EXAMEN FEBRERO 2002

01) Siendo $V=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\subset\Re^3$, es cierto que:

a) V siempre es sistema generador de $\Re^3$
b) V no puede ser sistema generador de $\Re^3$
c) V es un conjunto ligado

02) ¿Cuál de los siguientes vectores de $\Re^3$ no es combinación lineal de los vectores $(1;0;1)$ y $(1;0;0)$? :

a) $(1;0;2)$; b) $(0;1;2)$; c) $(2;0;1)$

03) Dada una aplicación lineal $f:\Re^n \mapsto \Re^m$, no siempre es cierto que:

a) $f(0)=0$; b) $f(x)=0 \Rightarrow x=0$; c) $f(x-y)=f(x)-f(y),\ \forall x,y\in\Re^n$

04) Siendo $A\in M_{n\times n}(\Re)$ y $k\in\Re$, es:

a) $|kA|=k|A|$; b) $|kA|=k^n|A|$
c) $|kA|=|k||A|$, siendo $|k|$ el valor absoluto de "k"

05) La inversa de la matriz particionada $A=\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & B^{-1}\end{bmatrix}$ es:

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & B\end{bmatrix}$; b) $A^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^2 & B\end{bmatrix}$; c) $A^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ B^{-1} & B\end{bmatrix}$

06) Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} u+v & u-v & u\end{bmatrix}$, siendo "u" y "v" vectores LI de $\Re^3$; así:

a) A es regular ; b) A es ortogonal ; c) $rg(A)=2$

07) Sea "A" una matriz simétrica de orden 3 con valores propios λ_1 simple y λ_2 doble. Si el subespacio propio asociado a λ_1 es $L(\lambda_1)=<(-1,0,1)>$, ¿cuál de los siguientes vectores puede ser vector propio de λ_2:

a) $(0,1,1)$; b) $(1,0,1)$; c) $(0,0,0)$

08) Sea "A" una matriz con polinomio característico $P(\lambda)=(\lambda^2-a).(\lambda^2-b)$, siendo $a,b>0$ y $a\neq b$; entonces:

a) "A" siempre es diagonalizable
b) "A" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "A" es o no diagonalizable

09) Sea "A" una matriz cuadrada regular. Señale la afirmación correcta:

a) $A + A^{-1}$ tiene los mismos valores propios que "A"
b) Todo vector propio de "A" es vector propio de $A + A^{-1}$
c) En general no es cierta ni a) ni b)

10) ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a una FC de tres variables?:

a) $2.x - x^2 + 2.x.y - 4.x.z$; b) $x^2 + 3.y^2 - 3.x.y - 3.x.z$
c) $x^2 + z^3$

11) Sea "Q" una FC con matriz asociada "A" de orden impar y tal que $|A| > 0$; así:

a) "Q" es definida positiva
b) "Q" no puede ser indefinida
c) "Q" no puede ser definida negativa

12) Sea $Q(x) = x^t(A + 2I)x$ una forma cuadrática, donde "A" es semidefinida positiva; acerca de "Q" puede afirmarse:

a) Es semidefinida positiva ; b) Es definida positiva
c) A priori no puede saberse el signo de "Q"

Solución

01) La correcta es la c): 4 vectores de $\Re^3$ siempre son LD

02) La correcta es la b): sólo en tal caso puede formarse una matriz con rango 3

03) La correcta es la b).

04) La correcta es la b).

05) La correcta es la b), pues sólo así sucede que $A \bullet A^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

06) "A" no es regular (pues la tercera columna de "A" es la semisuma de las dos primeras), por lo que no es ortogonal. Por tanto, sin leerla, la correcta es la c).

07) La correcta es la b): vectores propios asociados a valores propios distintos siempre son ortogonales.

08) Si $a, b > 0$ y $a \neq b$, los autovalores son distintos; así, "A" es diagonalizable

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - a).(\lambda^2 - b) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{a} \text{ y } \lambda = \pm\sqrt{b}$$

09) La correcta es la c): como contraejemplo vale $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10) La correcta es la b).

11) La correcta es la c), pues si "A" es de orden impar, el determinante de "A" es un menor de orden impar, y debería ser $|A| < 0$ para que "Q" pudiera ser definida negativa.

12) "Q" es definida positiva:

$$Q(x) = x^t \bullet (A + 2I) \bullet x = \underbrace{x^t \bullet A \bullet x}_{\geq 0} + \underbrace{2 \bullet x^t \bullet I \bullet x}_{> 0} > 0$$

También puedes lidiar así: los autovalores de $A + 2 \bullet I$ se obtienen sumando 2 a los autovalores de "A", y como estos son no negativos (por ser "A" semidefinida positiva), todos los autovalores de $A + 2 \bullet I$ son positivos.

TEORÍA (1 PUNTO CADA UNA)

Diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifique las respuestas.

1) Si $f: E \mapsto F$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales y "V" es un conjunto de vectores linealmente independientes en "E", entonces f(V) es un conjunto de vectores linealmente independientes en F.

2) Si "A" es una matriz regular diagonalizable, su inversa también es diagonalizable.

Solución 2

Si "A" es diagonalizable, es semejante a una matriz diagonal Λ: existe "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = \Lambda$. Tomando inversas, resulta

$$(C^{-1} \bullet A \bullet C)^{-1} = \Lambda^{-1} \Rightarrow C^{-1} \bullet A^{-1} \bullet C = \Lambda^{-1}$$

O sea, la matriz A^{-1}, que existe, por ser regular "A", es semejante a la matriz diagonal Λ^{-1}. Por tanto, la matriz A^{-1} es diagonalizable.

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Demuéstrese que un conjunto de vectores ortogonales es un sistema libre.

EJERCICIO (3'5 PUNTOS)

Sea la aplicación lineal $f(x_1;x_2;x_3) = (-x_1; -x_2 + \sqrt{2}.x_3; \sqrt{2}.x_2)$

1) Halle su matriz asociada en las bases canónicas.
2) Diga qué tipo de aplicación es.

Considere la forma cuadrática cuya matriz asociada es la encontrada en 1) y sobre ella resuelva los siguientes apartados:

3) Clasifíquela.
4) Halle su expresión canónica y la matriz de paso ortogonal.
5) Determine su signo si se restringe al subespacio $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.