

EXAMEN JUNIO 2001

- 01) Si $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ es un homomorfismo tal que $\dim \text{Im } f = 3$, entonces
- "f" es un isomorfismo
 - "f" es un epimorfismo
 - las anteriores son falsas
- 02) Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ es una matriz idempotente, su polinomio característico puede tener la expresión
- $P(\lambda) = -\lambda \cdot (\lambda - 1)^2$; b) $P(\lambda) = -(\lambda^2 + 1) \cdot (\lambda + 1)$
 - $P(\lambda) = -(\lambda + 2)^2 \cdot (\lambda + 1)$
- 03) Sea "X" una matriz de tamaño $m \times n$ tal $|X^t X| \neq 0$ y sea "I" la matriz unidad de orden "m". La matriz $M = I - X(X^t X)^{-1} X^t$ es
- simétrica pero no idempotente
 - idempotente pero no simétrica
 - simétrica e idempotente
- 04) Sea "A" una matriz de orden "n" tal que $\text{tr}(AA^t) = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones NO es cierta?
- "A" es la matriz identidad
 - "A" es la matriz nula
 - $\text{tr}(AA^t) + \text{tr}(A) = \text{tr}(A(A^t + 2I))$
- 05) Sean "A" y "B" matrices semejantes tales que $|A| = 2$ y $\text{tr}(B) = 4$:
- $|B| = 2$ y $\text{tr}(A) = 4$; b) $\text{tr}(A - B) = -2$; c) $|AB| = 8$
- 06) Sea "A" una matriz de orden 3 con autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 1/2$. Si $(1;0;1)$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$, el vector $(2;0;2)$ es un vector propio asociado a
- $\lambda_1 = 1$; b) $\lambda_2 = 2$; c) $\lambda_3 = 1/2$
- 07) Sea una forma cuadrática $Q(x) = x^t A x$ que es definida positiva al restringirla a un subespacio "S". Sobre el signo de "Q" puede afirmarse
- "Q" es siempre definida positiva
 - "Q" puede tener cualquier signo
 - "Q" puede ser indefinida

08) Señale cuál de las siguientes expresiones NO es una forma cuadrática

- a) $Q(x;y;z) = x^2 + y \cdot z$; b) $Q(x;y;z) = 2 \cdot x^2 - y^2 + z^2$
c) $Q(x;y;z) = 2 \cdot x^2 + y + z^2$

09) Sea una forma cuadrática $Q(x) = x^t A x$ indefinida y sea la forma cuadrática $Q'(x) = x^t A^2 x$. Se cumple:

- a) Q' es siempre definida positiva ; b) Q' no es indefinida
c) Q' puede tener cualquier signo

10) Dado el conjunto $\{(1;2), (-1;1), (2;0)\}$, es cierto que

- a) Es un sistema generador de \mathbb{R}^2 ; b) Es una base de \mathbb{R}^2
c) Las anteriores son falsas

11) Indicar cuál de los siguientes subconjuntos NO es subespacio vectorial del correspondiente espacio vectorial que lo contiene

- a) $L_1 = \{(a;0) \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}\}$; b) $L_2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0\}$
c) $L_3 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2 \cdot y + 3 \cdot z = 1\}$

12) En \mathbb{R}^3 con el producto escalar, es falso que

- a) Si $u = (1;2;3)^t$ y $v = (-1;1;1)^t$, entonces $u \bullet v = 4$
b) El vector $(1/2;1;1/2)$ es unitario
c) Si $u = (-1;0;1)^t$ se verifica $|u|^2 = 2$

13) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\forall r > 0$ es $B(a;r) \cap X \neq \emptyset$ y $B(a;r) \cap X^c \neq \emptyset$. Podemos afirmar que el punto "a"

- a) interior ; b) exterior ; c) frontera

14) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función homogénea de grado uno tal que $f(0;0) = 0$. Podemos afirmar que "f" es derivable en el punto $0 = (0;0)$ respecto una dirección cualquiera $v \in \mathbb{R}^2$ y que

- a) $D_v f(0) = f(v)$; b) $D_v f(0) = f(0)$; c) $D_v f(0) = f(0) + f(v)$

15) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (a;b)} f(x;y) = \lim_{(x;y) \rightarrow (c;d)} f(x;y)$$

Es siempre cierto que:

- a) $(a;b) = (c;d)$; b) $(a;b)$ y $(c;d)$ pertenecen a la misma curva de nivel
c) las anteriores son falsas

16) El límite de una función real en un punto es

- a) Una función real ; b) Un número real
- c) Un vector de números reales

17) Sea $f: D \subseteq \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ una función diferenciable en todos los puntos de su dominio y sean $a, b \in D$, $u, v \in \mathfrak{R}^n$ y $\lambda \in \mathfrak{R}$; es:

- a) $D_{u+v}f(a) = D_u f(a) + D_v f(a)$
- b) $D_u f(a+b) = D_u f(a) + D_u f(b)$; c) $D_u f(\lambda a) = \lambda D_u f(a)$

18) Dada $f: G \subseteq \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$, decimos que es diferenciable en el punto $x \in G$ si y sólo si existe $l_x \in L(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R})$ tal que $\forall y \in G$

- a) $\lim_{\|y-x\| \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(x) - l_x(y-x)}{\|y-x\|} = 0$; b) $\lim_{\|y-x\| \rightarrow 0} \frac{l_x(y-x)}{\|y-x\|} = 0$
- c) $\lim_{\|y-x\| \rightarrow 0} \frac{l_x(y-x)}{\|y-x\|} = 0$

19) La ecuación $z^3 - x.z + x.y = 0$ define a "z" como función de "x" e "y" en un entorno del punto: a) (1;0;1) ; b) (27;2;3) ; c) (3;3;1)

20) Si $f: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ es una aplicación lineal, puede afirmarse que

- a) "f" es una función homogénea de grado 1
- b) "f" no es una función homogénea
- c) "f" puede ser o no una función homogénea

21) El desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x;y) = \text{sen}(x^2 + y - 1)$ en el punto (0;1) es:

- a) $f(x;y) = y - 1 + 2.x^2 + T_L$; b) $f(x;y) = y - 1 + x^2 + T_L$
- c) $f(x;y) = y + x^2 + T_L$

22) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^4 + 2)^n$

- a) Es convergente ; b) Es divergente
- c) Puede ser convergente o divergente

23) Es cierto que:

- a) $\int_a^b k.f(x).dx = -k. \int_a^b f(x).dx, \forall k \in \mathfrak{R}$
- b) $\int_a^b k.f(x).dx = -k. \int_b^a f(x).dx, \forall k \in \mathfrak{R}$
- c) $\int_a^b k.f(x).dx = k. \int_b^a f(x).dx, \forall k \in \mathfrak{R}$

24) Es cierto que

$$a) \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x;y).dy.dx = \int_0^1 \int_0^{2-y} f(x;y).dx.dy$$

$$b) \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x;y).dy.dx = \int_0^1 \int_1^{2-y} f(x;y).dx.dy$$

$$c) \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x;y).dy.dx = \int_1^2 \int_{1-y}^1 f(x;y).dx.dy$$

25) Si $k > 0$, el valor de $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-k}}$ es

a) $1/k$; b) $1/(k+1)$; c) k

Solución

01) La correcta es la c).

La a) es falsa: "f" no puede ser isomorfismo (inyectiva y sobreyectiva) si los espacios "inicial" y "final" tienen distinta dimensión. La b) es falsa: "f" no es epimorfismo (sobreyectiva), pues el subespacio $\text{Im}.f$ no coincide con el espacio "final" \mathbb{R}^4 (se nos dice que $\dim.\text{Im } f = 3$).

Observa que "f" es inyectiva (monomorfismo), pues siendo siempre

$$\dim.(\ker.f) + \dim.(\text{Im}.f) = \dim.(\text{Espacio Inicial})$$

en nuestro caso:

$$\dim.(\ker.f) + 3 = 3 \Rightarrow \dim.(\ker.f) = 0 \Rightarrow \text{"f" es inyectiva}$$

02) La correcta es la a), pues los autovalores de una matriz idempotente sólo pueden tomar los valores 0 y 1 (famosa propiedad; ojo con la demostración, podría ser teoría barata).

03) La correcta es la c):

La matriz "M" es simétrica, pues coincide con su traspuesta:

$$M^t = (I - X(X^t X)^{-1} X^t)^t = I^t - (X(X^t X)^{-1} X^t)^t =$$

$$\boxed{(Pepa + Juana)^t = Pepa^t + Juana^t}$$

traspuesta de producto = producto de traspuestas en orden contrario

$$= I^t - (X^t)^t ((X^t X)^{-1})^t X^t = I - X((X^t X)^{-1})^t X^t =$$

$$\boxed{I^t = I ; (X^t)^t = X}$$

$$\boxed{(Luisa^{-1})^t = (Luisa^t)^{-1}}$$

$$= I - X((X^t X)^t)^{-1} X^t = I - X(X^t (X^t)^t)^{-1} X^t = I - X(X^t X)^{-1} X^t = M$$

La matriz "M" es idempotente, pues $M^2 = M$:

$$\begin{aligned} M^2 &= (I - X(X^tX)^{-1}X^t) \cdot (I - X(X^tX)^{-1}X^t) = \\ &= I - X(X^tX)^{-1}X^t - X(X^tX)^{-1}X^t + \underbrace{X(X^tX)^{-1}X^tX(X^tX)^{-1}X^t}_I = \\ &= I - X(X^tX)^{-1}X^t - X(X^tX)^{-1}X^t + X(X^tX)^{-1}X^t = \\ &= I - X(X^tX)^{-1}X^t = M \end{aligned}$$

04) Famosa propiedad: si "A" es una matriz cuadrada, la traza de la matriz AA^t es la suma de los cuadrados de los elementos de "A". Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$$

y sucede que $\text{tr}(AA^t) = 5 + 25 = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.

La a) es falsa pues si "A" fuera la matriz identidad de orden "n" entonces sería $\text{tr}(AA^t) = n$. La b) es verdadera: si $\text{tr}(AA^t) = 0 \Rightarrow$ la suma de los cuadrados de los elementos de "A" es cero \Rightarrow todos los elementos de "A" son nulos (pues en caso contrario la suma de sus cuadrados no sería cero). La c) es verdadera, pues siendo "A" la matriz nula, sucede que:

$$\text{tr}(AA^t) + \text{tr}(A) = \text{tr}(A(A^t + 2I))$$

- 05) La correcta es la a): dos matrices semejantes tienen el mismo determinante y la misma traza.
- 06) El vector $(2;0;2)$ es proporcional $(1;0;1)$, por lo que $(2;0;2)$ es vector propio asociado al mismo valor propio que $(1;0;1)$.
- 07) La a) es falsa: el que todos los de tu grupo sean listos no garantiza que todo el mundo sea listo. La b) es falsa: si todos los de tu grupo son listos resulta obvio que no todo el mundo es tonto (es decir, "Q" no puede ser definida negativa).
- 08) La c) no es una forma cuadrática.
- 09) La correcta es la b): si $\lambda \in \mathfrak{R}$ es autovalor de "A", $\lambda^2 \geq 0$ es autovalor de A^2 , por lo que Q' no es indefinida (es definida positiva o semidefinida positiva)
- 10) La correcta es la a).
- 11) L_3 no es subespacio.
- 12) La falsa es la b).
- 13) Si todo entorno $B(a;r)$ de "a" contiene puntos que pertenecen a "X" (dicen que $B(a;r) \cap X \neq \emptyset$) y contiene puntos que no pertenecen a "X" (dicen que $B(a;r) \cap X^c \neq \emptyset$) entonces "a" es un punto frontera de "X".

- 14) La correcta es la a), basta aplicar la definición de derivada de una función en un punto (el 0) según un vector "v":

$$D_v f(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0 + \lambda \bullet v) - f(0)}{\lambda} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{el enunciado dice que } f(0) = 0}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda \bullet v)}{\lambda} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{es } f(\lambda \bullet v) = \lambda \cdot f(v), \text{ pues "f" homogénea de grado 1}}}{=} \\ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda \cdot f(v)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f(v) = f(v)$$

- 15) La correcta es la b): como "f" es continua, su límite en el punto (a;b) coincide con f(a;b) y su límite en el punto (c;d) coincide con f(c;d). Por tanto, como los límites son iguales, es f(a;b) = f(c;d); es decir, los puntos (a;b) y (c;d) pertenecen a la misma curva de nivel de "f".

- 16) Nos hablan de una función real \Rightarrow el conjunto "final" de la función es $\mathfrak{R} \Rightarrow$ el límite de la función en un punto es un número real.

- 17) La correcta es la a): si $f: D \subset \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ es diferenciable en todo punto "Pepe" de su dominio, para todo vector "Juan", es:

$$D_{\text{Juan}} f(\text{Pepe}) = \nabla f(\text{Pepe}) \bullet \text{Juan}^t$$

Así:

$$D_{u+v} f(a) = \nabla f(a) \bullet (u + v)^t = \\ = \nabla f(a) \bullet u^t + \nabla f(a) \bullet v^t = D_u f(a) + D_v f(a)$$

- 18) La correcta es la a).

- 19) La a) es verdadera, pues (1;0;1) satisface la ecuación $z^3 - x \cdot z + x \cdot y = 0$ y además

$$\left(\frac{\partial(z^3 - x \cdot z + x \cdot y)}{\partial z} \right)_{(1;0;1)} = (3 \cdot z^2 - x)_{(1;0;1)} = -2 \neq 0$$

La b) es falsa, pues aunque (27;2;3) satisface la ecuación dada, es:

$$\left(\frac{\partial(z^3 - x \cdot z + x \cdot y)}{\partial z} \right)_{(27;2;3)} = (3 \cdot z^2 - x)_{(27;2;3)} = 0$$

La c) es falsa, pues (3;3;1) no satisface la ecuación dada.

- 20) Si $f: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ es aplicación lineal $\Rightarrow f(x_1; \dots; x_n) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n$, que es una función homogénea de grado 1.

$$21) \quad f(x;y) = f(0;1) + \nabla f(0;1) \cdot \begin{bmatrix} x-0 \\ y-1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x-0 & y-1 \end{bmatrix} \cdot Hf(0;1) \cdot \begin{bmatrix} x-0 \\ y-1 \end{bmatrix} + T_L = y-1 + x^2 + T_L$$

$f(0;1) = (\text{sen}(x^2 + y - 1))_{(0;1)} = 0$ $f_x(0;1) = (2 \cdot x \cdot \cos(x^2 + y - 1))_{(0;1)} = 0$ $f_y(0;1) = (\cos(x^2 + y - 1))_{(0;1)} = 1$ $f_{x^2}(0;1) = (2 \cdot (\cos(x^2 + y - 1) - 2 \cdot x^2 \cdot \text{sen}(x^2 + y - 1)))_{(0;1)} = 2$ $f_{yx}(0;1) = (-2 \cdot x \cdot \text{sen}(x^2 + y - 1))_{(0;1)} = 0$ $f_{y^2}(0;1) = (-\text{sen}(x^2 + y - 1))_{(0;1)} = 0$
--

22) La correcta es la b): la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^4 + 2)^n$ es de términos positivos y no cumple la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^4 + 2)^n = (0 + 2)^{\infty} \neq 0$$

$\sum a_n \text{ es convergente} \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$
--

23) La correcta es la b).

24) La correcta es la b), pues el dominio de integración es el triángulo de vértices (1;0), (1;1) y (2;0).

25) Es $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-k}} = \int_0^1 x^{k-1} \cdot dx$. Si $k \geq 1$ estamos ante una integral de Riemann corriente y moliente, pues si $k \geq 1$ entonces $f(x) = x^{k-1}$ es continua en el intervalo $[0;1]$; así:

$$\int_0^1 x^{k-1} \cdot dx = \left(\frac{x^k}{k} \right)_0^1 = \frac{1^k}{k} - \frac{0^k}{k} = \frac{1}{k}$$

Si $0 < k < 1$ la integral es impropia de segunda especie por falta de acotación del integrando en el extremo inferior del intervalo de integración. Es:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{k-1} \cdot dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{k-1} \cdot dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{x^k}{k} \right)_{0+\varepsilon}^1 = \frac{1}{k} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1^k - \varepsilon^k) = \frac{1}{k} \cdot (1 - 0_{\text{positivo}}) = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

TEORÍA (1 PUNTO)

Enunciar y demostrar el teorema fundamental del cálculo integral.

TEORÍA (1+1 PUNTOS)

Diga si son verdaderas las siguientes afirmaciones, justificando las respuestas

- 1) Dada un conjunto de vectores $\{u, v, w\}$ que constituye una base de \mathcal{R}^3 , el conjunto $\{u, u - v, u + v + 2 \cdot w\}$ también es base de \mathcal{R}^3 .
- 2) Dadas dos matrices cuadradas A y B, si λ es un valor propio de A y μ es un valor propio de B, $\lambda \cdot \mu$ es valor propio de AB

Solución

- 1) Como le pasa a cualquiera con ápice de sensibilidad, los vectores se deprimen si carecen de nombre; por eso, para evitar que los elementos del conjunto $\{u, u - v, u + v + 2 \cdot w\}$ tengan ese problema, los bautizamos; por ejemplo: $h_1 = u$, $h_2 = u - v$ y $h_3 = u + v + 2 \cdot w$.

Como $\dim.(\mathcal{R}^3) = 3$, cualesquiera tres vectores de \mathcal{R}^3 que sean LI forman una base de \mathcal{R}^3 , y h_1, h_2, h_3 son LI si la ecuación vectorial:

$$\alpha_1 \cdot h_1 + \alpha_2 \cdot h_2 + \alpha_3 \cdot h_3 = \bar{0} \quad (I)$$

admite sólo la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; en caso contrario son LD. Al sustituir h_1, h_2, h_3 en (I), se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot u + \alpha_2 \cdot (u - v) + \alpha_3 \cdot (u + v + 2 \cdot w) &= \bar{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot u + (-\alpha_2 + \alpha_3) \cdot v + 2 \cdot \alpha_3 \cdot w &= \bar{0} \quad (II) \end{aligned}$$

Como los vectores u, v y w son LI (por formar una base de \mathcal{R}^3), podemos apostar una pierna a que la ecuación vectorial (II) se satisface sólo si son nulos todos los coeficientes que en ella hay; es decir, se satisface (II) sólo si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2 \cdot \alpha_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

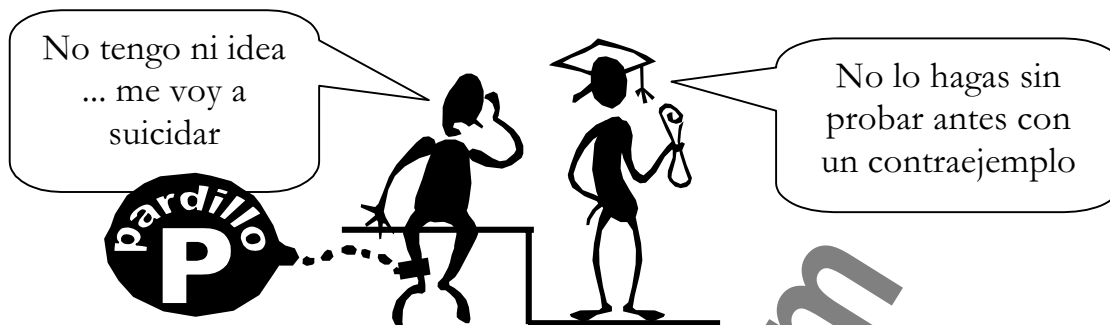
Como $\text{rg}(A) = 3$, el sistema sólo tiene la solución trivial $\Rightarrow h_1, h_2, h_3$ son LI y forman una base de \mathcal{R}^3 .

Observa: la primera, segunda y tercera columnas de "A" están formadas respectivamente por los coeficientes de la combinación lineal que expresa "cómo" se obtienen h_1, h_2, h_3 a partir de u, v y w .

2) Si λ es un valor propio de A sucede que $|A - \lambda \cdot I| = 0$.

Si μ es un valor propio de B sucede que $|B - \mu \cdot I| = 0$.

El número $\lambda \cdot \mu$ será valor propio de $A \cdot B$ si $|A \cdot B - (\lambda \cdot \mu) \cdot I| = 0$.



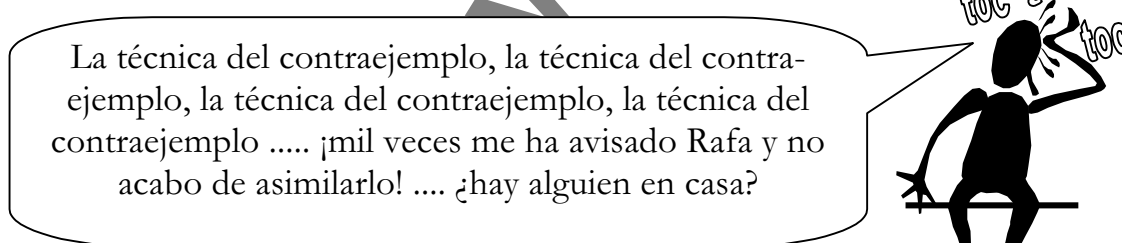
$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda \cdot I| = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

$$\text{Si } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B - \mu \cdot I| = 0 \Rightarrow \mu = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{Es } A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \text{ siendo}$$

$$|A \cdot B - \delta \cdot I| = \delta^2 - 5\delta - 20 = 0 \Rightarrow \delta = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{2}$$

Por tanto, en general, no es cierto que si λ es un valor propio de A y μ es un valor propio de B entonces $\lambda \cdot \mu$ es valor propio de $A \cdot B$.



EJERCICIO (0'5+1+0'5 PUNTOS)

Considere la forma cuadrática $Q: \mathcal{R}^3 \mapsto \mathcal{R}$ cuya expresión polinómica es

$$Q(x; y; z) = 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z$$

- 1) Clasifíquela según su signo.
- 2) Halle su expresión canónica y la matriz de paso "C" ortogonal.
- 3) Determine su signo si se restringe al subespacio vectorial

$$S = \{(x; y; z) \in \mathcal{R}^2 / x + y + z = 0, x - y - z = 0\}$$

Solución

- Como no se dice nada al respecto, consideramos que la base de referencia en \mathcal{R}^3 es la canónica.

- La expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica es

$$Q(\bar{p}) = (x; y; z) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (I)$$

siendo $(x; y; z)$ las coordenadas del vector $\bar{p} \in \mathcal{R}^3$ respecto de dicha base.

- 1) Calculemos los autovalores de "A": son las so-luciones de $|A - \lambda \cdot I| = 0$, que es la ecuación caracterísitica de "A":

$$|A - \lambda \cdot I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \text{ (simple)} \\ \lambda = -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con $\text{Tr}(A)$ y su producto coincide con $|A|$ así podrás detectar errores de cálculo



Lo que tú mandes ... bwuana entrenador

Como "A" tiene autovalores de distinto signo entonces "Q" es indefinida: en \mathcal{R}^3 hay vectores \bar{u} tales que $Q(\bar{u}) > 0$ y vectores \bar{v} tales que $Q(\bar{v}) < 0$.

- 3) Debemos determinar una base B^* del espacio vectorial \mathcal{R}^3 tal que la matriz asociada a "Q" respecto de dicha base sea diagonal. La base B^* es una base ortonormal de \mathcal{R}^3 formada por autovectores de la matriz "A", y para "construir" B^* cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su correspondiente subespacio de autovectores.



¡Mal rollo! como "A" es simétrica y $\lambda = -1$ aparece 2 veces como solución de $|A - \lambda \cdot I| = 0$, es seguro su subespacio de autovectores tiene dimensión 2 \Rightarrow si tengo mala suerte deberé recurrir a Graam-Schmidt rezaré un rosario

• **Autovectores de $\lambda = -1$**

$$(A + 1 \cdot I) \cdot \bar{p} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 1 indicado es

no nulo, eliminamos las ecuaciones primera y segunda y parametrizamos "y" y "z"; resulta $x = -y - z$; y así:

$$L(\lambda = -1) = \{(-a - b; a; b), \forall a, b \in \mathfrak{R}\} = \\ = \{a \bullet (-1; 1; 0) + b \bullet (-1; 0; 1), \forall a, b \in \mathfrak{R}\}$$

Los vectores $\bar{h}_1 = (-1; 1; 0)$ y $\bar{h}_2 = (-1; 0; 1)$ son una base del subespacio de autovectores asociados a $\lambda = -1$, pero por desgracia esta base no es ortogonal (pues los vectores que la forman no son ortogonales) \Rightarrow para calcular una base ortonormal del subespacio debemos calcular previamente una base $\{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$ que sea ortogonal, para lo que recurrimos a Gram-Schmidt:

$$\bar{d}_1 = \bar{h}_1 = (-1; 1; 0) \\ \bar{d}_2 = \bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1 = (-1; 0; 1) - \frac{1}{2} \bullet (-1; 1; 0) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$$

Para calcular " α " exigimos que \bar{d}_1 y \bar{d}_2 sean ortogonales:

$$\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_2 = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet (\bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet \bar{h}_2 + \alpha \bullet (\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-1; 1; 0) \bullet (-1; 0; 1) + \alpha \bullet (-1; 1; 0) \bullet (-1; 1; 0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + 2 \bullet \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

Los vectores $\bar{w}_1 = \bar{d}_1 / \|\bar{d}_1\|$ y $\bar{w}_2 = \bar{d}_2 / \|\bar{d}_2\|$ forman una base ortonormal del subespacio

$$\bar{w}_1 = \bar{d}_1 / \|\bar{d}_1\| = (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0) \\ \bar{w}_2 = \bar{d}_2 / \|\bar{d}_2\| = (-1/\sqrt{6}; -1/\sqrt{6}; \sqrt{2/3})$$

• Autovectores de $\lambda = 2$

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \bar{p} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos "z"; resulta:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 \cdot y = -z \\ x + y = 2 \cdot z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(c; c; c), \forall c \in \mathfrak{R}\} = \{c \bullet (1; 1; 1), \forall c \in \mathfrak{R}\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (1; 1; 1)$ es una base del subespacio, y una base ortonormal es la que forma el vector $\bar{w}_3 = \bar{h}_3 / \|\bar{h}_3\| = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$.

Recuerda: puedes detectar errores de cálculo comprobando que se cumple eso de que **autovectores asociados a autovalores dis-**

tintos de una matriz simétrica siempre son ortogonales.

• **Diagonalización de la forma cuadrática**

Como se ha indicado, para construir una base B^* de \mathbb{R}^3 que diagonalice a "Q" cada autovalor aporta una base ortonormal de su

subespacio de autovectores; así, el autovalor $\lambda = -1$ aporta los vectores \bar{w}_1 y \bar{w}_2 , y el autovalor $\lambda = 2$

Escúlpelo en tu cerebro: en un examen no importa lo que sabes importa lo que parece que sabes



aporta el vector \bar{w}_3 . En definitiva, es $B^* = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$, y tomando ésta como nueva base de referencia se modifican las coordenadas de \bar{p} ; como la matriz "C" asociada al cambio de la base canónica a la B^* es:

$$C = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $\bar{w}_1 \qquad \qquad \bar{w}_2 \qquad \qquad \bar{w}_3$

entonces, si \bar{p} tiene coordenadas $(x^*; y^*; z^*)$ respecto de la base B^* , es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \quad (II)$$

Sustituyendo (II) en la expresión de "Q" respecto de la base canónica (o sea, en (I)), obtenemos la expresión de "Q" respecto de la base B^* ; resulta:

$$Q(\bar{p}) = \left(C \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \right)^t \cdot A \cdot \left(C \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \right) =$$

$$= (x^*; y^*; z^*) \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^{C^t \cdot A \cdot C} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = -(x^*)^2 - (y^*)^2 + 2 \cdot (z^*)^2$$

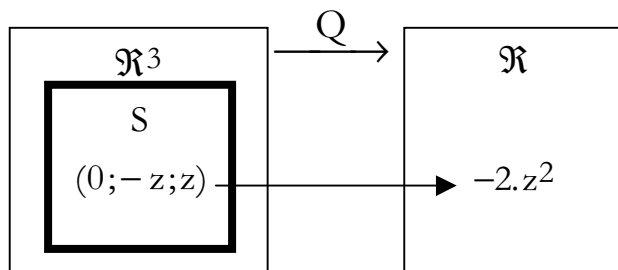
que es la expresión canónica de la forma cuadrática "Q".

3) Si $\bar{p} \in \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^2 / x + y + z = 0, x - y - z = 0\}$, es:

$$Q(\bar{p}) = 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot (-z) + 2 \cdot 0 \cdot z + 2 \cdot (-z) \cdot z = -2 \cdot z^2 < 0, \forall z \neq 0$$

$$\uparrow \text{ si } \bar{p} = (x; y; z) \text{ es tal que } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$



Por tanto, la forma cuadrática "Q" es definida negativa si se restringe al subespacio $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^2 / x + y + z = 0, x - y - z = 0\}$; es decir, salvo el vector "cero" de "S", los restantes vectores de "S" tienen imagen negativa según "Q".

EJERCICIO (0'5+0'5+0'5+0'5 PUNTOS)

$$\text{Sea } f(x; y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1) ¿Es continua en el punto $(0; 0)$?
- 2) ¿En qué dirección nos deberíamos mover desde el punto $(1; 1)$ para que la función "f" aumente lo más rápido posible?
- 3) Sabiendo que $v = (a; b) \in \mathbb{R}^2$ y $\|v\| = 1$, ¿es $D_v f(0; 0) = a^3 + b^3$?
- 4) Calcular $\nabla f(0; 0)$. Estudiar si "f" es diferenciable en el origen y, en caso afirmativo, calcular $D_v f(0; 0)$ si $v = (1; 1)$.

Solución

- 1) Como $f(0; 0) = 0$, la función "f" será continua en el punto $(0; 0)$ si su límite en dicho punto es 0, como en efecto sucede, pues $\forall \varepsilon > 0$, si $x = 0$ es:

$$|f(0; y) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon, \forall y$$

y si $x \neq 0$, es

$$|f(x; y) - 0| = \left| \frac{2 \cdot x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{2 \cdot x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{2 \cdot x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq$$

$$= 2 \cdot |x| \cdot \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| + |y| \cdot \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \cdot |x| + |y| < \varepsilon \text{ siempre que } |x| < \varepsilon/4 \text{ y } |y| < \varepsilon/2$$

2) Entre todos los vectores unitarios de \mathfrak{R}^2 , el vector $\nabla f(1;1)/\|\nabla f(1;1)\|$ es el que indica la dirección en que hemos de movernos desde (1;1) para que la función "f" aumente lo más rápido posible. Es:

$$\nabla f(1;1) = \left(\frac{5}{2}; -2 \right) \Rightarrow \nabla f(1;1)/\|\nabla f(1;1)\| = \text{lo que sea}$$

$$f_x(1;1) = \left(\frac{6 \cdot x^2 \cdot (x^2 + y^2) - 2 \cdot x \cdot (2 \cdot x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \right)_{(1;1)} = \frac{5}{2}$$

$$f_y(1;1) = \left(\frac{-3 \cdot y^2 \cdot (x^2 + y^2) - 2 \cdot y \cdot (2 \cdot x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \right)_{(1;1)} = -2$$

3) Siendo $v = (a;b) \in \mathfrak{R}^2$ y $\|v\| = 1$, no es cierto que $D_v f(0;0) = a^3 + b^3$:

$$D_v f(0;0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(0 + \delta \cdot a; 0 + \delta \cdot b) - f(0;0)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(\delta \cdot a; \delta \cdot b)}{\delta} =$$

por definición, si $v = (a;b)$

pues $f(0;0) = 0$

si $a = 0$, por lo que $b = 1$, pues $\|v\| = 1$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(0; \delta)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{0}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} 0 = 0 \neq \underbrace{0^3 + 1^3}$$

resultado que debería obtenerse en el caso $a = 0$ y $b = 1$
 si fuera cierto que $D_v f(0;0) = a^3 + b^3$

3) Es:

$$\nabla f(0;0) = (2;0)$$

$$* \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0 + \lambda; 0) - f(0;0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \lambda^3 - 0^3}{\lambda^2 + 0^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \lambda^3}{\lambda^3} = 2$$

$$* \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(0; 0 + \theta) - f(0;0)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 0 = 0$$

- La función "f" es diferenciable en el punto (0;0) si

$$\lim_{(h;k) \rightarrow (0;0)} \frac{f(0+h;0+k) - f(0;0) - \nabla f(0;0) \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Como $f(0;0) = 0$ y $\nabla f(0;0) \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = (2;0) \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = 2 \cdot h$, hay que comprobar si

$$\lim_{(h;k) \rightarrow (0;0)} \frac{f(h;k) - 2 \cdot h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

cosa que no sucede, pues si $k = m \cdot h$ (límite según rectas), el límite depende del valor de "m":

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(h;k) \rightarrow (0;0) \\ k=m \cdot h}} \frac{f(h;k) - 2 \cdot h}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h; m \cdot h) - 2 \cdot h}{\sqrt{h^2 + m^2 \cdot h^2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot h^3 - m^3 \cdot h^3}{h^2 + m^2 \cdot h^2} - 2 \cdot h}{\sqrt{h^2 + m^2 \cdot h^2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot h^3 - m^3 \cdot h^3 - 2 \cdot h^3 - 2 \cdot m^2 \cdot h^3}{(h^2 + m^2 \cdot h^2)^{3/2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-m^3 \cdot h^3 - 2 \cdot m^2 \cdot h^3}{(h^2 + m^2 \cdot h^2)^{3/2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-m^3 - 2 \cdot m^2}{(1 + m^2)^{3/2}} = \frac{-m^3 - 2 \cdot m^2}{(1 + m^2)^{3/2}} \end{aligned}$$