EXAMEN FEBRERO 2001

TEORÍA

Justificando la respuesta, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1) Si "A" es una matriz antisimétrica y "B" una matriz cuadrada cualquiera, entonces $Tr(A+B) = Tr(B)$.
2) Si "A" es una matriz simétrica A^3 es diagonalizable.
3) Si "A" es una matriz diagonal e idempotente, su rango es inferior a su traza.
4) Si $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es libre, cualquier subconjunto de "S" también es libre.
5) Si la matriz "A" es regular, las formas cuadráticas Q_1 y Q_2 tienen el mismo signo, siendo $Q_1(x) = x^t \bullet A \bullet x$ y $Q_2(x) = x^t \bullet A^{-1} \bullet x$.

Solución

1) Siendo "A" una matriz antisimétrica y "B" una matriz cuadrada cualquiera <u>del mismo orden que "A",</u> es cierto que $Tr(A+B) = Tr(B)$:

$$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B) = Tr(B)$$

$$\boxed{A = \{a_{ij}\} \text{ antisimétrica} \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow a_{ii} = 0 \Rightarrow Tr(A) = \sum a_{ii} = 0}$$

2) Verdadero, pues A^3 es simétrica, y toda matriz simétrica es diagonalizable:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la traspuesta de un producto de matrices es el producto de}\\ \text{las traspuestas en orden contrario}\end{array}}$$

$$(A^3)^t = (A \bullet A \bullet A)^t = A^t \bullet A^t \bullet A^t = A \bullet A \bullet A = A^3$$

$$\boxed{\text{"A" simétrica} \Rightarrow A^t = A}$$

3) Falso, y para demostrarlo vale el siguiente contraejemplo: la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es idempotente (pues $A \bullet A = A$) y diagonal, pero su rango no es inferior a su traza, pues $rg(A) = Tr(A) = 2$.

4) Verdadero. Sin pérdida de generalidad, consideremos el subconjunto S^* formado por los "k" $(k < n)$ primeros vectores de "S".

Por reducción al absurdo: si S^* fuera ligado existirían "k" números reales $\beta_1, \ldots, \beta_k$ <u>no todos nulos</u> y tales que

$$\beta_1 \bullet x_1 + \ldots + \beta_k \bullet x_k = 0$$

Así, también sería

$$\beta_1 \bullet x_1 + \ldots + \beta_k \bullet x_k + 0 \bullet x_{k+1} + 0 \bullet x_{k+2} + \ldots + 0 \bullet x_n = 0$$

Es decir, también existirían "n" números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ (siendo $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k, \alpha_{k+1} = 0, \ldots, \alpha_n = 0$) <u>no todos nulos</u> y tales que $\alpha_1 \bullet x_1 + \ldots + \alpha_n \bullet x_n = 0$, por lo que $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sería ligado, lo que va contra la hipótesis de que $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es libre.

5) Si $|A| \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$ no es autovalor de "A". Si $\lambda_i \neq 0$ es autovalor de "A", entonces $1/\lambda_i$ es autovalor de A^{-1}, y como λ_i y $1/\lambda_i$ tienen igual signo, las formas cuadráticas $Q_1(x) = x^t \bullet A \bullet x$ y $Q_2(x) = x^t \bullet A^{-1} \bullet x$ tienen igual signo.

TEORÍA

Siendo $f: E \mapsto F$ una aplicación lineal, demuestre que

$$\text{"f" es monomorfismo} \iff \text{Ker.f} = \{0\}$$

EJERCICIO (ECONOMÍA)

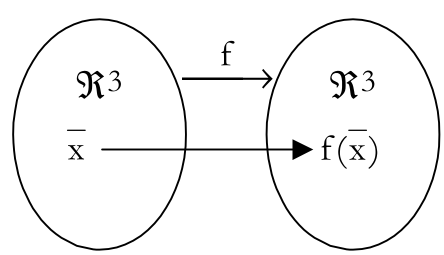
Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1; x_2; x_3) = (-x_1; 4.x_1 + 2.x_2 + x_3; 3.x_1 + 2.x_3)$.

Analizar si "f" es diagonalizable y en caso negativo de terminar una forma canónica de Jordan correspondiente a "f".

Solución

- La expresión matricial de "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{f(\bar{x}) \text{ respecto de } B_C} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{x} \text{ respecto de } B_C} \quad \text{(I)}$$



- Los autovalores son:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \text{ (doble)} \\ -1 \text{ (simple)} \end{cases}$$

- El endomorfismo "f" no es diagonalizable, pues las respectivas multiplicidades algebraica (vale 2) y geométrica del autovalor $\lambda = 2$ no coinciden:

$$\dim.L(\lambda = 2) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 2 \bullet I) = 3 - rg\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

- Como harán falta, determinemos los subespacios de autovectores:

$$(A - (-1) \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.x_1 + 3.x_2 = -x_3 \\ 3.x_1 = -3.x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(-a\,;a\,;a),\ \forall\ a \in \Re\}$$

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.x_1 + x_3 = 0 \\ 3.x_1 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(0;b;0),\ \forall\ b \in \Re\}$$

El que "f" no sea diagonalizable significa que no existe ninguna base de $\Re^3$ respecto de la que la matriz asociada a "f" sea diagonal; o sea, no hay ninguna matriz diagonal semejante a "A". Pero en $\Re^3$ es posible encontrar una base B_J de Jordan tal que la matriz "J" asociada a "f" respecto de B_J tiene en la diagonal principal los autovalores de "A", siendo unos o ceros los elementos situados en la 1ª paralela superior a dicha diagonal y ceros los demás elementos de la matriz; o sea, existe una matriz "J" de Jordan semejante a "A".

Construcción de una matriz "J" semejante a "A"

Como la multiplicidad algebraica de $\lambda = -1$ es 1, dicho autovalor aparece una vez en la diagonal principal de la matriz "J" de Jordan; como $\dim.L(\lambda = -1) = 1$, el autovalor $\lambda = -1$ "aporta" una caja de Jordan a la matriz "J". Como la multiplicidad algebraica del autovalor $\lambda = 2$ es 2, dicho autovalor aparece 2 veces en la diagonal principal de la matriz "J" de Jordan; como $\dim.L(\lambda = 2) = 1$, el autovalor $\lambda = 2$ "aporta" una caja de Jordan a la matriz "J". Así, según nos guste más, podemos elegir una cualquiera de las dos siguientes:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ó } J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

EJERCICIO (ADE)

Sea la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3) = 3.x_2^2 + 2.x_1.x_3$

1) Clasifíquela según su signo.
2) Halle su expresión canónica y la matriz de paso ortogonal.
3) Determine el signo de la forma cuadrática si se restringe al subespacio

$$S = \{(x_1;x_2;x_3)/x_1 - x_3 = 0\}$$

Solución

Consideramos que la base de referencia en $\Re^3$ es la canónica; así, entendemos que x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de un vector $\bar{p} \in \Re^3$ respecto de dicha base. Por tanto, la expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$Q(\bar{p}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (I)$$

- "Q" es indefinida, pues los autovalores de "A" son de signo distinto:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3, 1, -1$$

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 3$:

$$(A - 3 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -3.x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3.x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 3) = \{(0;\theta;0), \forall \theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (0;1;0), \forall \theta \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (0;1;0)$ es base del subespacio, y $\bar{u}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| = (0;1;0)$ es base ortonormal.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$:

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -x_1 = -x_3 \\ 2.x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(\theta;0;\theta), \forall \theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (1;0;1), \forall \theta \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_2 = (1;0;1)$ es base de $L(\lambda = 1)$, y $\bar{u}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| = (1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2})$ es base ortonormal.

• Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = -1$:

$$(A-(-1)\bullet I)\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&4&0\\1&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_1=-x_3\\4.x_2=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_1=-x_3\\x_2=0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-1)=\{(-\theta;0;\theta),\ \forall\theta\in\Re\}=\{\theta\bullet(-1;0;1),\ \forall\theta\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_3=(-1;0;1)$ es base de $L(\lambda=-1)$, y el vector

$$\bar{u}_3=\bar{h}_3/\|\bar{h}_3\|=(-1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2})$$

es base ortonormal.

• Si en $\Re^3$ tomamos como base de referencia la base ortonormal que forman los vectores $\bar{u}_1,\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$, se modifican las coordenadas de $\bar{p}\in\Re^3$, de modo que si $\bar{p}=x_1^*\bullet\bar{u}_1+x_2^*\bullet\bar{u}_2+x_3^*\bullet\bar{u}_3$, entonces:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}}^{C\equiv\text{matriz de "paso"}}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}\quad\text{(II)}$$

$$\begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\bar{u}_1&\bar{u}_2&\bar{u}_3\end{matrix}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión canónica de "Q":

$$Q(\bar{p})=\begin{bmatrix}x_1^*&x_2^*&x_3^*\end{bmatrix}\bullet(C^t\bullet A\bullet C)\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}x_1^*&x_2^*&x_3^*\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}=3.(x_1^*)^2+(x_2^*)^2-(x_3^*)^2$$

$$\boxed{C^t\bullet A\bullet C=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}}$$

• "Q" es definida positiva si se restringe al subespacio dado "S", pues:

$$Q(x_1;x_2;x_3)=3.x_2^2+2.x_1.x_3=3.x_2^2+2.x_3^2>0,\ \forall\ (x_2;x_3)\neq(0;0)$$

$$\boxed{S=\{(x_1;x_2;x_3)/x_1-x_3=0\}=\{(x_1;x_2;x_3)/x_1=x_3\}}$$

EJERCICIO (ADE)

Sea la aplicación lineal $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ definida como $f(x;y;z) = (x+y;x-z)$

Determinar el núcleo y la imagen de "f", y clasificar "f"

Determinar la expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2:

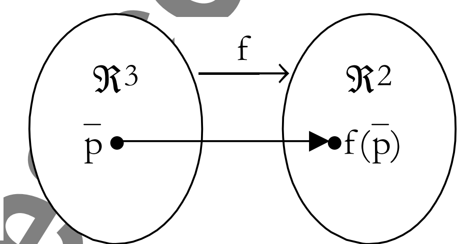
$$B_1 = \{(1;1;0),(0;1;1),(2;0;0)\}\ ;\ B_2 = \{(1;0),(1;1)\}$$

Solución

Consideramos que las bases de referencia en $\Re^3$ y $\Re^2$ son las respectivas canónicas; así, consideramos que $(x;y;z)$ son las coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^3$ de un vector cualquiera $\overline{p} \in \Re^3$, y que $(a;b)$ son las coordenadas del vector $f(\overline{p}) \in \Re^3$ respecto de la base canónica de $\Re^2$; así, es:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (I)$$

$f(1;0;0)$ $f(0;1;0)$ $f(0;0;1)$



- Es:

$$\ker.f = \{\overline{p} = (x;y;z) \in \Re^3 / f(\overline{p}) = \overline{0} \in \Re^2\} =$$
$$= \{\overline{p} = (x;y;z) \in \Re^3 / (x+y;x-z) = \overline{0} \in \Re^2\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+y=0 \\ x-z=0 \end{matrix}\right\} \underset{\boxed{\text{parametrizamos "z"}}}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} x=z \\ y=-z \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ker.f = \{(z;-z;z),\ \forall\, z \in \Re\} = \{z \bullet (1;-1;1),\ \forall\, z \in \Re\}$$

El vector $(1;-1;1)$ es una base del núcleo de "f".

La aplicación lineal "f" no es inyectiva (monomorfismo), pues el núcleo de "f" no está formado únicamente por el vector cero del espacio inicial $\Re^3$.

- Es $\text{Im}.f = \{\overline{n} \in \Re^2 / \exists\, \overline{p} \in \Re^3$ para el que es $f(\overline{p}) = \overline{n}\}$, siendo:

$$\dim.(\text{Im}.f) = \text{rg}\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} = 2 \Rightarrow \text{Im}.f = \Re^2$$

La aplicación lineal "f" es sobreyectiva (epimorfismo), pues Im.f coincide con el espacio final $\Re^2$.

- Para evitar que los vectores de las bases dadas B_1 y B_2 se depriman, les ponemos nombre:

$$B_1 = \{\bar{v}_1 = (1;1;0), \bar{v}_2 = (0;1;1), \bar{v}_3 = (2;0;0)\}$$
$$B_2 = \{\bar{u}_1 = (1;0), \bar{u}_2 = (1;1)\}$$

Si en $\Re^3$ tomamos como base de referencia la $B_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ en lugar de la canónica, se modifican las coordenadas de $\bar{x}$; así, si respecto de la base B_1 el vector $\bar{x} \in \Re^3$ tiene coordenadas $(x^*;y^*;z^*)$, es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{N} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{array}$$

Si en $\Re^2$ tomamos como base de referencia la $B_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ en lugar de la canónica, se modifican las coordenadas de $f(\bar{x})$; así, si respecto de la base B_2 el vector $f(\bar{x}) \in \Re^2$ tiene coordenadas $(a^*;b^*)$, es:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{M} \bullet \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} \quad \text{(III)}$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{array}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{M} \bullet \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = A \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{N} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = M^{-1} \bullet A \bullet N \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}$$

EJERCICIO (ECONOMÍA)

Siendo "A" una matriz regular, sea la matriz particionada $B=\begin{bmatrix} A/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2} \\ -A/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

Calcule B^{-1}. Si "A" es ortogonal, ¿lo es también "B"?

Solución

- Sea $B^{-1}=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T\end{bmatrix}$; exijamos que $B\bullet B^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}$:

$$B\bullet B^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} A/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2} \\ -A/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2}\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{r} A\bullet X/\sqrt{2}-Z/\sqrt{2}=I \\ A\bullet Y/\sqrt{2}-T/\sqrt{2}=0 \\ -A\bullet X/\sqrt{2}-Z/\sqrt{2}=0 \\ -A\bullet Y/\sqrt{2}-T/\sqrt{2}=I\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} X=A^{-1}/\sqrt{2} \\ Y=-A^{-1}/\sqrt{2} \\ Z=-I/\sqrt{2} \\ T=-I/\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

De la 2ª ecuación se obtiene $T=AY$, y al sustituir en la 4ª, resulta:

$$-A\bullet Y/\sqrt{2}-A\bullet Y/\sqrt{2}=I\Rightarrow -2A\bullet Y/\sqrt{2}=I\Rightarrow Y=-\frac{\sqrt{2}}{2}A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=A\bullet(-\frac{\sqrt{2}}{2}A^{-1})=-\frac{\sqrt{2}}{2}I$$

De la 3ª ecuación se obtiene $Z=-AX$, y al sustituir en la 1ª, resulta:

$$AX/\sqrt{2}+AX/\sqrt{2}=I\Rightarrow 2AX/\sqrt{2}=I\Rightarrow X=\frac{\sqrt{2}}{2}A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z=-A\bullet(\frac{\sqrt{2}}{2}A^{-1})=-\frac{\sqrt{2}}{2}I$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}/\sqrt{2} & -A^{-1}/\sqrt{2} \\ -I/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

- La matriz "B" será ortogonal si $B^t=B^{-1}$; veamos:

$$B=\begin{bmatrix} A/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2} \\ -A/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^t=\begin{bmatrix} A^t/\sqrt{2} & -A^t/\sqrt{2} \\ -I/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{-1}/\sqrt{2} & -A^{-1}/\sqrt{2} \\ -I/\sqrt{2} & -I/\sqrt{2}\end{bmatrix}\neq B$$

Si "A" es ortogonal entonces $A^t=A^{-1}$