EXAMEN SEPTIEMBRE 2000

01) Sean "A" y "B" matrices simétricas de orden "n", siendo "A" definida negativa y "B" definida positiva. Si $Q(x) = x^t(A - B)x$, entonces "Q" es:

a) definida positiva ; b) definida negativa ; c) indefinida

02) Si λ es autovalor de "A", ¿cuál de los siguientes valores es autovalor $A - I$?

a) $\lambda - 1$; b) $\lambda + 1$; c) λ

03) Sean "A" y "B" matrices semejantes. Si "A" es diagonalizable, entonces:

a) "B" es diagonalizable y tiene los mismos vectores propios que "A"
b) "B" es diagonalizable y tiene los mismos valores propios que "A"
c) "B" no es necesariamente diagonalizable

04) Dada la forma cuadrática $Q(x) = x^t(A - B)x$, con $A \in M_{2\times 2}(\Re)$, y $|A| < 0$

a) "A" es definida negativa ; b) "A" es indefinida
c) "A" puede ser semidefinida

05) Sea $A \in M_{3\times 3}(\Re)$ una matriz cuyos vectores propios son los vectores del conjunto $< (1;1;0), (0;0;-1) >$. Entonces:

a) "A" es diagonalizable
b) "A" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "A" es diagonalizable

06) Sea $Q(x;y;z) = (-1)^{\alpha}.x^2 + z^2 + 2.\alpha.x.y + 2.\alpha.y.z$, donde α es un natural impar. ¿Cuál es el signo de "Q" en el subespacio $S = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \, / \, y = 0\right\}$?

a) indefinida
b) definida positiva
c) definida negativa

07) De los siguientes conjuntos de autovalores, ¿cuál corresponde necesariamente a una matriz diagonalizable de orden 3?:

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
c) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$

08) Sea $A \subset \Re^2$ un conjunto y "a" un punto interior a "A". Entonces:

a) "A" no es un conjunto cerrado ; b) "A" es un conjunto abierto
c) En general, las anteriores son falsas

09) Sea $A \in M_{3\times 3}(\Re)$ con $tr(A) > 0$ y $|A| < 0$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Re$ son los valores propios de "A", ¿cuál puede ser el signo de los autovalores de "A"?

a) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$; b) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$
c) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$

10) Si $H = \{(a;a;0), (a;0;b), (a^2;b;b), (0;a;a)\} \subset \Re^3$, entonces:

a) "H" es libre ; b) "H" es ligado
c) "H" puede ser libre o ligado según sean los valores de "a" y "b"

11) Si "A" es una matriz idempotente, ¿cuál no es cierta?:

a) $-A$ es idempotente ; b) A^t es idempotente
c) Si "A" es regular $\Rightarrow A^{-1}$ es idempotente

12) Sean "U" y "V" dos espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales y $f: U \mapsto V$ una aplicación. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) $f(-u) = f(u) \Rightarrow$ "f" es aplicación lineal
b) $\forall u \in U, \forall \alpha \in \Re$ es $f(\alpha u) = \alpha f(u) \Rightarrow$ "f" es aplicación lineal
c) "f" es aplicación lineal $\Rightarrow f(0_U) = 0_V$

13) Dada una aplicación lineal $f: \Re^5 \mapsto \Re^2$ tal que $\dim(\ker. f) = 3$, entonces:

a) "f" es monomorfismo ; b) "f" es epimorfismo
c) No se puede saber si "f" es epimorfismo

14) Sea $f: E \mapsto F$ un monomorfismo, es cierto que:

a) $\dim(Im. f) = \dim(F)$
b) $\dim(Im. f) = \dim(E)$
c) $\dim(Im. f) = 0$

15) Sea "Q" una forma cuadrática cuya matriz asociada es idempotente, ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es cierta?

a) "Q" puede ser definida positiva
b) "Q" puede ser semidefinida positiva
c) "Q" puede ser indefinida

16) Sea "A" una matriz cuadrada tal que uno de sus valores propios es $\lambda = 0$; así:

a) $\lambda = 0$ también es valor propio de A^t
b) $\lambda = 0$ es valor propio de $A + B$ para toda matriz cuadrada "B"
c) en general, las anteriores no se cumplen

Caravija 2, 968 237301

17) Sea "A" una matriz cuadrada tal que uno de sus valores propios es $\lambda = 0$; así:

a) $\lambda = 0$ es valor propio de $A - B$ para toda matriz cuadrada "B"
b) $\lambda = 0$ es valor propio de $A \bullet B$ para toda matriz cuadrada "B"
c) en general, las anteriores no se cumplen

18) Dada la matriz particionada $C = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & A^t \end{bmatrix}$, siendo "A" ortogonal, es:

a) $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^t & -I \\ 0 & A \end{bmatrix}$; b) $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^t & I \\ 0 & A \end{bmatrix}$; c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^t & -A \\ 0 & A \end{bmatrix}$

Solución

01) Si "A" es definida negativa $\Rightarrow x^tAx < 0$.

Si "B" definida positiva $\Rightarrow x^tBx > 0$.

Así: $Q(x) = x^t(A - B)x = x^tAx - x^tBx < 0 \Rightarrow$ "Q" es definida negativa.

02) Como todo el mundo sabe, si λ es autovalor de "A", entonces $\lambda + k$ es autovalor de $A + k \bullet I$; por tanto, $\lambda - 1$ es autovalor de $A - 1 \bullet I \equiv A - I$.

03) Si "A" es diagonalizable $\Rightarrow \exists\, P / P^{-1} \bullet A \bullet P = \Lambda$ (siendo Λ una matriz diagonal); y si "A" y "B" son semejantes $\Rightarrow \exists\, C / C^{-1} \bullet B \bullet C = A$. Por tanto:

$$C^{-1} \bullet B \bullet C \underset{\boxed{P^{-1} \bullet A \bullet P = \Lambda \Rightarrow A = P \bullet \Lambda \bullet P^{-1}}}{=} P \bullet \Lambda \bullet P^{-1} \Rightarrow P^{-1} \bullet C^{-1} \bullet B \bullet C \bullet P = \Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (C \bullet P)^{-1} \bullet B \bullet (C \bullet P) = \Lambda \Rightarrow \text{"B" es diagonalizable}$$

Es sabido que dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores.

04) El determinante de una matriz cuadrada es el producto de sus autovalores; por tanto si "A" es cuadrada de orden 2 ($\Rightarrow$ tiene 2 autovalores) y su determinante es negativo, entonces los dos autovalores tienen distinto signo, por lo que la forma cuadrática $Q(x) = x^tAx$ es indefinida.

05) La matriz $A \in M_{3\times 3}(\Re)$ no es diagonalizable pues con sus vectores propios (el subespacio de $\Re^3$ engendrado por los vectores $(1;1;0)$ y $(0;0;-1)$) no se puede formar una base de $\Re^3$.

06) Es:

$$Q(x;y;z) \underset{\boxed{\text{sustituimos "y" por } 0}}{=} (-1)^{\alpha}.x^2 + z^2 + 2.\alpha.x.y + 2.\alpha.y.z =$$

$$= (-1)^{\alpha}.x^2 + z^2 \underset{\boxed{\alpha \text{ impar } \Rightarrow (-1)^{\alpha} = -1}}{=} -x^2 + z^2 = \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \text{indefinida}$$

07) El tercero, pues todos los autovalores son distintos.

08) El que un conjunto $A \subset \Re^2$ tenga un punto interior no garantiza que "A" sea abierto, ni que sea cerrado.

09) La traza de una matriz cuadrada "A" coincide con la suma de sus autovalores; así, siendo $tr(A) > 0$, los autovalores no pueden todos negativos ($\Rightarrow$ a) es falsa). El determinante de una matriz cuadrada es el producto de sus autovalores; así, $\lambda = 0$ no es autovalor de "A" si $det.(A) < 0$ ($\Rightarrow$ b) es falsa).

10) Es ligado, pues como $\dim(\Re^3) = 3$, el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en $\Re^3$ es 3.

11) Si "A" es una matriz idempotente ($\Rightarrow A^2 = A$), entonces:

a) $(-A)^2 = (-A) \bullet (-A) = A^2 = A \neq -A \Rightarrow -A$ no es idempotente

b) $(A^t)^2 = A^t \bullet A^t = (A \bullet A)^t = (A^2)^t = A^t \Rightarrow A^t$ es idempotente

c) $(A^{-1})^2 = A^{-1} \bullet A^{-1} = (A \bullet A)^{-1} = (A^2)^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ es idempotente

12) Si $f: U \mapsto V$ es una aplicación lineal, la imagen del vector cero del espacio inicial "U" siempre es el vector cero del espacio final "V".

13) Siempre es $\dim(\ker.f) + \dim(\text{Im}.f) = \dim(\text{Espacio Inicial})$; o sea:

$$3 + \dim(\text{Im}.f) = 5 \Rightarrow \dim(\text{Im}.f) = 2 = \dim(\text{Espacio Final}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{"f" es sobreyectiva (epimorfismo)}$$

14) $$\dim(\ker.f) + \dim(\text{Im}.f) = \dim(\text{Espacio Inicial}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Si "f" es monomorfismo } \Rightarrow \ker.f = \{\bar{0}\} \Rightarrow \dim(\ker.f) = 0}$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im}.f) = \dim(\text{Espacio Inicial})$$

15) Todo el mundo requetesabe que los autovalores de una matriz idempotente sólo pueden tomar los valores 0 y 1; por ello, siendo "Q" una forma cuadrática cuya matriz asociada es idempotente, entonces "Q" no puede ser indefinida (su matriz asociada no tiene autovalores positivos y autovalores negativos).

16) La correcta es a): los autovalores de una matriz cuadrada son los mismos que los de su traspuesta.

17) El determinante de una matriz cuadrada es el producto de sus autovalores; así, si $\lambda = 0$ es autovalor de "A", es $|A| = 0$, y como $|A \bullet B| = |A|.|B| = 0.|B| = 0$, podemos garantizar que $\lambda = 0$ es autovalor de $A \bullet B$.

18) Recuerda que si "A" es ortogonal, entonces $A^t = A^{-1}$.

La correcta es la a): al exigir que $\begin{bmatrix} A & I \\ 0 & A^t \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, resulta:

$$\begin{bmatrix} AX + Z & AY + T \\ A^tZ & A^tT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} AX + Z = I \\ AY + T = 0 \\ A^tZ = 0 \\ A^tT = I \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = A^t \\ Y = -I \\ Z = 0 \\ T = A \end{cases}$$

TEORÍA (2 PUNTOS)

Justificando la respuesta, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1) Si "A" y "B" son matrices cuadradas de rango "n" y rango máximo "n", la matriz $A \bullet B$ y la matriz particionada $(A\ B)$ tienen rango "n".

2) Si $f: E \mapsto \Re$ y $g: E \mapsto \Re$ son aplicaciones lineales, la aplicación $f.g: E \mapsto \Re$ definida como $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ es aplicación lineal.

3) Sea "v" vector propio de una matriz "A", asociado a un valor propio λ; al mismo tiempo, "v" es vector propio de otra matriz "B" asociado al un valor propio μ. Entonces "v" es vector propio asociado a la matriz $A \bullet B$ y $A + B$.

4) Si "B" es una matriz ortogonal y "A" es una matriz del mismo orden que "B", entonces $B^t \bullet A \bullet B$ y "A" tienen el mismo polinomio característico.

5) Si $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ es una aplicación lineal con matriz asociada "A" semidefinida (positiva o negativa), entonces "f" es monomorfismo.

Solución

1) Es cierto que $rg(A \bullet B) = n$, pues si "A" y "B" son matrices cuadradas y su rango máximo es "n", entonces son cuadradas de orden "n". Además, si es $rg(A) = rg(B) = n$, entonces "A" y "B" tienen determinante no nulo, por tanto:

$$|A \bullet B| = |A|.|B| \neq 0 \Rightarrow rg(A \bullet B) = n$$

Es cierto que la matriz particionada $(A\ B)$ tiene rango "n", pues como dicha matriz tiene "n" filas y "2.n" columnas, su rango máximo es "n"; y es $rg(A\ B) = n$ porque en $(A\ B)$ existe un menor no nulo de orden "n" (el determinante de "A" o de "B").

2) Falso, pues:

$$(f.g)(\alpha \bullet x) = f(\alpha \bullet x).g(\alpha \bullet x) = \alpha^2 \bullet f(x).g(x) =$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Como "f" y "g" son aplicaciones lineales, es:}\\ f(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet f(x)\ ;\ g(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet g(x)\end{array}}$$

$$= \alpha^2 \bullet (f.g)(x) \neq \alpha \bullet (f.g)(x)$$

3) Verdadero, pues:
Si "v" es vector propio de "A" asociado al autovalor $\lambda \Rightarrow A \bullet v = \lambda \bullet v$.
Si "v" es vector propio de "B" asociado al autovalor $\mu \Rightarrow B \bullet v = \mu \bullet v$.
Es: $(A + B) \bullet v = A \bullet v + B \bullet v = \lambda \bullet v + \mu \bullet v = (\lambda + \mu) \bullet v$.
Es: $(A \bullet B) \bullet v = A \bullet (B \bullet v) = A \bullet (\mu \bullet v) = \mu \bullet (A \bullet v) = \mu \bullet (\lambda \bullet v) = (\mu.\lambda) \bullet v$.

4) Verdadero: si "B" es una matriz ortogonal, entonces $B^t = B^{-1}$; así, sucede que $H = B^t \bullet A \bullet B = B^{-1} \bullet A \bullet B$; por tanto, las matrices "H" y "A" son semejantes, lo que garantiza que tienen el mismo polinomio característico.

5) Falso: si la matriz "A" asociada a la aplicación lineal $f:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^3$ es semidefinida (positiva o negativa) $\Rightarrow \lambda = 0$ es autovalor de "A" $\Rightarrow$ "A" tiene determinante nulo (recuerda que el determinante de "A" es el producto de sus autovalores) $\Rightarrow \mathrm{rg}(A) < \dim(\text{Espacio Inicial}) \Rightarrow$ "f" no es monomorfismo (no es inyectiva).

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Demuestre que autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

EJERCICIO (1'75 PUNTOS)

Sea la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4.x_3^2 + 4.x_2.x_3$

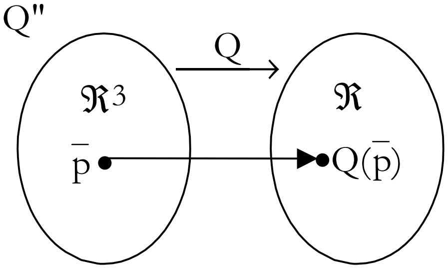
1) Clasifíquela según su signo.
2) Halle su expresión canónica y la matriz de paso ortogonal.
3) Si $a \in \mathfrak{R}$ es un parámetro cualquiera, determine el signo de la forma cuadrática si se restringe al subespacio "S", siendo:

$$S = \left\{ (x_1;x_2;x_3) \middle/ \begin{matrix} x_1 - a.x_2 = 0 \\ x_2 - 2.x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

Solución

Consideramos que la base de referencia en el espacio vectorial $\mathfrak{R}^3$ es la canónica; así, entendemos que x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de un vector $\overline{p} \in \mathfrak{R}^3$ respecto de dicha base. Por tanto, la expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica de $\mathfrak{R}^3$ es:

$$Q(\overline{p}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (I)$$



1) La forma cuadrática "Q" es semidefinida positiva, pues todos los autovalores de "A" son no negativos (≥ 0):

$$\left| A - \lambda \bullet I \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 6.\lambda^2 - 5.\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda.(\lambda^2 - 6.\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,1,5$$

Caravija 2, 968 237301

• Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 0$:

$$(A - 0 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -2.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 0) = \{(0; -2.\theta; \theta), \forall\theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (0; -2; 1), \forall\theta \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (0; -2; 1)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\bar{u}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| = (0; -2/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5})$$

es una base ortonormal del subespacio.

• Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$:

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2.x_3 = 0 \\ 2.x_2 + 3.x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(\theta; 0; 0), \forall\theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (1; 0; 0), \forall\theta \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_2 = (1; 0; 0)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\bar{u}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| = (1; 0; 0)$$

es una base ortonormal del subespacio.

• Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 5$:

$$(A - 5 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -4.x_1 = 0 \\ 2.x_3 = 4.x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 2.x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 5) = \{(0; \theta; 2.\theta), \forall\theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (0; 1; 2), \forall\theta \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (0; 1; 2)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\bar{u}_3 = \bar{h}_3 / \|\bar{h}_3\| = (0; 1/\sqrt{5}; 2/\sqrt{5})$$

es una base ortonormal del subespacio.

• Si en el espacio $\Re^3$ tomamos como base de referencia la base ortonormal que forman los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$, se modifican las coordenadas de $\bar{p} \in \Re^3$, de modo que si $\bar{p} = x_1^* \bullet \bar{u}_1 + x_2^* \bullet \bar{u}_2 + x_3^* \bullet \bar{u}_3$, entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}^{C \equiv \text{matriz de "paso"}} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \end{array}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión canónica de la forma cuadrática "Q" (o sea, la expresión de "Q" respecto de la base ortonormal de $\Re^3$ que forman los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$); resulta:

$$Q(\bar{p}) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{C^t \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = (x_2^*)^2 + 5.(x_3^*)^2$$

- La forma cuadrática "Q" es definida positiva si se restringe al subespacio dado "S", ya que:

$$Q(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4.x_3^2 + 4.x_2.x_3 =$$

$$= (2.a.x_3)^2 + (2.x_3)^2 + 4.x_3^2 + 4.(2.x_3).x_3 =$$

$$\boxed{S = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \Big/ \begin{matrix} x_1 - a.x_2 = 0 \\ x_2 - 2.x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \Big/ \begin{matrix} x_1 = 2.a.x_3 \\ x_2 = 2.x_3 \end{matrix} \right\}}$$

$$= (16 + 4.a^2).x_3^2 > 0, \ \forall \ x_3 \neq 0$$

EJERCICIO (1'75 PUNTOS)

Sea la aplicación lineal $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ definida como:

$$f(x;y) = (3.x - y;y;2.x + y)$$

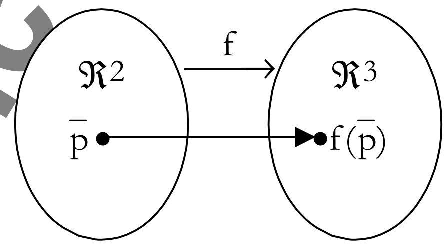
1) Hallar la matriz asociada a "f" respecto de las bases canónicas
2) Determinar el núcleo y la imagen de "f", y clasificar "f"
3) A partir de la matriz de 1), determinar la matriz asociada a "f" respecto de las bases $\{(-1;0),(1;2)\}$ de $\Re^2$ y $\{(1;1;0),(1;-1;0),(0;0;1)\}$ de $\Re^3$.

Solución

1) Consideramos que $(x;y)$ son las coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^2$ de un vector cualquiera $\overline{p} \in \Re^2$, y que $(u;v;w)$ son las coordenadas del vector $f(\overline{p}) \in \Re^3$ respecto de la base canónica de $\Re^3$; así, es:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (I)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(1;0) & f(0;1) \end{array}$$



2) Es:

$$\ker.f = \{\overline{p} = (x;y) \in \Re^2 \,/\, f(\overline{p}) = \overline{0} \in \Re^3\} =$$
$$= \{\overline{p} = (x;y) \in \Re^2 \,/\, (3.x - y;y;2.x + y) = \overline{0} \in \Re^3\} =$$
$$= \left\{ \overline{p} = (x;y) \in \Re^2 \Big/ \begin{array}{r} 3.x - y = 0 \\ y = 0 \\ 2.x + y = 0 \end{array} \right\} = \{(0;0) \in \Re^2\}$$

Como $\ker.f = \{(0;0) \in \Re^2\}$, entonces "f" es monomorfismo (inyectiva).

- Es $\mathrm{Im}.f = \{\overline{k} \in \Re^3 \,/\, \exists\, \overline{p} \in \Re^2$ para el que es $f(\overline{p}) = \overline{k}\}$, siendo:

$$\dim.(\mathrm{Im}.f) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(1;0) & f(0;1) \end{array}$$

Los vectores $f(1;0) = (3;0;2)$ y $f(0;1) = (-1;1;1)$ son una base de Im.f; y como $\mathrm{Im}.f \neq \Re^3$, entonces "f" no es epimorfismo (no es sobreyectiva).

3) Si $(x^*;y^*)$ son las coordenadas de $\overline{p}$ respecto de la base $\{(-1;0),(1;2)\}$, es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ (-1;0) & (1;2) \end{array}$$

- Si $(u^*;v^*;w^*)$ son las coordenadas del vector $f(\overline{p}) \in \Re^3$ respecto de la base $\{\overline{k}_1 = (1;1;0), \overline{k}_2 = (1;-1;0), \overline{k}_3 = (0;0;1)\}$, es:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} \quad \text{(III)}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \overline{k}_3 \end{array}$$

- Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de las bases $\{(-1;0),(1;2)\}$ de $\Re^2$ y $\{(1;1;0),(1;-1;0),(0;0;1)\}$ de $\Re^3$; resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$