MATEMÁTICAS PARA LA EMPRESA
LICENCIATURA EN ADE+DERECHO
EXAMEN 28/01/02

01) Es cierto que

$$\text{a) } (x+y;z;z)^t = (x;y;z)^t + (y;y;z)^t$$
$$\text{b) } (x+y;y;z)^t = (x;0;0)^t + (y;y;z)^t$$
$$\text{c) } (x+y;y;z)^t = (y;0;z)^t + (y;y;z)^t$$

02) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es subespacio de $\Re^3$?

$$\text{a) } A = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \;/\; x+y+2.z=0\right\}$$
$$\text{b) } B = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \;/\; x,y,z \text{ son números naturales}\right\}$$
$$\text{c) } C = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \;/\; x+z=0,\; y=1\right\}$$

03) Si los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son linealmente independientes, ¿cuál de los siguientes conjuntos es libre?:

$$\text{a) } \left\{\overline{0}, \overline{u}, \overline{v}\right\} \;;\; \text{b) } \left\{\overline{u}+\overline{v}, \overline{u}-\overline{v}\right\} \;;\; \text{c) } \left\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{u}+\overline{v}\right\}$$

04) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es base de $\Re^3$?

$$\text{a) } \left\{(1;1;1)^t, (0;-1;1)^t\right\} \;;\; \text{b) } \left\{(1;0;1)^t, (-1;0;-2)^t, (2;0;1)^t\right\}$$
$$\text{c) } \left\{(1;1;0)^t, (-1;0;0)^t, (-1;0;1)^t\right\}$$

05) ¿En qué caso los vectores son ortogonales?

$$\text{a) } \left\{(1;-1;1)^t, (0;-2;2)^t\right\} \;;\; \text{b) } \left\{(1;-1;2)^t, (-1;-1;0)^t\right\}$$
$$\text{c) } \left\{(1;-1;1)^t, (2;-2;2)^t\right\}$$

06) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden y B es regular, entonces, si $A \bullet B = 0$, es:

$$\text{a) } |A| \neq 0 \;;\; \text{b) } |A| = 0 \;;\; \text{c) } B = 0$$

07) Al despejar C en $(C \bullet A)^{-1} = A^{-1} \bullet A \bullet B$ se obtiene:

$$\text{a) } C = B \bullet A \;;\; \text{b) } C = B^{-1} \bullet A^{-1} \;;\; \text{c) } C = (B \bullet A)^{-1}$$

08) Si A es una matriz cuadrada de orden "n" y $|A| = 3$, es:

$$\text{a) } |\text{Adj.}(A)| = 3 \;;\; \text{b) } |\text{Adj.}(A)| = 3^n \;;\; \text{c) } |\text{Adj.}(A)| = 3^{n-1}$$

09) Sea $A \in M_{2\times 2}(\Re)$ tal que $P(\lambda) = \lambda^2 + 9$, entonces:

a) "A" no es simétrica ; b) "A" es simétrica ; c) "A" no es regular

10) Dada la matriz particionada $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & A^t \end{bmatrix}$, siendo ortogonal A, es:

a) $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^t & 0 \\ -I & A \end{bmatrix}$; b) $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^t & I \\ 0 & A \end{bmatrix}$; c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} A & -A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$

11) Si A es una matriz ortogonal, puede ser cierto que:

a) $|A| = 0$; b) $|A| = 1$; c) $|A| = 2$

12) Sea $A \in M_{2\times 2}(\Re)$ una matriz cuyos autovalores son no negativos y tal que $|A| = 0$ y $Tr(A) = 5$; así:

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable
c) No se puede saber si "A" es diagonalizable

13) Sea "Q" una forma cuadrática definida positiva, al restringirla al subespacio "V" es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida positiva ; c) Indefinida

14) Siendo $(1;2;0)$ autovector de $\lambda = 1$:

a) el autovector es único ; b) $(1;3;0)$ es autovector de $\lambda = 1$
c) $(2;4;0)$ es autovector de $\lambda = 1$

15) Siendo "a" un número natural cualquiera, al restringir la forma cuadrática $Q(x;y;z) = x^2 + y^2 + 2.a.x.z + 4.a.y.z + z^2$ al subespacio $z = 0$ es:

a) Definida positiva ; b) Definida negativa ; c) Indefinida

16) Dada una aplicación lineal $f: \Re^3 \mapsto \Re^2$ tal que $\dim(\ker . f) = 1$, entonces:

a) "f" es epimorfismo ; b) "f" no es epimorfismo
c) No se puede saber si "f" es epimorfismo

17) Si la forma cuadrática $Q(\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{x}$ es definida negativa, la forma cuadrática $Q_1(\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet A^2 \bullet \bar{x}$ es:

a) Definida positiva ; b) Definida negativa ; c) Indefinida

18) ¿Cuál no es una forma cuadrática?:

a) $Q(x;y;z) = x^2 + 2.x.y - 4.x.z$
b) $Q(x;y;z) = x^2 + 2.x.y + y - z^2$
c) $Q(x;y;z) = x^2 + 2.x.y + z^2$

Solución

01) La correcta es b).

02) La correcta es a).

03) La a) es falsa, pues el conjunto contiene al vector cero.
La c) es falsa, pues $\overline{u}+\overline{v}$ es C.L. de $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

04) La correcta es c): las bases de $\Re^3$ están formadas por 3 vectores LI

05) La correcta es b): sólo en este caso es cero el producto escalar de los vectores.

06) La correcta es a):

$$A \bullet B = 0 \Rightarrow |A \bullet B| = 0 \Rightarrow |A|.|B| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

$$\boxed{\text{como B es regular entonces } |B| \neq 0}$$

07) La correcta es b):

$$(C \bullet A)^{-1} = A^{-1} \bullet A \bullet B \Rightarrow (C \bullet A)^{-1} = B \Rightarrow C \bullet A = B^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = B^{-1} \bullet A^{-1}$$

08) La correcta es c), famosa propiedad: si A es una matriz cuadrada de orden "n" entonces $|\text{Adj.}(A)| = (|A|)^{n-1}$.

09) La correcta es a), pues los autovalores de una matriz simétrica siempre son números reales, y tal cosa no sucede en nuestro caso:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-9} \notin \Re$$

10) Recuerda que si "A" es ortogonal, entonces $A^t = A^{-1}$.

La correcta es la a): al exigir que $\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & A^t \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, resulta:

$$\begin{bmatrix} AX & AY \\ X + A^tZ & Y + A^tT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} AX = I \\ AY = 0 \\ X + A^tZ = 0 \\ Y + A^tT = I \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} X = A^{-1} = A^t \\ Y = 0 \\ Z = -I \\ T = A \end{matrix} \right.$$

11) La correcta es b): si una matriz ortogonal su determinante es 1 ó -1.

12) La correcta es a), pues los autovalores son distintos: si $|A| = 0$ entonces $\lambda_1 = 0$ es autovalor, y si $Tr(A) = 5 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 5$

13) La correcta es a).

14) La correcta es c), pues $(2;4;0)$ es combinación lineal de $(1;2;0)$.

15) $Q(x;y;0) = x^2 + y^2 \Rightarrow$ definida positiva.

16) Siempre es $\dim(\ker.f) + \dim(\mathrm{Im}.f) = \dim(\text{Espacio Inicial})$; o sea:

$$1 + \dim(\mathrm{Im}.f) = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}.f) = 2 = \dim(\text{Espacio Final}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{"f" es sobreyectiva (epimorfismo)}$$

17) La correcta es b): si $Q(\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{x}$ es definida negativa, los autovalores de "A" son negativos; así, los autovalores de A^2 son positivos (recuerda que si λ es autovalor de "A", entonces λ^2 es autovalor de A^2).

18) La correcta es b).