EXAMEN SEPTIEMBRE 2000

01)Si la serie $\sum a_n$ es convergente, la serie $\sum \dfrac{e^{a_n}}{1+a_n^2}$

a) es convergente ; b) es divergente
c) puede ser convergente o divergente

02) Si la serie de términos positivos $\sum a_n$ es divergente, la serie $\sum (a_n + \dfrac{1}{n^3})$

a) es convergente ; b) es divergente
c) puede ser convergente o divergente

03) El desarrollo de Mac-Laurin de orden 2 de $f(x;y) = \text{sen}\,(x+2.y)$ es:

a) $x + 2.y + T_L$
b) $x + 2.y + \frac{1}{2}.(x^2 + 2.x.y + y^2) + T_L$; c) $1 + x + 2.y + T_L$

04) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \to \Re$ tal que $f(0;0) = 0$, el desarrollo de Mac-Laurin de orden 2 de $g(x;y) = e^{f(x;y)}$ es:

a) $1 + x.f_x(0;0) + y.f_y(0;0) + \frac{1}{2}.x^2.\left(f_{x^2}(0;0) + f_x^2(0;0)\right) +$
$+x.y.\left(f_{xy}(0;0) + f_x(0;0).f_y(0;0)\right) + \frac{1}{2}.y^2.\left(f_{y^2}(0;0) + f_y^2(0;0)\right) + T_L$
b) $1 + x.f_x(0;0) + y.f_y(0;0) + \frac{1}{2}.\left(x^2.f_{x^2}(0;0) + 2.x.y.f_{xy}(0;0) + y^2.f_{y^2}(0;0)\right) + T_L$
c) ninguna de las anteriores

05) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re^2$ tal que $f(x;y) = (\text{sen}\,(x-y); \text{Ln}\,(x.y))$; la matriz asociada a $Df(1;1)$ es:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

06) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $\partial f/\partial x$ no es continua en $(0;0)$; entonces:

a) "f" no es diferenciable en $(0;0)$; b) "f" no es continua en $(0;0)$
c) en general no se puede afirmar a) ni b)

07) Sea $g: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ y $f(x;y) = e^{g(x;y)}$; el dominio de "f" es:

a) $\text{Dom.} f = \text{Dom.} g$
b) $\text{Dom.} f = \Re^2$
c) $\text{Dom.} f = \Re^2 - \{(0;0)\}$

08) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $\partial f(x;y)/\partial x = -y^2$, entonces:

a) si "x" aumenta e "y" permanece constante, "f" disminuye
b) si "x" aumenta e "y" permanece constante, "f" no cambia
c) si "y" aumenta y "x" permanece constante, "f" disminuye

09) Sea $g: \Re^2 \mapsto \Re$ y un punto $(a;b) \in \Re^2$ tal que $\lim\limits_{x \to a} g(x;b+m.(x-a)) = 0$.

Sobre la función $f(x;y) = \dfrac{1}{1+g(x;y)}$ puede afirmarse que:

a) no existe el límite doble de "f" en $(a;b)$
b) puede existir el límite doble de "f" en $(a;b)$, en cuyo caso sería 1
c) existe el límite doble de "f" en $(a;b)$ y vale 1

10) Sea $F: G \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ una función diferenciable. Una condición suficiente para que la ecuación $F(x;y) = 0$ defina implícitamente a la variable "y" como función de "x" en un entorno del punto $(a;b) \in G$ es:

$$\text{a) } \frac{\partial F(a;b)}{\partial x} \neq 0 \ ; \ \text{b) } \frac{\partial F(a;b)}{\partial y} \neq 0 \ ; \ \text{c) } \frac{\partial F(a;b)}{\partial x} = 0$$

11) Dada $z = Ln(u^2.v)$ con $u = x.y.t$ y $v = sen^2 x.y$, se verifica que:

$$\text{a) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{x} + \frac{2.y}{tg\ x.y} \ ; \ \text{b) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{x} + \frac{y}{tg^2\ x.y} \ ; \ \text{c) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{x} + \frac{2.y}{tg^2\ x.y}$$

12) Sea la ecuación $F(x;y) = 0$ que define implícitamente a la variable "y" como función de "x"; supongamos además que $x = z^2$, entonces:

$$\text{a) } \frac{dy}{dz} = -2.z\frac{F_x}{F_y} \ ; \ \text{b) } \frac{dy}{dz} = -2.z\frac{F_z}{F_y} \ ; \ \text{c) } \frac{dy}{dz} = -2.z\frac{F_x}{F_z}$$

13) La función de producción $Q(K;L) = 5.K^{2.a}.L^a$ tiene rendimientos de escala constantes si

a) $a = 0$; b) $a = 1/3$; c) $a = 1$

14) Si $f: \Re^2 \to \Re$ es homogénea de grado "r", entonces $g(x;y) = \dfrac{f_{x^2}(x;y)}{f_y(x;y)}$

a) no es homogénea ; b) es homogénea de grado $r-1$
c) es homogénea de grado -1

15) El valor de $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ es

a) $2/3$; b) $3/2$; c) 1

16) Si "f" y "g" son integrables en $[a;b]$ entonces:

$$a)\ \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}.dx = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx$$
$$b)\ \int_a^b (f(x)-g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_b^a g(x).dx$$
$$c)\ \int_a^b (f(x)+g(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b g(x).dx,\ \forall\ c \in (a;b)$$

17) La integral impropia $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2.p-1}.(\text{sen } x)^{2.q-1}.dx$ es convergente si

a) $\forall$ p,q enteros ; b) $\forall$ $p,q>0$; c) $\forall$ p,q reales

18) Dada $I=\int_0^1\int_0^{y^2} f(x;y).dx.dy$, cambiando el orden de integración

a) $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 f(x;y).dy.dx$; b) $\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^1 f(x;y).dy.dx$; c) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} f(x;y).dy.dx$

Solución

01) La b), pues $\sum \frac{e^{a_n}}{1+a_n^2}$ es una STP que no cumple la CN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}}{1+a_n^2} = \frac{e^0}{1+0} = 1 \neq 0$$

$\boxed{a_n \to 0 \text{ cuando } n\to\infty, \text{ pues } \sum a_n \text{ es convergente}}$

02) La b), pues $\sum (a_n + \frac{1}{n^3}) > \sum a_n$ y $\sum a_n$ es divergente.

03) La a), pues $f(0;0)=0$, $\nabla f(0;0)=(1;2)$, $Hf(0;0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

04) La a), pues:

$$g(0;0)=e^{f(0;0)}=e^0=1$$
$$g_x(0;0)=f_x(0;0).e^{f(0;0)}=f_x(0;0)$$
$$g_y(0;0)=f_y(0;0).e^{f(0;0)}=f_y(0;0)$$
$$g_{x^2}(0;0)=f_{x^2}(0;0).e^{f(0;0)}+(f_x(0;0))^2.e^{f(0;0)}=f_{x^2}(0;0)+(f_x(0;0))^2$$
$$g_{y^2}(0;0)=f_{y^2}(0;0).e^{f(0;0)}+(f_y(0;0))^2.e^{f(0;0)}=f_{y^2}(0;0)+(f_y(0;0))^2$$
$$g_{xy}(0;0)=f_{xy}(0;0).e^{f(0;0)}+f_y(0;0).f_x(0;0).e^{f(0;0)}=f_{xy}(0;0)+f_y(0;0).f_x(0;0)$$

05) La b), pues la matriz asociada a $Df(1;1)$ es $Jf(1;1)$

06) La c), pues puede suceder que una función sea diferenciable en un punto (y por tanto continua en dicho punto) sin que sus funciones derivadas primeras sean continuas en el punto en cuestión.

07) La a)

08) La a), pues $\partial f(x;y)/\partial x = -y^2 < 0$

09) La b): aunque no hay garantía de que "g" tenga límite doble en $(a;b)$, si lo tiene es 0 (pues $\lim\limits_{x \to a} g(x;b+m.(x-a)) = 0$), y en tal caso "f" tiene límite 1.

10) Supuesto que $(a;b) \in G$ satisface $F(x;y)=0$, la correcta es la b).

11) La a):

$$\frac{\partial z}{\partial x} \underset{\boxed{\text{Regla de la cadena}}}{=} \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = (\frac{2}{u}).(y.t) + (\frac{1}{v}).(2.y.\text{sen}(x.y).\cos(x.y)) \underset{\boxed{u = x.y.t\ ;\ v = \text{sen}^2 x.y}}{=}$$

$$= (\frac{2}{x.y.t}).(y.t) + (\frac{1}{\text{sen}^2 x.y}).(2.y.\text{sen}(x.y).\cos(x.y)) =$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{2.y.\cos x.y}{\text{sen}\, x.y} = \frac{2}{x} + \frac{2.y}{\text{tg}\ x.y}$$

12) La a): $$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dz} = -2.z.\frac{F_x}{F_y}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } x = z^2 \Rightarrow \dfrac{dx}{dz} = 2.z \\ \text{si } F(x;y)=0 \text{ define a "y" como función de "x"} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} \end{array}}$$

13) La b): $Q(K;L) = 5.K^{2.a}.L^{a}$ es homogénea de grado $3.a$, y tiene rendimientos de escala constantes si $3.a = 1$.

14) La b): si "f" es homogénea de grado "r", entonces $f_{x^2}(x;y)$ es homogénea de grado "$r-2$" y $f_y(x;y)$ es homogénea de grado "$r-1$", por lo que el cociente entre ambas es homogéneo de grado $(r-2)-(r-1)=-1$

15) La b): $\int_0^1 x^0.(1-x)^{-1/3}.dx = \beta(1;2/3) = \dfrac{\Gamma(1).\Gamma(2/3)}{\Gamma(5/3)} = \dfrac{\Gamma(2/3)}{(2/3).\Gamma(2/3)} = \dfrac{3}{2}$

16) $\int_a^b (f(x)-g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_b^a g(x).dx$

17) La b), pues $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2.p-1}.(\text{sen } x)^{2.q-1}.dx = \dfrac{\beta(p;q)}{2}$

18) La a), el dominio de integración es el que limitan el eje de ordenadas, la recta $y=1$ y la parábola $x=y^2$.

EJERCICIO (1 PUNTO)

Siendo "D" el dominio limitado por $x.y=4,\ x.y=1,\ y=1,\ y=4,$ calcular

$$\iint_D y.\text{sen}\,(x.y).dx.dy$$

Utilice el cambio de variables $x=u/v,\ y=v.$

Solución

En general, si para calcular la integral doble de $f(x;y)$ en el dominio "D" hacemos el cambio de variables $x=h_1(u;v),\ y=h_2(u;v),$ es:

$$\iint_D f(x;y).dx.dy=\iint_{D^*} f(h_1(u;v);h_2(u;v)).\left|J\right|.du.dv$$

donde D* es el dominio en que se transforma "D" como consecuencia del cambio de variables y "J" es el jacobiano de dicho cambio.

En nuestro caso es $x=u/v,\ y=v,$ es $x.y=u;$ así, si para calcular la integral doble hacemos el cambio de variables indicado, el dominio "D" se transforma en el D* limitado por $u=4,\ u=1,\ v=1,\ v=4$.

El jacobiano del cambio es:

$$J=\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/v & -u/v^2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{v}$$

Por tanto:

$$\boxed{y=v\ ;\ x.y=u\ ;\ dx.dy=\left|J\right|.du.dv=\left|\frac{1}{v}\right|.du.dv}$$

$$\iint_D y.\text{sen}\,(x.y).dx.dy=\iint_{D^*} v.\left|\frac{1}{v}\right|.\text{sen}\,u.du.dv=\iint_{D^*}\text{sen}\,u.du.dv=$$

$$\boxed{\text{en el dominio } D^* \text{ es } v>0, \text{ por lo que } \left|\frac{1}{v}\right|=\frac{1}{v}}$$

$$=\int_{v=1}^{v=4}\left(\int_{u=1}^{u=4}\text{sen}\,u.du\right).dv=3.(\cos 1-\cos 4)$$

EJERCICIO (0'5 PUNTOS)

Estudie el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^n+\text{Ln}\,a},\ a>1$

Solución

Si $a>1$ la serie es de términos positivos, y es divergente, pues no cumple la CN:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+\text{Ln}\,a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\text{Ln}\,a}{a^n}}=\frac{1}{1+\dfrac{\text{Ln}\,a}{+\infty}}=\frac{1}{1+0}=1\neq 0$$

EJERCICIO (0'75 PUNTOS)

Determine los valores de "a" para los que es convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^a}$

Solución

Si $a = 1$, es:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+2} = \lim_{M \to +\infty} \int_1^{M} \frac{dx}{x+2} = \lim_{M \to +\infty} \left(\mathrm{Ln}\left|x+2\right|\right)_1^M =$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left(\mathrm{Ln}\left|M+2\right| - \mathrm{Ln}\ 3\right) = +\infty$$

Si $a \neq 1$, es:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^a} = \lim_{M \to +\infty} \int_1^{M} \frac{dx}{(x+2)^a} = \lim_{M \to +\infty} \left(\frac{(x+2)^{-a+1}}{-a+1}\right)_1^M =$$

$$= \frac{1}{1-a} \cdot \lim_{M \to +\infty} \left((M+2)^{-a+1} - 3^{-a+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-a} \cdot \left((+\infty)^{-a+1} - 3^{-a+1}\right) = \begin{cases} \infty & \text{si } -a+1 > 0 \\ \dfrac{3^{-a+1}}{a-1} & \text{si } -a+1 < 0 \end{cases}$$

En definitiva, la integral dada es convergente sólo si $-a+1 < 0 \Rightarrow a > 1$.

EJERCICIO (1'25 PUNTOS)

Sea la función $f: \Re^2 \mapsto \Re$ definida como $f(x;y) = \frac{x^2}{x^2+y-2} . \mathrm{sen}\, \frac{x^2}{y-2}$

1) Determine su dominio de definición
2) Calcule los límites reiterados en el punto $(0;2)$. En ese mismo punto, calcule los limites direccionales por rectas y parábolas.
3) Si definimos $f(0;2) = 0$, ¿es continua la función en dicho punto?

Solución

1) Es $\mathrm{Dom.} f = \left\{(x;y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y - 2 \neq 0,\ y - 2 \neq 0\right\}$

2) Es:

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 2} \frac{x^2}{x^2+y-2} . \mathrm{sen}\, \frac{x^2}{y-2}\right) = \text{no existe}$$

$$\boxed{\text{pues sen } \frac{x^2}{y-2} \text{ carece de límite cuando } y \to 2}$$

$$\lim_{y \to 2} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+y-2} . \mathrm{sen}\, \frac{x^2}{y-2}\right) = \lim_{y \to 2} \left(\frac{0}{y-2} . \mathrm{sen}\, \frac{0}{y-2}\right) = \lim_{y \to 2} (0) = 0$$

Si la trayectoria de aproximación de $(x;y)$ a $(0;2)$ es la recta $y = 2 + m.(x-0)$ entonces:

$$\lim_{x\to 0} f(x;2+m.(x-0)) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m.x}.\text{sen}\,\frac{x^2}{m.x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+m}.\text{sen}\,\frac{x}{m} = \frac{0}{0+m}.\text{sen}\,\frac{0}{m} = 0$$

Si la trayectoria de aproximación de es la parábola $y = 2 + m.(x-0)^2$ entonces:

$$\lim_{x\to 0} f(x;2+m.(x-0)^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m.x^2}.\text{sen}\,\frac{x^2}{m.x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+m}.\text{sen}\,\frac{1}{m} = \frac{1}{1+m}.\text{sen}\,\frac{1}{m}$$

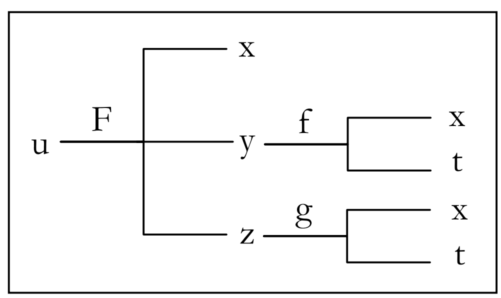
3) La función no es continua en $(0;2)$, pues carece de límite doble en dicho punto (ya que el límite según la parábola $y = 2 + m.(x-0)^2$ depende de "m").

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Sea la función diferenciable $F(x;y;z)$, con $y = f(x;t)$ y $z = g(x;t)$, siendo diferenciables $f:\Re^2 \mapsto \Re$ y $g:\Re^2 \mapsto \Re$. Calcular $\nabla F(x;t)$, F_{x^2} y F_{t^2}.

Solución

Denotando $u = F(x;y;z)$, como $y = f(x;t)$ y $z = g(x;t)$, el valor de la variable "u" sólo depende de los valores de las variables "x" y "t"; así, entendemos que al pedir $\nabla F(x;t)$ nos piden la rapidez u_x con que varía "u" si varía "x" (sin variar "t") y la rapidez u_t con que varía "u" si varía "t" (sin variar "x").



Según la regla de la cadena, es:

$$u_x = F_x + F_y.f_x + F_z.g_x$$
$$u_t = F_y.f_t + F_z.g_t$$

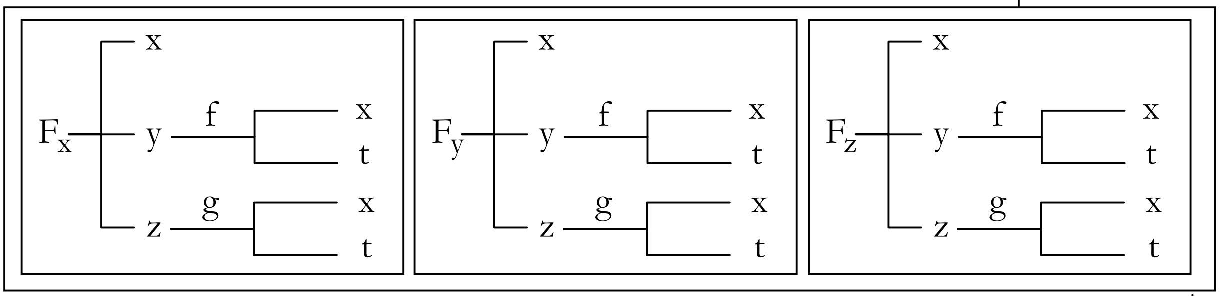
Al pedir F_{x^2} piden la rapidez u_{x^2} con que varía u_x si varía "x" (sin variar "t"); al pedir F_{t^2} piden la rapidez u_{t^2} con que varía u_t si varía "t" (sin variar "x").

Es:

$$u_{x^2} = \frac{\partial(u_x)}{\partial x} = \frac{\partial(F_x + F_y.f_x + F_z.g_x)}{\partial x} = \frac{\partial(F_x)}{\partial x} + \frac{\partial(F_y.f_x)}{\partial x} + \frac{\partial(F_z.g_x)}{\partial x} =$$

En los dos últimos sumandos aplicamos la regla de derivación del producto

$$= \frac{\partial (F_x)}{\partial x} + \frac{\partial (F_y)}{\partial x}.f_x + F_y.\frac{\partial (f_x)}{\partial x} + \frac{\partial (F_z)}{\partial x}.g_x + F_z.\frac{\partial (g_x)}{\partial x} =$$



$$= \underbrace{(F_{x^2} + F_{yx}.f_x + F_{zx}.g_x)}_{\partial F_x/\partial x} + \underbrace{(F_{xy} + F_{y^2}.f_x + F_{zy}.g_x)}_{\partial F_y/\partial x}.f_x + F_y.f_{x^2} +$$

$$+\underbrace{(F_{xz} + F_{yz}.f_x + F_{z^2}.g_x)}_{\partial F_z/\partial x}.g_x + F_z.g_{x^2}$$

Es:

$$u_{t^2} = \frac{\partial (u_t)}{\partial t} = \frac{\partial (F_y.f_t + F_z.g_t)}{\partial t} = \frac{\partial (F_y.f_t)}{\partial t} + \frac{\partial (F_z.g_t)}{\partial t} =$$

En cada sumando aplicamos la regla de derivación del producto

$$= \frac{\partial (F_y)}{\partial t}.f_t + F_y.\frac{\partial (f_t)}{\partial t} + \frac{\partial (F_z)}{\partial t}.g_t + F_z.\frac{\partial (g_t)}{\partial t} =$$

$$= \underbrace{(F_{y^2}.f_t + F_{zy}.g_t)}_{\partial F_y/\partial t}.f_t + F_y.f_{t^2} + \underbrace{(F_{yz}.f_t + F_{z^2}.g_t)}_{\partial F_z/\partial t}.g_t + F_z.g_{t^2}$$

TEORÍA (1 PUNTO)

Demostrar que si la función $f: G \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ es diferenciable en un punto $a \in G$, entonces es derivable direccionalmente según la dirección de cualquier vector no nulo $v \in \Re^n$ en dicho punto.

TEORÍA (1 PUNTO)

Demostrar que si la función $f: \Re^2 \mapsto \Re$ es de clase C^2 y homogénea de grado 1 entonces su determinante hessiano es cero.