los autovalores de "A" son positivos; así, los autovalores de A^{-1} son positivos (recuerda que si λ es autovalor de "A", entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}).

17) La correcta es a): $Q(x;y;0) = x^2 + y^2 > 0, \forall (x,y) \neq (0;0)$.

18) La correcta es b).

TEORÍA (1 PUNTO)

Demostrar que el conjunto $S = \{A \in M_n \ / \ A \text{ es simética}\}$ es un subespacio vectorial.

Solución

Para demostrar que "S" es subespacio vectorial del espacio vectorial M_n de las matrices cuadradas de orden "n", debemos demostrar que toda combinación lineal de elementos de "S" es un elemento de "S", como en efecto sucede: si $A, B \in S$ y $\alpha, \beta \in \Re$, es:

$$(\alpha \bullet A + \beta \bullet B)^t = (\alpha \bullet A)^t + (\beta \bullet B)^t =$$
$$= \alpha \bullet A^t + \beta \bullet B^t \underset{\uparrow}{=} \alpha \bullet A + \beta \bullet B \Rightarrow \alpha \bullet A + \beta \bullet B \in S$$
$$\boxed{A, B \in S \Rightarrow A^t = A \text{ y } B^t = B}$$

TEORÍA (0'5 PUNTOS)

Demuestre que si $A, B \in M_n$ son matrices ortogonales, $A \bullet B$ también es ortogonal.

TEORÍA (0'5 PUNTOS)

Demuestre que si $f : \Re^n \mapsto \Re^n$ es un endomorfismo con matriz asociada ortogonal, entonces "f" es un isomorfismo.

Solución

Si la matriz "A" asociada a "f" es ortogonal, entonces "A" es regular (recuerda que el determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1), por lo que $rg(A) = n$.

Como el rango de "A" coincide con la dimensión del espacio "inicial", la aplicación lineal "f" es inyectiva (monomorfismo).

Como el rango de "A" coincide con la dimensión del espacio "final", la aplicación lineal "f" es sobreyectiva (epimorfismo).

Por ser inyectiva y sobreyectiva, "f" es biyectivo (isomorfismo).

TEORÍA (1 PUNTO)

Demuestre que los vectores propios de una matriz simétrica asociados a valores propios distintos son ortogonales.

EJERCICIO (0'5+1+0'5+0'5+1+0'5 PUNTOS)

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica de $\Re^3$ es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1) ¿Es "f" un isomorfismo?
2) Sea $g:\Re^3 \mapsto \Re^2$ la aplicación lineal tal que $g(x;y;z) = (0;y+z)$. Calcúlese la matriz asociada a "g" respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$. Obténgase la matriz asociada a $g \bullet f$. Calcúlese una base de $\ker.(g \bullet f)$.
3) ¿Es "A" diagonalizable? En caso afirmativo, diagonalícese.
4) Obténgase la expresión polinómica y la expresión canónica de la forma cuadrática asociada a "A".
5) Clasifíquese la anterior forma cuadrática y determínese la matriz de paso ortogonal que permite obtener la expresión canónica.
6) Estúdiese el signo de la forma cuadrática restringida a $x - y = 0$.

Solución