EXAMEN JUNIO 2002

01) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\Re^3$ es un subespacio vectorial?

$$\text{a) } \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \;/\; 2.x + y = z\right\} \;;\; \text{b) } \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \;/\; x = y,\; x = 2\right\}$$
$$\text{c) } \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \;/\; x,y,z \text{ son números enteros}\right\}$$

02) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las bases:

a) Tienen el mismo número de elementos
b) Pueden tener el mismo número de elementos
c) No podemos saber cuántos elementos tienen

03) ¿Cuál de los siguientes vectores es ortogonal a $(2;0;-1)^t$?

$$\text{a) } (0;1;1)^t \;;\; \text{b) } (1;2;2)^t \;;\; \text{c) } (1;0;0)^t$$

04) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 3$; es:

$$\text{a) } |2A| = 6 \;;\; \text{b) } |2A| = 12 \;;\; \text{c) } |2A| = 3$$

05) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 2$ y $tr(A) = 3$:

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable
c) No podemos saber si "A" es no diagonalizable

06) Si "A" esa una matriz con autovalores $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$, los autovalores de A^3 son

$$\text{a) } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_3 = -1 \;;\; \text{b) } \lambda_1 = 8, \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_3 = -1$$
$$\text{c) } \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3 \text{ y } \lambda_3 = -3$$

07) Sea la matriz particionada $B = \begin{bmatrix} A & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$, "A" idempotente y ortogonal:

$$\text{a) } B^{-1} = \begin{bmatrix} A^t & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \;;\; \text{b) } B^{-1} = \begin{bmatrix} A & -A \\ A^t & 0 \end{bmatrix} \;;\; \text{c) } B^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A^t & -I \end{bmatrix}$$

08) Si la forma cuadrática $Q(x) = x^t A x$ restringida a $Bx = 0$ es definida positiva, podemos asegurar que, sin restringir:

a) Es definida positiva ; b) No es definida negativa
c) No es indefinida

09) Si "A" y "B" son matrices semejantes y $tr(A) = n$, entonces:

a) $tr(A - B) = 0$; b) $tr(A - B) = n$; c) $tr(A - B) = n^2$

10) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re^3$ una aplicación con matriz asociada "A" de rango 2:

a) "f" es un epimorfismo ; b) "f" es un monomorfismo
c) "f" es un isomorfismo

11) Sean "A", "B" y "C" matrices cuadradas del mismo orden, siendo "A" regular y simétrica. Si $(AC)^t = B^t A + A$, es:

a) $C = B$; b) $C = A^{-1}B$; c) $C = B + I$

12) Sea la forma cuadrática $Q(x;y;z) = a.x^2 + b.y^2 + c.z^2$

a) Es definida positiva $\Leftrightarrow a < 0$ y $b < 0$
b) Si "a" y "b" tienen distinto signo $\Rightarrow$ es indefinida
c) Es semidefinida negativa $\Leftrightarrow a \leq 0$ ó $b \leq 0$

13) Indicar qué afirmación se cumple siempre:

a) El complementario de un abierto es un abierto
b) La intersección finita de abiertos es un abierto
c) La unión finita de abiertos es un cerrado

14) El dominio de definición de $f(x;y) = \frac{x}{y} + \text{Ln } y + \sqrt{\frac{x^2}{y}}$ es:

a) $\text{Dom.}f = \left\{(x;y) \in \Re^2 \;/\; y > 0\right\}$
b) $\text{Dom.}f = \left\{(x;y) \in \Re^2 \;/\; x > 0,\, y > 0\right\}$
c) $\text{Dom.}f = \left\{(x;y) \in \Re^2 \;/\; x \geq 0,\, y \geq 0\right\}$

15) Las curvas de nivel de $f(x;y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$ son:

a) Circunferencias centradas en el punto (1;2)
b) Rectas que pasan por el punto (1;4)
c) Parábolas con vértice en el punto (1;2)

16) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ continua en el punto $(a;b)$ y tal que $f(a;b) = 2$; entonces, en el punto $(a;b)$

a) Los límites reiterados existen y valen 2
b) No sabemos si existen los límites direccionales por rectas
c) $\lim\limits_{\substack{(x;y)\to(a;b) \\ y=b+(x-a)^2}} f(x;y) = 2$

17) Si $f:\Re^2 \mapsto \Re$ es tal que $D_{(1;0)}f(a;b) = 2$ y $D_{(0;1)}f(a;b) = 3$, su vector gradiente en el punto $(a;b)$ es:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \;;\; \text{b) } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) Para conocer el gradiente debemos saber si "f" es diferenciable

18) Sea $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$, siempre es cierto que

a) Si "f" es diferenciable en $(0;0)$ existen las derivadas parciales de "f" en $(0;0)$ y son continuas.
b) Si "f" es diferenciable en $(0;0)$ existen las derivadas parciales de "f" en $(0;0)$ pero no son necesariamente continuas en $(0;0)$.
c) Si "f" es diferenciable en $(0;0)$ existen las derivadas parciales de "f" en todo punto de $\Re^2$.

19) Si la ecuación $x.\cos(\pi/y) = 0$ define implícitamente a "y" como función de "x" en un entorno de un punto $(a;b)$, en dicho entorno:

$$\text{a) } \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x.\pi.\operatorname{tg}(\pi/y)} \;;\; \text{b) } \frac{dy}{dx} = -\frac{x.\operatorname{tg}(\pi/y)}{y^2} \;;\; \text{c) } \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2.\cos(\pi/y)}{x.\operatorname{sen}(\pi/y)}$$

20) El desarrollo de Mac-Laurin de orden 2 de $f(x;y) = \cos(x+y)$ es:

$$\text{a) } f(x;y) = -(x^2+y^2) + T_L \;;\; \text{b) } f(x;y) = 1-(x+y)^2/2 + T_L$$
$$\text{c) } f(x;y) = 1 + x + y + T_L$$

21) Sea $f(x;y)$ una función en la que las variables "x" e "y" dependen de la variable independiente "t" mediante las relaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$; es:

$$\text{a) } \frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \;;\; \text{b) } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$
$$\text{c) } \frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right).\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}$$

22) La serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; así:

a) Es convergente ; b) Es divergente
c) Puede ser convergente o divergente

23) Los rendimientos de escala de $f(K;L) = (\pi.K^2 + L^2)^{1/2}$ son:

a) Constantes ; b) Crecientes ; c) Decrecientes

24) El valor de $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ es: a) 2 ; b) 3/2 ; c) $\sqrt{\pi}$

Solución

01) La correcta es la a).

02) La correcta es la a).

03) La correcta es la b): producto escalar nulo.

04) La correcta es la b): $|k \bullet A| = k^n . |A|$.

05) La correcta es la a), pues los autovalores son distintos:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = 3 \\ \lambda_1 . \lambda_2 = |A| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{un autovalor es 2 y el otro es 1}$$

06) La correcta es la b): si λ es autovalor de "A" $\Rightarrow \lambda^k$ es autovalor de A^k.

07) La correcta es la c): sólo en ese caso sucede que $B \bullet B^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

08) La correcta es la b): si en tu casa todos son listos, en tu pueblo no son todos tontos.

09) La correcta es la a): si "A" y "B" son matrices semejantes tienen igual traza; así:

$$tr(A - B) = tr(A) - tr(B) = n - n = 0$$

10) La correcta es la b), pues $rg(A) = \dim.(\text{Espacio Inicial})$.

11) Si "A" es regular (o sea, existe A^{-1}) y simétrica (o sea, $A^t = A$):

$$(AC)^t = B^t A + A \Rightarrow C^t A^t = B^t A + A \Rightarrow C^t A = B^t A + A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C^t = (B^t A + A)A^{-1} = B^t A A^{-1} + A A^{-1} = B^t + I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = B + I$$

12) La correcta es la b).

13) La correcta es la b), famosa propiedad.

14) La correcta es la a).

15) La correcta es la a).

16) La correcta es la c).

17) La correcta es la a): $D_{(1;0)} f(a;b) = 2 = f_x(a;b)$ y $D_{(0;1)} f(a;b) = 3 = f_y(a;b)$

18) La correcta es la b).

19) Siendo $F(x;y) = x.\cos(\pi/y)$, si la ecuación $F(x;y) = 0$ define implícitamente a "y" como función de "x" en un entorno de un punto $(a;b)$, es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y^2.\cos(\pi/y)}{x.\pi.\text{sen}(\pi/y)} = -\frac{y^2}{x.\pi.\text{tg}(\pi/y)}$$

20)
$$f(x;y)=f(0;0)+\nabla f(0;0)\bullet\begin{bmatrix}x-0\\y-0\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\bullet\begin{bmatrix}x-0 & y-0\end{bmatrix}\bullet Hf(0;0)\bullet\begin{bmatrix}x-0\\y-0\end{bmatrix}+T_L=1-(x+y)^2/2+T_L$$

$$\boxed{f(0;0)=1\ ;\ \nabla f(0;0)=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\ ;\ Hf(0;0)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix}}$$

21) La correcta es la b), regla de la cadena.

22) La correcta es la c): el que una STP cumpla la CN de convergencia no garantiza que la serie sea convergente.

23) La correcta es la a), pues "f" es homogénea de grado 1.

24) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\int_0^1 x^0.(1-x)^{-1/2}.dx=\beta(1;\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(1).\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)}=2$

TEORÍA (1 PUNTO)

Demuestre que dos matrices semejantes tienen igual polinomio característico.

TEORÍA (0'5 PUNTOS)

Demuestre que la traza de una matriz antisimétrica es nula.

Solución

Si $A_{n\times n}$ es antisimétrica $\Rightarrow a_{ij}=-a_{ji}\Rightarrow a_{ii}=0\Rightarrow tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=0$

TEORÍA (1 PUNTO)

Enuncie y demuestre la ley de recurrencia de la función gamma.

TEORÍA (0'5 PUNTOS)

Calcule $f_y(x;y)$ si $f:\Re^2\mapsto\Re$ es una función que admite derivadas direccionales según cualquier dirección en todo punto de $\Re^2$ y tal que

$$f(x;y+z)=f(x;y)+z,\ \forall(x;y)\in\Re^2,\ \forall z\in\Re$$

Solución

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x;y+k)-f(x;y)}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{(f(x;y)+k)-f(x;y)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{k}=1$$

es $f(x;y+k)=f(x;y)+k$, pues dicen que
$f(x;y+Pepe)=f(x;y)+Pepe$

EJERCICIO (2 PUNTOS: 0'25+1+0'5+0'25)

Sea la aplicación lineal definida por $f(x;y;z) = (2.x + y; x + 2.y; z)$.

1) ¿Es un isomorfismo? Razone la respuesta.
2) Calcule la matriz asociada al automorfismo "f" en la base canónica de $\Re^3$ y construya la expresión matricial, polinómica y canónica de la forma cuadrática asociada a dicha matriz.
3) Obtenga la matriz ortogonal de cambio de base asociada a la forma cuadrática del apartado anterior.
4) Clasifique la forma cuadrática.

Solución

- Como todo el mundo sabe, siendo "U" y "V" espacios vectoriales, la aplicación lineal $f: U \mapsto V$ es isomofismo (o sea, biyectiva) si es monomorfismo (o sea, inyectiva; es decir, sucede que $f(\overline{p}) \neq f(\overline{q})$ si $\overline{p} \neq \overline{q}$) y epimorfismo (o sea, sobreyectiva; es decir, sucede que $\mathrm{Im g.}\ f = V$).

  Considerando, como se indica en 2), que $U = V = \Re^3$ y que la base de referencia en $\Re^3$ es la canónica, la matriz asociada a "f" respecto de dicha base es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  La aplicación lineal "f" es inyectiva, pues el rango de "A" (es 3) coincide con la dimensión del espacio "inicial", y "f" también es sobreyectiva, pues el rango de "A" coincide con la dimensión del espacio "final".

- La expresión matricial de la forma cuadrática $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ que tiene a la matriz "A" como asociada respecto de la base canónica de $\Re^3$ es

$$Q(\overline{p}) = (x; y; z) \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

  siendo $(x; y; z)$ las coordenadas del vector $\overline{p} \in \Re^3$ respecto de dicha base.

- La expresión polinómica de "Q" respecto de la base canónica es

$$Q(\overline{p}) = 2.x^2 + 2.y^2 + 2.x.y + z^2$$

- Calculemos los autovalores de "A": son las soluciones de $|A - \lambda \bullet I| = 0$, que es la ecuación característica de "A":

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 5.\lambda^2 - 7.\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \text{ (simple)} \\ \lambda = 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con Tr(A) y su producto coincide con $|A|$ .... así podrás detectar errores de cálculo.

Como los autovalores de "A" son positivos, la forma cuadrática "Q" es definida positiva; $Q(\bar{p}) > 0,\ \forall \bar{p} \in \Re^3, \bar{p} \neq \bar{0}$.

Debemos determinar una base B* del espacio vectorial $\Re^3$ tal que la matriz asociada a "Q" respecto de dicha base sea diagonal. La base B* es una base ortonormal de $\Re^3$ formada por autovectores de la matriz "A", y para "construir" B* cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su correspondiente subespacio de autovectores.

- ***Autovectores de λ = 1***

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \bar{p} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 1 indicado es no nulo, eliminamos las ecuaciones segunda y tercera y parametrizamos "y" y "z"; resulta $x = -y$; por tanto:

$$L(\lambda = 1) = \{(-a\,;a\,;b),\ \forall a, b \in \Re\} =$$
$$= \{a \bullet (-1\,;1\,;0) + b \bullet (0\,;0\,;1),\ \forall a, b \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1 = (-1\,;1\,;0)$ y $\bar{h}_2 = (0\,;0\,;1)$ son una base del subespacio de autovectores asociados a $\lambda = 1$, ... y nos toca la lotería, pues, de puro churro, esta base es ortogonal; así, los vectores $\bar{w}_1 = \bar{h}_1/\|\bar{h}_1\| = (-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)$ y $\bar{w}_2 = \bar{h}_2/\|\bar{h}_2\| = (0;0;1)$ forman una base ortonormal del subespacio.

- ***Autovectores de λ = 3***

$$(A - 3 \bullet I) \bullet \bar{p} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos "x"; resulta:

$$\left.\begin{matrix} -y = -x \\ -2.z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y = x \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 3) = \{(c;c;0),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (1;1;0),\ \forall c \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (1;1;0)$ es una base del subespacio, y una base ortonormal es la que forma el vector $\bar{w}_3 = \bar{h}_3/\|\bar{h}_3\| = (1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)$.

• *Diagonalización de la forma cuadrática*

Como se ha indicado, para construir una base $B*$ de $\Re^3$ que diagonalice a "Q" cada autovalor aporta una base ortonormal de su subespacio de autovectores; así, el autovalor $\lambda = 1$ aporta los vectores $\overline{w}_1$ y $\overline{w}_2$, y el autovalor $\lambda = 3$ aporta el vector $\overline{w}_3$. En definitiva, es $B* = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$. Si tomamos $B*$ como nueva base de referencia, se modifican las coordenadas de $\overline{p}$; como la matriz "C" asociada al cambio de la base canónica a la $B*$ es:

$$C = \begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 \end{array} \end{array}$$

"C" es ortogonal; es decir: $C^t = C^{-1}$

entonces, si $\overline{p}$ tiene coordenadas $(x*; y*; z*)$ respecto de la base $B*$, es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x* \\ y* \\ z* \end{bmatrix} \quad (II)$$

Sustituyendo (II) en la expresión de "Q" respecto de la base canónica (o sea, en (I)), obtenemos la expresión de "Q" respecto de la base $B*$; resulta:

$$Q(\overline{p}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x* \\ y* \\ z* \end{bmatrix} \right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} x* \\ y* \\ z* \end{bmatrix} \right) =$$

$$= (x*; y*; z*) \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^{C^t \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x* \\ y* \\ z* \end{bmatrix} = (x*)^2 + (y*)^2 + 2.(z*)^2$$

que es la expresión canónica de la forma cuadrática "Q".

EJERCICIO (0'5 PUNTOS)

Analice, para los distintos valores del parámetro α, la siguiente expresión:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{\alpha}}$$

Solución

La integral dada es impropia de primera especie, pues el intervalo de integración tiene amplitud infinita. Para todo valor de α sucede que $f(x)=1/(x+1)^{\alpha}$ es continua $\forall\, x \geq 0$; por tanto, "f" es integrable en el intervalo $[0;M]$, siendo:

$$\int_0^{+\infty} dx/(x+1)^{\alpha} = \lim_{M\to +\infty} \int_0^{M} dx/(x+1)^{\alpha} =$$

$\boxed{\text{si } \alpha = 1}$

$$= \lim_{M\to +\infty} \left(\operatorname{Ln}|x+1|\right)_{x=0}^{x=M} = \lim_{M\to +\infty} \left(\operatorname{Ln}|M+1| - \operatorname{Ln}|1|\right) = +\infty$$

$\boxed{\text{si } \alpha \neq 1}$

$$= \lim_{M\to +\infty} \left(\frac{(x+1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)_{x=0}^{x=M} = \frac{\lim\limits_{M\to +\infty} \left((M+1)^{-\alpha+1} - 1^{-\alpha+1}\right)}{-\alpha+1} = \begin{cases} = +\infty & \boxed{\text{si } -\alpha+1>0} \\[2mm] = \dfrac{1}{\alpha-1} & \boxed{\text{si } -\alpha+1<0} \end{cases}$$

$$\boxed{(+\infty)^{\text{positivo}} = +\infty \quad ; \quad (+\infty)^{\text{negativo}} = \frac{1}{(+\infty)^{\text{positivo}}} = \frac{1}{+\infty} = 0}$$

Así, la integral converge si $-\alpha+1<0 \ (\Rightarrow \alpha>1)$ y diverge si $-\alpha+1 \geq 0 \ (\Rightarrow \alpha \leq 1)$

EJERCICIO (0'5 PUNTOS)

Analice, para los distintos valores del parámetro α, la siguiente expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2.n+1}\right)^{n}.\alpha^{n}$$

Solución

Caso $\alpha > 0$: para todo valor natural de "n" sucede que $(n/(2.n+1))^{n} > 0$, y si $\alpha > 0$ también es $\alpha^{n} > 0$ para todo "n". Por tanto, si $\alpha > 0$, estamos ante una serie de términos positivos .... y la serie pide a gritos el criterio de Cauchy (una serie de términos positivos $\Sigma\, a_{n}$ tal que $\lim.\sqrt[n]{a_{n}} = L$ es convergente si $L < 1$ y divergente si $L > 1$):

$$\lim.\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2.n+1}\right)^{n}.\alpha^{n}} = \lim.\left(\frac{n}{2.n+1}\right).\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

Así, siendo $L = \alpha/2$, sucede que $L < 1$ (serie convergente) si $\alpha < 2$, y sucede que $L > 1$ (serie divergente) si $\alpha > 2$.

Si $\alpha = 2$ la serie se convierte en

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2.n+1}\right)^{n}.2^{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2.n}{2.n+1}\right)^{n}$$

que es divergente, pues no cumple la condición necesaria de convergencia:

$$\lim.\left(\frac{2.n}{2.n+1}\right)^{n} = (1)^{\infty} = e^{\lim.\ n.\left(\frac{2.n}{2.n+1}-1\right)} = e^{\lim.\ -\frac{n}{2.n+1}} = e^{-1/2} \neq 0$$

Caso $\alpha < 0$: si $\alpha < 0$ la serie es "alternada", pues el signo de α^{n} es positivo o negativo según que "n" sea par o impar.

EJERCICIO (1 PUNTO: 0'5+0'5)

Dada la expresión $F(x;y;z) = e^{z.y} + z.\text{Ln } x + \dfrac{(y-x).z}{2} + 2.x - 2 = 0$

1) Si esta ecuación define implícitamente a la variable "z" como función de "x" e "y", compruebe que se verifican las condiciones del teorema de existencia de la función implícita en un entorno del punto $(x;y;z) = (1;0;2)$.
2) Calcule el gradiente de $z = \varphi(x;y)$ en el punto $(x;y) = (1;0)$.

Solución

1) Como

   $*$ El punto $(1;0;2)$ satisface la ecuación $F(x;y;z) = 0$

   $*$ La función "F" es de clase C^1 en el punto $(1;0;2)$

   $*$ $F_z(1;0;2) = \left(y.e^{z.y} + (\text{Ln } x) + \dfrac{y-x}{2}\right)_{(1;0;2)} = -\dfrac{1}{2} \neq 0$

   la ecuación $F(x;y;z) = 0$ define implícitamente a la variable "z" como función de "x" e "y" $(z = \varphi(x;y))$ en un entorno del punto $(1;0;2)$.

2) Al derivar respecto de "x" los dos miembros de $F(x;y;z) = 0$, resulta:

$$F_x + F_z.z_x = 0 \Rightarrow z_x = -F_x/F_z = -\frac{\dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{2} + 2}{y.e^{z.y} + (\text{Ln } x) + \dfrac{y-x}{2}} \Rightarrow z_x(1;0) = 10$$

   Al derivar respecto de "y" los dos miembros de $F(x;y;z) = 0$, resulta:

$$F_y + F_z.z_y = 0 \Rightarrow z_y = -F_y/F_z = -\frac{z.e^{z.y} + \dfrac{z}{2}}{y.e^{z.y} + (\text{Ln } x) + \dfrac{y-x}{2}} \Rightarrow z_y(1;0) = 6$$

   En consecuencia: $\nabla\varphi(1;0) = (10;6)$.