EXAMEN SEPTIEMBRE 2001

01) Sea "v" un vector unitario de un espacio euclídeo; es falso que:

a) $v \bullet w = 0, \forall\ w$; b) $v \bullet v = 1$; c) $-v$ también es unitario

02) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$:

a) "A" es ortogonal ; b) "A" es antisimétrica ; c) No existe A^{-1}

03) ¿Cuál no es subespacio?:

a) $L_1 = \left\{(x;y;z;t) \in \Re^4 \ / \ x + y + 2.z - t = 0\right\}$
b) $L_2 = \left\{(x;y;z;t) \in \Re^4 \ / \ t < 0\right\}$
c) $L_3 = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \ / \ x + y - z = 0, 2.x + y + z = 0\right\}$

04) Es cierto que $\left\{(1;0;1), (1;1;0)\right\}$

a) Es un sistema generador de $\Re^3$; b) Es un sistema libre de $\Re^3$
c) No se cumple ni a) ni b)

05) Sea $f: E \mapsto F$ un homomorfismo cuya matriz asociada a ciertas bases es $A \neq 0$. Si $\ker.f = < u >$, con $u \in E$, $u \neq 0$, entonces:

a) $\dim.(E) = 1$; b) $\dim.(E) > 1$; c) $\dim.(E) = rg(A)$

06) Sea "X" una matriz de tamaño $m \times n$ tal que $\left|XX^t\right| \neq 0$ y sea "I" la matriz unidad de orden "m". La matriz $M = 2I - X(X^tX)^{-1}X^t$ es:

a) Simétrica ; b) Idempotente ; c) Simétrica e idempotente

07) Los valores propios de una matriz "A" cuadrada de orden 3 son 1, 0 y -1:

a) Los autovalores de A^{-1} son los mismos ; b) No existe A^{-1}
c) A^{-1} es diagonalizable

08) Si "A" y "B" son matrices semejantes, entonces:

a) Tienen los mismos autovectores ; b) $tr(A) = tr(B)$
c) Sus autovalores son números reales

09) Una forma cuadrática es

a) Un polinomio homogéneo de grado 2 ; b) Una aplicación lineal
c) Una aplicación de $\Re^n$ a $\Re^m$

10) Si "A" es una matriz simétrica regular y "B" es una matriz simétrica singular, de la forma cuadrática cuya matriz asociada es "AB" puede afirmarse:

a) Tiene igual signo que "A" ; b) Tiene igual signo que "B"
c) No puede ser definida positiva

11) Sea "A" una matriz simétrica de orden 3 con valores propios $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Si $u = (1;0;1)$ es un vector propio de $\lambda_1 = 1$, acerca del vector $v = (1;0;0)$ puede afirmarse:

a) Es vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$; b) No es vector propio de "A"
c) Es vector propio de "A" asociado a $\lambda_2 = 2$ o a $\lambda_3 = 3$

12) Sea una forma cuadrática $Q(x) = x^t A x$ tal que al restringirla a un subespacio "S" es semidefinida positiva; si $S^* \subset S$ es otro subespacio, siempre es cierto que:

a) "Q" es definida positiva
b) "Q" es semidefinida positiva en S^*
c) "Q" puede ser definida positiva en S^*

13) Sea $X \subset \Re^n$ y $a \in X$ un punto frontera:

a) "X" es cerrado ; b) "X" es abierto ; c) "X" no es abierto

14) El "límite" de una función vectorial en un punto es:

a) Una función vectorial ; b) Un número real
c) Un vector de números reales

15) Acerca de una función real de clase 1 podemos afirmar:

a) Es homogénea de grado 1 ; b) Es derivable
c) Ninguna de las anteriores es cierta

16) Sea $f: D \subset \Re^2 \mapsto \Re$ una función homogénea de clase 1 y tal que

$$a_1 . \frac{\partial f(a_1;b_1)}{\partial x} + b_1 . \frac{\partial f(a_1;b_1)}{\partial y} = a_2 . \frac{\partial f(a_2;b_2)}{\partial x} + b_2 . \frac{\partial f(a_2;b_2)}{\partial y}$$

Siempre es cierto que:

a) $(a_1;b_1) = (a_2;b_2)$
b) $(a_1;b_1)$ y $(a_2;b_2)$ pertenecen a la misma curva de nivel
c) Las anteriores son falsas

17) La ecuación $z^2 + x^2.y + x.y.z - 3 = 0$ define a "z" como función de "x" e "y" en un entorno del punto:

a) $(2;1;-1)$; b) $(1;1;4)$; c) $(1;3;-3)$

18) Si $f(x;y;z)=\dfrac{x.y+z^2}{x+y+z}.g(x;y;z)$, siendo $g(x;y;z)$ una función homogénea, acerca de la función "f" puede afirmarse

a) No es homogénea ; b) Es homogénea

c) Puede ser o no homogénea

19) Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re$ una aplicación lineal. Podemos afirmar que "f" es derivable respecto una dirección cualquiera $v \in \Re^2$ y que

a) $D_v f(a)=f(v)$; b) $D_v f(a)=f(a)$; c) $D_v f(a)=f(a)+f(v)$

20) Sean $f:G\subseteq \Re^n \mapsto \Re$ y $g:H\subset \Re^n \mapsto \Re^n$, con $g(H)\subseteq G$, tales que "g" es diferenciable en $x\in H$ y "f" en $g(x)$. Entonces:

a) $\nabla((f+f)\circ g)^t(x)=2\nabla f(g(x))^t \bullet Jg(x)$

b) $\nabla((f+f)\circ g)^t(x)=2Jf(g(x))^t \bullet \nabla g(x)$

c) $\nabla((f+f)\circ g)^t(x)=2Jg(f(x))^t \bullet \nabla f(x)$

21) Sea $f(x;y)$ tal que $f(0;0)=0$; $\nabla f(0;0)^t=(1;-2)$; $Hf(0;0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

El desarrollo de Mac-Laurin de orden dos de $h(x;y)=\text{sen}\,(f(x;y))$ es:

a) $h(x;y)=x-2.y+x.y-(y^2/2)+T_L$

b) $h(x;y)=x-y+(x.y/2)-(y^2/2)+T_L$

c) $h(x;y)=x-2.y+x.y-y^2+T_L$

22) Sea una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente y S_n su sucesión de sumas parciales:

a) S_n es convergente ; b) S_n puede ser convergente o divergente

c) $\lim_{n\to\infty} S_n=0$

23) Sea $f(x)$ una función continua $\forall\ x\in[a;b]$ y $F(x)=\int_x^a f(t).dt$:

a) $F'(x)=f(x)$; b) $F'(x)=-f(x)$; c) $f'(x)=F(x)$

24) Es cierto que

a) $\int_1^3 \int_y^3 f(x;y).dx.dy=\int_1^3 \int_1^x f(x;y).dx.dy$

b) $\int_1^3 \int_y^3 f(x;y).dx.dy=\int_1^3 \int_x^1 f(x;y).dx.dy$

c) $\int_1^3 \int_y^3 f(x;y).dx.dy=\int_1^3 \int_0^x f(x;y).dx.dy$

25) El valor de $\int_0^1 \dfrac{dx}{2.\sqrt{1-x}}$ es: a) 1 ; b) 2 ; c) 0

Solución

01) La correcta es la a).

02) La correcta es la c).

03) La correcta es la b).

04) La correcta es la b).

05) Como $A \neq 0$, es $\ker.f \subset E$ (si fuera $A = 0$ sería $\ker.f = E$); por tanto, siendo $\dim.(\ker.f) = 1$ (pues $\ker.f$ es el subespacio de "E" que engendra el vector "u"), ha de ser $\dim.(E) > 1$.

06) La matriz $M = 2I - X(X^tX)^{-1}X^t$ es simétrica, pues $M^t = M$:

$$M^t = (2I - X(X^tX)^{-1}X^t)^t = 2I^t - (X(X^tX)^{-1}X^t)^t =$$

$$\boxed{(\text{Pepa} + \text{Juana})^t = \text{Pepa}^t + \text{Juana}^t}$$

$$\boxed{\text{traspuesta de producto} = \text{producto de traspuestas en orden contrario}}$$

$$= 2I^t - (X^t)^t((X^tX)^{-1})^t X^t = 2I - X((X^tX)^{-1})^t X^t =$$

$$\boxed{I^t = I \ ; \ (X^t)^t = X}$$

$$\boxed{(\text{Luisa}^{-1})^t = (\text{Luisa}^t)^{-1}}$$

$$= 2I - X((X^tX)^t)^{-1}X^t = 2I - X(X^t(X^t)^t)^{-1}X^t = 2I - X(X^tX)^{-1}X^t = M$$

La matriz $M = 2I - X(X^tX)^{-1}X^t$ no es idempotente, pues $M^2 \neq M$:

$$M^2 = (2I - X(X^tX)^{-1}X^t).(2I - X(X^tX)^{-1}X^t) =$$

$$= 4I - 2X(X^tX)^{-1}X^t - 2X(X^tX)^{-1}X^t + X\underbrace{(X^tX)^{-1}X^tX}_{I}(X^tX)^{-1}X^t =$$

$$= 4I - 2X(X^tX)^{-1}X^t - 2X(X^tX)^{-1}X^t + X(X^tX)^{-1}X^t =$$

$$= 4I - 3X(X^tX)^{-1}X^t \neq 2M$$

07) Si $\lambda = 0$ es autovalor de "A" $\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ no existe A^{-1}

08) La correcta es la b).

09) La correcta es la a).

10) Si $|B| = 0 \Rightarrow |AB| = |A|.|B| = |A|.0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ es autovalor de "AB" $\Rightarrow$ la forma cuadrática cuya matriz asociada es "AB" no puede ser definida positiva.

11) La a) es falsa: si $u=(1;0;1)$ es autovector de $\lambda_1=1$, como $\dim.L(\lambda_1=1)=1$, los autovectores del autovalor $\lambda_1=1$ son proporcionales a $u=(1;0;1)$, cosa que no sucede con $v=(1;0;0)$. La c) es falsa: por ser "A" simétrica, si $v=(1;0;0)$ fuera autovector de $\lambda_2=2$ o de $\lambda_3=3$ debería ser ortogonal a $u=(1;0;1)$, y no lo es.

12) La correcta es la c).

13) La correcta es la c), pues "X" tiene puntos frontera.

14) La correcta es la c).

15) La correcta es la b), por ser la función de clase C^1.

16) La correcta es la b): "f" homogénea de clase 1 $\Rightarrow$ Euler garantiza que el primer miembro del "pedrusco" dado es $f(a_1;b_1)$ y el 2º miembro es $f(a_2;b_2)$.

17) La c): siendo $F(x;y;z)=z^2+x^2.y+x.y.z-3$, el punto $(1;3;-3)$ satisface la ecuación $F(x;y;z)=0$ y además $F_z(1;3;-3)\neq 0$.

18) Como $u(x;y;z)=(x.y+z^2)/(x+y+z)$ es homogénea (grado 1) y $g(x;y;z)$ también lo es, el producto de ambas es una función homogénea.

19) Si $f:\Re^2\mapsto\Re$ es una aplicación lineal, su expresión matemática es de la forma $f(x;y)=m.x+n.y$, siendo constantes "m" y "n". Así; por ser "f" diferenciable en todo punto, en el punto "a", siendo $v=(v_1;v_2)$, es:

$$D_v f(a)=\nabla f(a)\bullet\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m & n\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=m.v_1+n.v_2=f(v)$$

20) La correcta es la c):

$$\nabla((f+f)\circ g)^t(x)=\nabla((2.f)\circ g)^t(x)=2.\nabla(f\circ g)^t=2.Jg(f(x))^t\bullet\nabla f(x)$$

21) La correcta es la b):

$$h(x;y)=h(0;0)+\nabla h(0;0)\bullet\begin{bmatrix}x-0\\y-0\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\bullet\begin{bmatrix}x-0 & y-0\end{bmatrix}\bullet Hh(0;0)\bullet\begin{bmatrix}x-0\\y-0\end{bmatrix}+T_L\underset{\uparrow}{=}x-y+(x.y/2)-(y^2/2)+T_L$$

$$\boxed{\begin{array}{c} *\ h(0;0)=\text{sen }(f(0;0))=\text{sen }0=0\\ *\ h_x(0;0)=f_x(0;0).\cos(f(0;0))=1.\cos 0=1\\ *\ h_y(0;0)=f_y(0;0).\cos(f(0;0))=-2.\cos 0=-2\\ *\ h_{x^2}(0;0)=f_{x^2}(0;0).\cos(f(0;0))-(f_x(0;0))^2.\text{sen }(f(0;0))=0\\ *\ h_{y^2}(0;0)=f_{y^2}(0;0).\cos(f(0;0))-(f_y(0;0))^2.\text{sen }(f(0;0))=-1\\ *\ h_{xy}(0;0)=f_{xy}(0;0).\cos(f(0;0))-f_x(0;0).f_y(0;0).\text{sen }(f(0;0))=1 \end{array}}$$

22) La correcta es la a): si la serie es convergente, su sucesión de sumas parciales tiene límite finito (es convergente) .

23) La correcta es la b).

24) La correcta es la a): el dominio de integración es el triángulo de vértices (1;1), (3;1) y (3;3).

25) $\int_0^1 \frac{dx}{2.\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.\int_0^1 x^0.(1-x)^{-1/2}.dx = \frac{1}{2}.\beta(1;\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma(1).\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} = 1$

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Enuncie y demuestre el teorema fundamental de la diagonalización.

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Demuestre que toda función diferenciable en un punto es derivable en ese punto respecto de cualquier dirección.

EJERCICIO (2 PUNTOS)

Sea la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3) = 3.x_1^2 + 3.x_2^2 - 4.x_3^2 + 2.x_1.x_2$

1) Exprésela en forma matricial y clasifíquela.
2) Halle su expresión canónica y la matriz de cambio de base.
3) Determine el signo de la forma cuadrática si se restringe al subespacio

$$S = \{(x_1;x_2;x_3)/x_1 - 2.x_3 = 0\}$$

Solución

1) Consideramos que la base de referencia en $\Re^3$ es la canónica; así, entendemos que x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de un vector $\bar{p} \in \Re^3$ respecto de dicha base. La expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$Q(\bar{p}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (I)$$

La forma cuadrática es indefinida (pues la diagonal principal de "A" contiene elementos de signo distinto); es decir, en $\Re^3$ hay vectores cuya imagen según "Q" es positiva (por ejemplo, $Q(1;0;0) = 3 > 0$) y también hay vectores que tienen imagen negativa (por ejemplo, $Q(0;0;1) = -4 < 0$).

2) Autovalores de "A":

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 2.\lambda^2 + 16.\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 4, -4$$

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2$:

$$(A - 0 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = -x_1 \\ -6.x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(a;-a;0),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;-1;0),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_1 = (1;-2;0)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\overline{u}_1 = \frac{\overline{h}_1}{\left\|\overline{h}_1\right\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0)$$

es una base ortonormal del subespacio.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 4$:

$$(A - 4 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} -x_2 = -x_1 \\ -8.x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = x_1 \\ x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 4) = \{(b;b;0),\ \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (1;1;0),\ \forall b \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_2 = (1;1;0)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\overline{u}_2 = \frac{\overline{h}_2}{\left\|\overline{h}_2\right\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0)$$

es una base ortonormal del subespacio.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = -4$:

$$(A + 4 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 7.x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 7.x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -4) = \{(0;0;c),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (0;0;1),\ \forall c \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_3 = (0;0;1)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\overline{u}_3 = \frac{\overline{h}_3}{\left\|\overline{h}_3\right\|} = (0;0;1)$$

es una base ortonormal del subespacio.

- Si en el espacio $\Re^3$ tomamos como base de referencia la base ortonormal que forman los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ y $\overline{u}_3$, se modifican las coordenadas de $\overline{p} \in \Re^3$, de modo que si $\overline{p} = x_1^* \bullet \overline{u}_1 + x_2^* \bullet \overline{u}_2 + x_3^* \bullet \overline{u}_3$, entonces:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\overbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}^{C\equiv\text{matriz de "paso"}}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3\end{array}\end{array}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}\quad \text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión canónica de "Q":

$$Q(\bar{p})=\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^* & x_3^*\end{bmatrix}\bullet(C^t\bullet A\bullet C)\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}=$$

$$\boxed{C^t\bullet A\bullet C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & -4\end{bmatrix}}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^* & x_3^*\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & -4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}=2.(x_1^*)^2+4.(x_2^*)^2-4.(x_3^*)^2$$

3) La forma cuadrática "Q" es definida positiva si se restringe al subespacio $x_1-2.x_3=0$, pues siendo $x_1=2.x_3$, es:

$$Q(2.x_3;x_2;x_3)=3.(2.x_3)^2+3.x_2^2-4.x_3^2+2.(2.x_3).x_2=$$

$$=3.x_2^2+8.x_3^2+4.x_3.x_2=\begin{bmatrix}x_2 & x_3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 8\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}>0 \text{ si } x_2\neq 0 \text{ y } x_3\neq 0$$

$$\boxed{\text{pues } H_1=3>0 \text{ y } H_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 8\end{vmatrix}>0}$$

EJERCICIO (2 PUNTOS)

Resuelva $\iint_D \dfrac{x-y}{(x+y)^2}.dx.dy$, siendo $D=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, y\geq 0,\ x+y\leq 4,\ x\geq 1\}$

Utilice el cambio de variables $x=\dfrac{u+v}{2}$; $y=\dfrac{u-v}{2}$

Solución

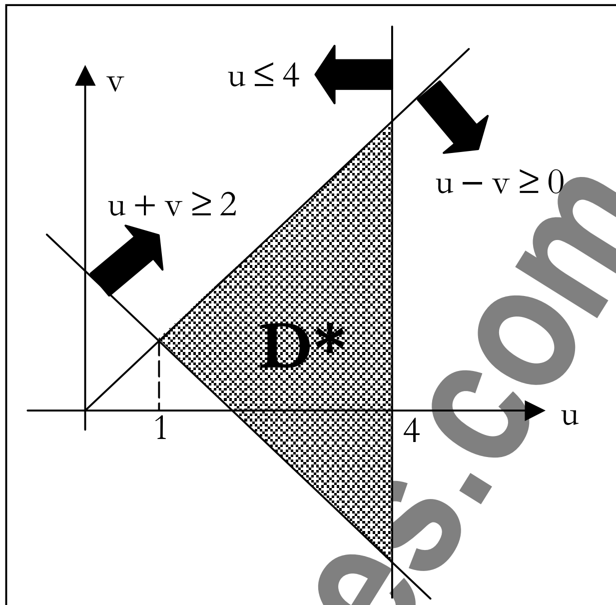
En general, si para calcular la integral doble de la función $f:\Re^2\mapsto\Re$ en el dominio $D\subseteq\Re^2$ hacemos $x=h_1(u;v)$ e $y=h_2(u;v)$, es:

$$\iint_D f(x;y).dx.dy=\iint_{D^*} f(h_1(u;v);h_2(u;v)).|J|.du.dv$$

donde D* es el dominio en que se transforma "D" como consecuencia del cambio de variables, y "J" es el jacobiano de dicho cambio.

Determinemos D*:

$$\left.\begin{array}{r} y \ge 0 \\ x+y \le 4 \\ x \ge 1 \end{array}\right\} \underset{\boxed{x=(u+v)/2\ ;\ y=(u-v)/2}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{c} (u-v)/2 \ge 0 \\ u \le 4 \\ (u+v)/2 \ge 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u-v \ge 0 \\ u \le 4 \\ u+v \ge 2 \end{array}\right.$$



El jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x=(u+v)/2 \\ y=(u-v)/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=u \\ x-y=v \\ dx.dy=\left|J\right|.du.dv=du.dv/2 \end{array}\right.}$$

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^2}.dx.dy = \frac{1}{2}.\iint_{D^*} \frac{v}{u^2}.du.dv =$$

$$= \frac{1}{2}.\int_{u=1}^{u=4} \left(\int_{v=2-u}^{v=u} \frac{v}{u^2}.dv\right).du = \frac{1}{2}.\int_{u=1}^{u=4} \frac{du}{u^2}\left(\frac{v^2}{2}\right)_{v=2-u}^{v=u} =$$

$$= \frac{1}{4}.\int_{u=1}^{u=4} \frac{u^2-(2-u)^2}{u^2}.du = \frac{1}{4}.\int_{u=1}^{u=4} \frac{-4+4.u}{u^2}.du =$$

$$= \int_{u=1}^{u=4} \left(-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}\right).du = \left(\frac{1}{u}+\mathrm{Ln}\left|u\right|\right)_{u=1}^{u=4} = ...$$