EXAMEN FEBRERO 2003

01) Siendo "A" una matriz idempotente, ¿cuál no es correcta?

a) $-A$ es idempotente ; b) A^t es idempotente ; c) A^{-1} es idempotente

02) Siendo "A" idempotente, al despejar "X" en $AX(A^{-1}X)^{-1} = X + A - B$, es:

a) $X = 0$; b) $X = A$; c) $X = B$

03) Si $A \in M_{3\times 4}(\Re)$ es tal que $rg(A) = 3$, no es cierto que:

a) Tres de los vectores columna de "A" son LI
b) Los cuatro vectores columna de "A" son LI
c) Los tres vectores fila de "A" son LI

04) Siendo "A" ortogonal, la inversa de $C = \begin{bmatrix} -A & -I \\ 0 & -A^t \end{bmatrix}$ es:

a) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -A^t & I \\ 0 & -A \end{bmatrix}$; b) $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^t & I \\ 0 & A \end{bmatrix}$; c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^t & -A \\ 0 & A \end{bmatrix}$

05) Sea $f: \Re^n \mapsto \Re^m$ una aplicación lineal con matriz asociada $A \in M_{m\times n}(\Re)$. Entonces, si $x = (x_1 : .... ; x_n)^t$ es un vector de $\Re^n$, podemos afirmar que:

a) "f" es monomorfismo $\Leftrightarrow$ el sistema $AX = 0$ es compatible determinado
b) "f" es epiomorfismo $\Leftrightarrow$ el sistema $AX = 0$ es compatible indeterminado
c) "f" es isomorfismo $\Leftrightarrow$ el sistema $AX = 0$ es incompatible

06) En $\Re^2$ definimos la suma $(x;y) + (x';y') = (x + x';y + y')$. Señale cuál de las siguientes formas de definir el producto de un número real por un elemento de $\Re^2$, junto a la suma habitual, dota a $\Re^2$ de estructura de espacio vectorial:

a) $\alpha \bullet (x;y) = (\alpha^2 . x ; \alpha . y), \forall \alpha \in \Re, \forall (x;y) \in \Re^2$
b) $\alpha \bullet (x;y) = (\alpha . x ; y), \forall \alpha \in \Re, \forall (x;y) \in \Re^2$
c) $\alpha \bullet (x;y) = (x/\alpha ; y/\alpha), \forall \alpha \in \Re - \{0\}, \forall (x;y) \in \Re^2$

07) Sea "E" un espacio vectorial sobre el cuerpo "K", y sean "U" y "V" subespacios de "E". Siendo $U + V = \{x_1 + x_2 \, / \, x_1 \in U \text{ y } x_2 \in B\}$, entonces:

a) $U + V$ es subespacio de "E" ; b) $U + V$ no es subespacio de "E"
c) $U + V$ es subespacio de "E" sólo si "U" y "V" son disjuntos

08) El vector $(5;x;7)$ es CL de $u = (2;1;-2)$ y $v = (1;-1;1)$ si

a) $x = 0$; b) $x = 5$; c) $x = 4$

09) Sean λ_1 y λ_2 dos valores propios distintos asociados a un endomorfismo "f", y sean $L(\lambda_1)$ y $L(\lambda_2)$ sus subespacios propios. Podemos afirmar que:

a) $L(\lambda_1) \cap L(\lambda_2) = \varnothing$; b) $L(\lambda_1) \cap L(\lambda_2) = \{0\}$
c) En general, no se cumplen a) ni b)

10) Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathfrak{R})$ tal que $tr(A) > 0$ y $|A| < 0$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathfrak{R}$ son los valores propios de "A", podría ser:

a) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$; b) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$
c) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

11) Una forma canónica de Jordan semejante a $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ es:

a) $J_B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; b) $J_B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; c) $J_B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

12) Una forma cuadrática real es:

a) Una aplicación entre dos espacios vectoriales cualquiera
b) Una aplicación entre un espacio vectorial y $\mathfrak{R}$
c) Una aplicación entre las matrices simétricas y $\mathfrak{R}$

13) Sea $Q(x)$ una forma cuadrática semidefinida negativa. Al restringirla a un subespacio vectorial puede ser

a) Definida negativa ; b) Indefinida ; c) De cualquier signo

14) Dado el sistema $AX = b$, con "A" matriz regular, se cumple que:

a) Siempre es compatible y determinado
b) Puede ser incompatible
c) Es compatible indeterminado

15) Sea "E" un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathfrak{R}$, $u \in E$ y $f: E \mapsto E$ un endomorfismo.

a) "u" vector propio de "f" $\Rightarrow f(u) = \lambda u, \ \forall \lambda \in \mathfrak{R}$
b) $u = 0 \Rightarrow$ "u" es vector propio de "f"
c) $u \neq 0$ y $\exists \lambda \in \mathfrak{R}$ tal que $f(u) = \lambda u \Rightarrow$ "u" vector propio de "f"

Solución

01) Si "A" es una matriz idempotente ($\Rightarrow A^2 = A$), entonces:

a) $(-A)^2 = (-A) \bullet (-A) = A^2 = A \neq -A \Rightarrow -A$ no es idempotente

b) $(A^t)^2 = A^t \bullet A^t = (A \bullet A)^t = (A^2)^t = A^t \Rightarrow A^t$ es idempotente

c) $(A^{-1})^2 = A^{-1} \bullet A^{-1} = (A \bullet A)^{-1} = (A^2)^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ es idempotente

02)
$$AX(A^{-1}X)^{-1} = X + A - B \Rightarrow AXX^{-1}A = X + A - B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AA = X + A - B \Rightarrow A = X + A - B \Rightarrow 0 = X - B \Rightarrow X = B$$

03) La b) no es cierta.

04) La correcta es la a): sólo en tal caso sucede que $C \bullet C^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

05) La correcta es la a).

06) Como la "suma" es la habitual, es seguro que satisface todas las exigencias que establece la definición del "ente" llamado "espacio vectorial". Veamos en qué caso se satisfacen las exigencias que dicha definición establece para el producto de un número real por un elemento de $\Re^2$, a saber:

1) $1 \bullet \bar{p} = \bar{p},\ \forall\ \bar{p} \in \Re^2$.

2) $\forall\ \alpha, \beta \in \Re, \forall \bar{p} \in \Re^2$ sucede que $(\alpha + \beta) \bullet \bar{p} = (\alpha \bullet \bar{p}) + (\beta \bullet \bar{p})$.

3) $\forall\ \alpha \in \Re, \forall\ \bar{p}, \bar{q} \in \Re^2$ sucede que $\alpha \bullet (\bar{p} + \bar{q}) = (\alpha \bullet \bar{p}) + (\alpha \bullet \bar{q})$.

4) $\forall\ \alpha, \beta \in \Re, \forall\ \bar{p} \in \Re^2$ sucede que $\alpha \bullet (\beta \bullet \bar{p}) = (\alpha.\beta) \bullet \bar{p}$.

a) Si $\alpha \bullet (x;y) = (\alpha^2.x;\alpha.y), \forall\ \alpha \in \Re, \forall\ (x;y) \in \Re^2$, entonces:

* Se satisface 1), pues $1 \bullet (x;y) = (1^2.x;1.y) = (x;y)$
* No se satisface 2):

$$(\alpha + \beta) \bullet (x;y) = ((\alpha + \beta)^2.x;(\alpha + \beta).y) =$$
$$= ((\alpha^2 + \beta^2 + 2.\alpha.\beta).x;\alpha.y + \beta.y) \neq$$
$$\neq \alpha \bullet (x;y) + \beta \bullet (x;y) = (\alpha^2.x;\alpha.y) + (\beta^2.x;\beta.y)$$

b) Si $\alpha \bullet (x;y) = (\alpha.x;y), \forall\ \alpha \in \Re, \forall\ (x;y) \in \Re^2$, entonces:

* Se satisface 1), pues $1 \bullet (x;y) = (1.x;y) = (x;y)$
* No se satisface 2):

$$(\alpha + \beta) \bullet (x;y) = ((\alpha + \beta).x;y) = (\alpha.x + \beta.x;y) \neq$$
$$\neq \alpha \bullet (x;y) + \beta \bullet (x;y) = (\alpha.x;y) + (\beta.x;y)$$

c) Si $\alpha \bullet (x;y) = (x/\alpha;y/\alpha), \forall\ \alpha \in \Re - \{0\}, \forall\ (x;y) \in \Re^2$, entonces:

* Se satisface 1), pues $1 \bullet (x;y) = (x/1;y/1) = (x;y)$
* No se satisface 2):

$$(\alpha+\beta)\bullet(x;y)=((x/(\alpha+\beta);y/(\alpha+\beta))\neq$$
$$\neq\alpha\bullet(x;y)+\beta\bullet(x;y)=(x/\alpha;y/\alpha)+(x/\beta;y/\beta)$$

07) La correcta es la a).

08) El valor de "x" tal que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & x \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}=0.$

09) La correcta es la b): el vector "cero" pertenece a cualquier subespacio.

10) La a) es falsa: si todos los autovalores son negativos, su suma (que coincide con la traza de "A") sería negativa. La b) es falsa: si $\lambda=0$ fuera autovalor, el determinante de "A" (que coincide con el producto de los autovalores) sería 0.

11) La correcta es la a), pues el subespacio $L(\lambda=4)$ tiene dimensión 1.

12) La correcta es la b).

13) La correcta es la a): si en tu pueblo todos son mediobobos, puede ocurrir que en alguna familia todos sean bobos.

14) La correcta es la a): SLNH con matriz de coeficientes regular.

15) La correcta es la c).

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Demuéstrese que dos vectores propios asociados a dos valores propios distintos de una matriz simétrica son ortogonales.

TEORÍA (0'5 PUNTOS CADA UNA)

Conteste las siguientes cuestiones, razonando las respuestas:

1) Todo conjunto que contenga al vector cero, ¿es ligado? Ilústrelo con un ejemplo de un conjunto de dos vectores de $\Re^2$.
2) Sean $x_1, \ldots, x_n$ vectores linealmente independientes de un espacio vectorial. ¿Son LI los vectores $x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, \ldots, x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$?
3) ¿Es siempre diagonalizable la matriz de una forma cuadrática real "Q" en las variables $x_1, \ldots, x_n$?

Solución

1) Si "V" es un espacio vectorial y $W=\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{0}\}\subset V$, la ecuación vectorial

$$\alpha_1\bullet\bar{e}_1+\ldots+\alpha_k\bullet\bar{e}_k+\alpha_{k+1}\bullet\bar{0}=\bar{0}$$

no tiene sólo la solución trivial $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=\alpha_{k+1}=0$ (por ejemplo, es solución de dicha ecuación $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0,\ \alpha_{k+1}=7$); por tanto, "W" es ligado.

2) Como $x_1, \ldots, x_n$ son LI, la ecuación vectorial $\alpha_1 \bullet x_1 + \ldots + \alpha_n \bullet x_n = \bar{0}$ sólo tiene la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Los vectores $x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ serán LI si la ecuación vectorial $\alpha_1 \bullet x_1 + \alpha_2 \bullet (x_1 + x_2) + \ldots + \alpha_n \bullet (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \bar{0}$ sólo tiene la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Veamos:

$$\alpha_1 \bullet x_1 + \alpha_2 \bullet (x_1 + x_2) + \ldots + \alpha_n \bullet (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \bar{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \bullet x_1 + (\alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \bullet x_2 + \ldots + \alpha_n \bullet x_n = \bar{0} \Rightarrow$$
$$\underset{\boxed{\text{pues los vectores } x_1, \ldots, x_n \text{ son LI}}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\boxed{\text{pues } rg(A) = n}}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ son LI}$$

3) La matriz "A" de una forma cuadrática real "Q" siempre es simétrica, por lo que puede garantizarse que "A" siempre es diagonalizable.

TEORÍA (0'5 PUNTOS)

Dada la forma cuadrática real $Q(x) = x^t A x$, indique las ventajas que reporta el conocer una expresión diagonal suya para determinar su signo.

Solución

Conocer una expresión diagonal de "Q" facilita la clasificación de "Q", pues siendo $D = \{d_{ij}\}$ la correspondiente matriz diagonal, entonces:

1) Si $d_{ii} > 0$, la forma cuadrática es definida positiva.
2) Si $d_{ii} < 0$, la forma cuadrática es definida negativa.
3) Si $d_{ii} \geq 0$, la forma cuadrática es semidefinida positiva.
4) Si $d_{ii} \leq 0$, la forma cuadrática es semidefinida negativa.
5) Si en la diagonal principal de "D" hay elementos de signo distinto, la forma cuadrática es indefinida.

EJERCICIO (3 PUNTOS)

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo que respecto de la base canónica de $\Re^3$ tiene asociada la matriz "A":

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Obténganse una base de $\ker.f$ y una base de $\mathrm{Im}.f$ ¿Es "f" un epimorfismo?
2) ¿Es "A" diagonalizable? En caso afirmativo, diagonalícese.
3) Obténganse las expresiones polinómica y canónica de la forma cuadrática asociada a "A". Clasifíquese dicha forma cuadrática y obténgase la matriz de paso ortogonal que permite obtener la expresión canónica.
4) Estúdiese el signo de la forma cuadrática restringida a $z + (y/2) = 0$.