

# EXAMEN SEPTIEMBRE 2002

01) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  no es un subespacio vectorial?

- a)  $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$  ; b)  $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$   
c)  $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}, z = 0\}$

02) Sea  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  un conjunto de vectores libres en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ :

- a) "S" es una base de  $\mathbb{R}^3$  ; b) "S" puede ser o no base de  $\mathbb{R}^3$   
c) Cualquier subconjunto de "S" es base de  $\mathbb{R}^3$

03) En  $\mathbb{R}^3$ , sean los vectores  $u = (1;1;0)^t$  y  $v = (0;-1;0)^t$ , entonces:

- a)  $u \bullet v = 1$  ; b)  $\|u\|^2 = 2$  ; c) "u" y "v" son ortogonales

04) Siendo "A" una matriz idempotente, no puede ocurrir que

- a)  $|A| = 0$  ; b)  $|A| = 1$  ; c)  $|A| = -1$

05) La inversa de la matriz particionada  $A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & B^{-1} \end{bmatrix}$ , es:

- a)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & B \end{bmatrix}$  ; b)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^2 & B \end{bmatrix}$  ; c)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^{-1} & B \end{bmatrix}$

06) Siendo "C" una matriz cuadrada, se verifica:

- a) Si "C" es regular, es ortogonal ; b) Si "C" es ortogonal, es regular  
c) "C" es ortogonal si y sólo si es regular

07) Sea  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  un automorfismo, siendo "A" su matriz asociada en la base canónica de  $\mathbb{R}^n$

- a) Si  $\text{rg}(A) = n \Rightarrow$  "f" no es monomorfismo  
b) Si  $\text{rg}(A) = n \Rightarrow$  "f" es un isomorfismo  
c) Si  $\text{rg}(A) = n \Rightarrow$  "f" no es epimorfismo

08) Sean "A" y "B" matrices cuadradas tales que  $B = C^{-1} \bullet A \bullet C$ , siendo "C" una matriz regular; así:

- a) "B" es simétrica  $\Leftrightarrow$  "A" es simétrica  
b) "A" es simétrica y "C" es ortogonal  $\Rightarrow$  "A" es simétrica  
c) "B" es simétrica  $\Leftrightarrow$  "C" es ortogonal

09) Sea "A" una matriz simétrica de orden 3 con valores propios  $\lambda_1$  (doble) y  $\lambda_2$ . Si el subespacio de vectores propios asociados a  $\lambda_2$  es  $L(\lambda_2) = \langle (1; 1; 0) \rangle$ , ¿cuál de los siguientes vectores puede ser vector propios de  $\lambda_1$ ?:

a)  $(0; -1; 0)$  ; b)  $(-2; 2; 0)$  ; c)  $(0; 0; 0)$

10) Sea "A" una matriz cuadrada con polinomio característico  $P(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + a)$ , siendo "a" un número real no nulo; así, "A" es diagonalizable

a) Siempre ; b) Si  $a < 0$  ; c) Si  $a > 0$

11) Sea  $Q(x) = x^t \cdot A \cdot x$  una forma cuadrática definida negativa; sobre la forma cuadrática  $Q'(x) = x^t \cdot A^2 \cdot x$  podemos decir que es

a)  $Q'$  es definida negativa ; b)  $Q'$  es definida positiva  
c)  $Q'$  es indefinida

12) Sea "A" una matriz simétrica de orden 2; sea "Q" su forma cuadrática asociada

a)  $|A| = 0 \Rightarrow$  "Q" es semidefinida  
b)  $|A| > 0 \Rightarrow$  "Q" es definida positiva  
c)  $|A| < 0 \Rightarrow$  "Q" es definida negativa

13) Indicar qué afirmación se cumple siempre:

a) Todo punto frontera que no sea aislado es de acumulación  
b) Un punto de acumulación es punto interior  
c) Un punto exterior es de acumulación

14) El dominio de definición de  $f(x; y) = \frac{\text{Ln}(x+2)}{\sqrt{y+x^4}}$  es:

a)  $\text{Dom.}f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x > -2, y > -x^4\}$   
b)  $\text{Dom.}f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x > -2, y \geq -x^4\}$   
c)  $\text{Dom.}f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x > -2, y > -x^4\}$

15) Las curvas de nivel de  $f(x; y) = (x - 2) + (y - 2)$  son:

a) Circunferencias centradas en el punto  $(2; 2)$   
b) Rectas de pendiente  $-1$   
c) Parábolas con vértice en el punto  $(2; 2)$

16) Sea  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{(x; y) \rightarrow (a; b)} f(x; y) = 3$ ; así:

a)  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{y \rightarrow b} f_2(y) = 3$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x; b + m \cdot (x - a)) = 3$   
c) "f" es continua en  $(a; b)$

17) Sean  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  y  $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^2$  en "D". ¿Cuál de las siguientes expresiones no es cierta?:

a)  $\frac{\partial(f-g)}{\partial y}(x;y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x;y)$  ; b)  $\frac{\partial(\alpha \bullet f)}{\partial y}(x;y) = \alpha \bullet \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$   
 c)  $\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial y}(x;y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x;y)$

18) Sea  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  una función diferenciable en el punto  $x \in \mathbb{R}^n$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre cierta?

a)  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$  ; b) No se sabe si existe  $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$   
 c) Existe  $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$  pero no sabemos su valor

19) Si la ecuación  $(2 \cdot x + 3 \cdot y)^5 + y = 2$  define implícitamente a "y" como función de "x" en un entorno del punto  $(-1;1)$ , entonces:

a)  $\frac{dy}{dx}(-1) = -\frac{5}{8}$  ; b)  $\frac{dy}{dx}(-1) = 1$  ; c) No existe  $\frac{dy}{dx}(-1)$

20) El desarrollo de Mac-Laurin de orden 1 de  $f(x;y) = e^{x-y+1}$  es:

a)  $f(x;y) = e \cdot (x-y) + T_L$  ; b)  $f(x;y) = e \cdot (1+x-y) + T_L$   
 c)  $f(x;y) = e + T_L$

21) Sea  $z = \text{Ln}(u^2 + v^2)$ , donde  $u = x \cdot \text{sen } y$ ,  $v = y \cdot \text{cos } x$ ; es:

a)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 \cdot (u \cdot \text{sen } y - v \cdot y \cdot \text{sen } x)}{u^2 + v^2}$  ; b)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 \cdot (u \cdot \text{sen } y - v \cdot \text{sen } x)}{u^2 + v^2}$   
 c)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 \cdot (\text{sen } y - \text{sen } x)}{u^2 + v^2}$

22) Si la serie  $\sum a_n$  es convergente, la serie  $\sum (a_n^2 + 3)^n$  es:

a) Es convergente ; b) Es divergente  
 c) Puede ser convergente o divergente

23) Sea  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  homogénea de grado 2 y  $g(x;y) = \frac{\partial f / \partial x}{x+y}$ :

a) "g" es homogénea de grado 0 ; b) "g" no es homogénea  
 c) "g" es homogénea de grado 1

24) Sea  $f(x)$  una función continua  $\forall x \in \mathbb{R}$  y  $F(x) = \int_x^{2 \cdot x} f(t) \cdot dt$ , es:

a)  $F'(x) = 2 \cdot f(2 \cdot x) - f(x)$  ; b)  $F'(x) = f(2 \cdot x) - f(x)$  ; c)  $F'(x) = f(2 \cdot x)$

# Solución

- 01) La correcta es la b).
- 02) La correcta es la a): como  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , cualesquiera tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  que sean LI forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .
- 03) La correcta es la b).
- 04) No puede ocurrir que  $|A| = -1$ :

$$\text{"A" idempotente} \Rightarrow A^2 = A \Rightarrow |A^2| = |A| \Rightarrow |A|^2 = |A| \Rightarrow |A| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

- 05) La correcta es la b), pues sólo en tal caso sucede que  $A \cdot A^{-1} = I$ .
- 06) La correcta es la b), el determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1.
- 07) La correcta es la b).
- 08) La correcta es la b), pues  $B^t = B$ :

$$B^t = (C^{-1} \cdot A \cdot C)^t = C^t \cdot A^t \cdot (C^{-1})^t = C^{-1} \cdot A \cdot C = B$$

<p>* Si "A" es simétrica <math>\Rightarrow A^t = A</math></p> <p>* Si "C" es ortogonal <math>\Rightarrow C^t = C^{-1}</math> y <math>(C^{-1})^t = (C^t)^t = C</math></p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

- 09) La correcta es la b), pues el vector  $(-2; 2; 0)$  es ortogonal al  $(1; 1; 0)$ .
- 10) La correcta es la b), pues en tal caso los autovalores son reales y distintos.
- 11) La correcta es la b), pues si  $\lambda$  es autovalor de "A" entonces  $\lambda^2$  lo es de  $A^2$ ; así, siendo  $\lambda < 0$  (pues "A" es definida negativa), es  $\lambda^2 > 0$ , por lo que todos los autovalores de  $A^2$  son positivos.
- 12) La correcta es la a); la forma cuadrática será semidefinida positiva o semidefinida negativa según que el elemento  $a_{11}$  de la matriz "A" sea positivo o negativo.
- 13) La correcta es la a).
- 14) La correcta es la b).
- 15) La correcta es la b).
- 16) La correcta es la b): si "f" tiene límite 3 en el punto  $(a; b)$ , el límite de "f" en dicho punto según cualquier trayectoria de aproximación a él también es 3.
- 17) La correcta es la c).
- 18) La correcta es la a): "f" diferenciable en el punto "x"  $\Rightarrow$  "f" es continua en "x" (es decir, "f" tiene límite en "x" y coincide con  $f(x)$ ).

19) Siendo  $F(x, y) = (2x + 3y)^5 + y - 2$ , si la ecuación  $F(x, y) = 0$  define implícitamente a "y" como función de "x" en un entorno del punto  $(-1; 1)$ , es:

$$\frac{dy}{dx}(-1) = -\frac{F_x(-1; 1)}{F_y(-1; 1)} = -\left(\frac{10 \cdot (2x + 3y)^4}{15 \cdot (2x + 3y)^4 + 1}\right)_{(-1; 1)} = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$$

20) La correcta es la b).

21) La correcta es la ), regla de la cadena.

22)  $\lim. \sqrt[n]{(a_n^2 + 3)^n} = \lim. (a_n^2 + 3) = 0 + 3 = 3 > 1 \Rightarrow$  divergente.

23) La correcta es la a), pues el numerador y el denominador son homogéneos de grado 1.

24) La correcta es la a).

## **TEORÍA (1'5 PUNTOS)**

Enuncie y demuestre el teorema fundamental de la diagonalización.

## **TEORÍA (1'5 PUNTOS)**

Analice la homogeneidad de la función  $F(x)$  si viene definida por el determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & k(x) \end{vmatrix}$$

siendo homogéneas de grado 2 las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  y  $k(x)$ .

### **Solución**

Siendo  $F(x) = f(x) \cdot k(x) - g(x) \cdot h(x)$ , es

$$F(\lambda \cdot x) = f(\lambda \cdot x) \cdot k(\lambda \cdot x) - g(\lambda \cdot x) \cdot h(\lambda \cdot x) =$$

Como las funciones "f", "g", "h" y "k" son homogéneas de grado 2, es:  
 $f(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot f(x)$ ;  $g(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot g(x)$ ;  $h(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot h(x)$ ;  $k(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot k(x)$

$$= \lambda^4 \cdot f(x) \cdot k(x) - \lambda^4 \cdot g(x) \cdot h(x) = \lambda^4 \cdot (f(x) \cdot k(x) - g(x) \cdot h(x)) = \lambda^4 \cdot F(x)$$

En consecuencia, la función "F" es homogénea de grado 4.

## **EJERCICIO (2 PUNTOS: 0'5+0'5+0'5+0'5)**

Sea la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  tal que  $f(x; y; z) = (2.x + y; x + y + z; y + 2.z)$ .

- 1) Calcule su núcleo y su imagen. ¿Es un isomorfismo?
- 2) Obtenga la matriz asociada a la aplicación lineal y calcule las expresiones matricial, polinómica y canónica de la forma cuadrática "Q" asociada a dicha matriz.
- 3) Obtenga la matriz ortogonal de cambio de base asociada a la forma cuadrática del apartado anterior.
- 4) Clasifique la forma cuadrática "Q" en el subespacio  $y = z$ .

### **Solución**

- 1) El núcleo de "f" lo forman los vectores  $(x; y; z)$  tales que

$$f(x; y; z) = (2.x + y; x + y + z; y + 2.z) = (0; 0; 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 2.z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2.z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ker.} f = \{(a; -2.a; a), \forall a \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1; -2; 1), \forall a \in \mathbb{R}\}$$

Como  $\text{Ker.} f \neq \bar{0} \Rightarrow$  "f" no es inyectiva  $\Rightarrow$  no es biyectiva (o sea, no es isomorfismo)

- La imagen de "f" la forman los vectores  $(\alpha; \beta; \gamma)$  tales que

$$f(x; y; z) = (2.x + y; x + y + z; y + 2.z) = (\alpha; \beta; \gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.x + y = \alpha \\ x + y + z = \beta \\ y + 2.z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta + \gamma = 0$$

La matriz de coeficientes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  tiene rango 2; así, el sistema

tiene solución si la matriz ampliada  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 2 & \gamma \end{bmatrix}$  también tiene rango 2,

$$\text{lo que sucede si } \begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha - \beta + \gamma = 0$$

- 2) La matriz asociada a "f" es  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

- La expresión matricial de la forma cuadrática  $Q: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  que tiene a la matriz "A" como asociada respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  es

$$Q(\bar{p}) = (x; y; z) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (I)$$

siendo  $(x; y; z)$  las coordenadas del vector  $\bar{p} \in \mathfrak{R}^3$  respecto de dicha base.

- Expresión polinómica de "Q":  $Q(\bar{p}) = 2 \cdot x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot z$
- Autovalores de "A":

$$|A - \lambda \cdot I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 5 \cdot \lambda^2 - 6 \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 & \text{(simple)} \\ 2 & \text{(simple)} \\ 3 & \text{(simple)} \end{cases}$$

- La expresión canónica de "Q" es:

$$Q(\bar{p}) = (x^*; y^*; z^*) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = 0 \cdot (x^*)^2 + 2 \cdot (y^*)^2 + 3 \cdot (z^*)^2$$

- 3) Autovectores de  $\lambda = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A-0 \cdot I} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2 \cdot z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 0) = \{(a; -2 \cdot a; a), \forall a \in \mathfrak{R}\} = \{a \cdot (1; -2; 1), \forall a \in \mathfrak{R}\}$$

El vector  $\bar{h}_1 = (1; -2; 1)$  es una base de  $L(\lambda = 0)$ , y una base ortonormal de  $L(\lambda = 0)$  es la que forma el vector  $\bar{w}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| = (1/\sqrt{6}; -2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6})$ .

- Autovectores de  $\lambda = 2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A-2 \cdot I} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(-a; 0; a), \forall a \in \mathfrak{R}\} = \{a \cdot (-1; 0; 1), \forall a \in \mathfrak{R}\}$$

El vector  $\bar{h}_2 = (-1; 0; 1)$  es una base de  $L(\lambda = 2)$ , y una base ortonormal de  $L(\lambda = 2)$  es la que forma el vector  $\bar{w}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| = (-1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2})$ .

- Autovectores de  $\lambda = 3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A-3 \cdot I} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 3) = \{(a; a; a), \forall a \in \mathfrak{R}\} = \{a \cdot (1; 1; 1), \forall a \in \mathfrak{R}\}$$

El vector  $\bar{h}_3 = (1;1;1)$  es una base de  $L(\lambda = 3)$ , y una base ortonormal de  $L(\lambda = 3)$  es la que forma el vector  $\bar{w}_3 = \bar{h}_3 / \|\bar{h}_3\| = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$ .

• Matriz de paso ortogonal:

$$C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 \end{matrix}$

4) Si  $y = z$ , es:

$$Q(\bar{p}) = 2 \cdot x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot z =$$

$$\boxed{\text{si } y = z} \rightarrow$$

$$= 2 \cdot x^2 + z^2 + 2 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot z^2 =$$

$$= 2 \cdot x^2 + 5 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot z = \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{definida positiva, pues } H_1 = 2 > 0 \text{ y } H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

## **EJERCICIO (1 PUNTO: 0'5+0'5)**

Analice el carácter de las siguientes expresiones para los distintos valores del parámetro "k":

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{k}{2}\right)^n ; 2) \int_{-\infty}^0 e^{k \cdot x} \cdot dx$$

### **Solución**

1) Es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{k}{2}\right)^n = \left(2 + \frac{k}{2}\right) + \left(2 + \frac{k}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{k}{2}\right)^3 + \dots$$

O sea, estamos ante una serie geométrica cuya razón es  $2 + (k/2)$ ; así, la serie es convergente sólo si el valor absoluto de la razón es inferior a 1:

$$|2 + (k/2)| < 1 \Rightarrow -1 < 2 + (k/2) < 1 \Rightarrow -2 < 4 + k < 2 \Rightarrow -6 < k < -2$$

2) Es:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{k \cdot x} \cdot dx &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^0 e^{k \cdot x} \cdot dx = \frac{1}{k} \cdot \left( \lim_{z \rightarrow -\infty} (e^{k \cdot x})_z^0 \right) = \\ &= \frac{1}{k} \cdot \left( \lim_{z \rightarrow -\infty} (1 - e^{k \cdot z}) \right) = \begin{cases} 1/k & \text{si } k > 0 \\ +\infty & \text{si } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$