EXAMEN JUNIO 2000

01) Si la función $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ tiene límite 3 en el punto $(a;b)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones no se cumple siempre?:

a) si $f(a;b)=3$, "f" es continua en $(a;b)$

b) existen los dos límites reiterados de "f" en $(a;b)$ y valen 3

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x;m.(x-a)+b)$ existe y vale 3

02) Sea una función $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ y un punto $(a;b) \in D$, ¿cuál de las siguientes condiciones garantiza que "f" es diferenciable en $(a;b)$?

a) $\lim\limits_{(x;y) \to (a;b)} \left(f(x;y) - f(a;b) - f_x(a;b)(x-a) - f_y(a;b)(y-b) \right) = 0$

b) $\lim\limits_{(x;y) \to (a;b)} \dfrac{f(x;y) - f(a;b) - f_x(a;b)(x-a) - f_y(a;b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$

c) $\lim\limits_{(x;y) \to (a;b)} \left(f(x;y) - f_x(a;b)(x-a) - f_y(a;b)(y-b) \right) = 0$

03) Sea una función $g: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ y la función "f" dada por $f(x;y) = \text{Ln } g(x;y)$.

a) Dom. $f =$ Dom. g

b) Dom. $f =$ Dom. $g \cap \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ g(x;y) > 0\}$

c) Dom. $f = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ g(x;y) \geq 0\}$

04) Si $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ es tal que $\lim\limits_{x \to 0} f(x;m.x+1) = 1, \ \forall \ m$, entonces:

a) Existe $\lim\limits_{(x;y) \to (0;1)} f(x;y)$ y vale 1

b) Si existe $\lim\limits_{(x;y) \to (0;1)} f(x;y)$, entonces vale 1

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x;m.x^2+1) = 1, \ \forall \ m$

05) Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 7^{a_n}$

a) es convergente ; b) es divergente

c) puede ser divergente u oscilante

06) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 2)$

a) es convergente ; b) es divergente
c) puede ser divergente u oscilante

07) Sea una función $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ y un punto $(a;b) \in D$. Si $v = (v_1; v_2)^t$, la derivada direccional $D_v f(a;b)$ viene dada por

a) $Jf(a;b) \bullet v$; b) $\nabla f(a;b)^t \bullet v$; c) $\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{f(a+\lambda.v_1; b+\lambda.v_2) - f(a;b)}{\lambda}$

08) Sea $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ tal que en todo punto cumple $\nabla f(x;y)^t = (x^2; -y^4)$

a) Si "x" aumenta e "y" permanece constante, la función aumenta
b) Si "y" aumenta y "x" permanece constante, la función aumenta
c) No se cumple necesariamente ni a) ni b)

09) Si $f(x;y) = 3.e^{x-y}$, su desarrollo de Mac-Laurin de segundo orden es

a) $3 + 3.x - 3.y + \frac{3}{2}.x^2 - 3.x.y + \frac{3}{2}.y^2 + T_L$; b) $3.x - 3.y + T_L$
c) $3.x - 3.y + \frac{3}{2}.x^2 - 3.x.y + \frac{3}{2}.y^2 + T_L$

10) Sea $F: G \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ una función homogénea de grado cero. Si la ecuación $F(x;y) = 0$ define a la variable "y" como función de "x" en un entorno del punto $(a;b) \in G$, entonces:

a) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$; b) $y'(x) = \dfrac{x}{y(x)}$; c) $y'(x) = 0$

11) Si $f: G \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ es una función de clase C^3 homogénea de grado 3, la función $f_{x^2}(x;y) + f_{y^2}(x;y)$

a) No es homogénea ; b) Es homogénea de grado 1
c) Es homogénea de grado 3

12) Sea $f: G \subseteq \Re^3 \mapsto \Re$ tal que $\nabla^t f(x;y;z) = (1; 1/y; 1/\sqrt{1-z^2})$; si $x = u + v$,

$$x = u + v \; ; \; y = e^{u.v} \; ; \; z = \text{sen } u.v$$

entonces

a) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 1 + 2.v$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 1 + e^{u.v} + \cos u.v$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 1 + \dfrac{1}{e^{u.v}} + \dfrac{1}{\cos u.v}$

13) La ecuación $x^2.y + y.z^2 - 2.z = 0$ define a "z" como función implícita de "x" e "y" en un entorno del punto

$$a)\ (0;1;2)\ ;\ b)\ (-1;1;1)\ ;\ c)\ (1;2;1)$$

14) Sean "f" y "g" dos funciones integrables en el intervalo $[a;b]$, entonces

$$a)\ \int_a^b f(x).dx = \int_a^a g(x).dx - \int_b^a f(x).dx$$

$$b)\ \int_a^b f(x).g(x).dx = f(x).\int_a^b g(x).dx + g(x).\int_a^b f(x).dx$$

$$c)\ \int_a^b (f(x)+g(x)).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b g(x).dx,\ \forall\ c \in (a;b)$$

15) Al cambiar el orden de integración en $I = \int_1^2 \int_1^{x^2} x.y.dy.dx$ resulta

$$a)\ \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 x.y.dx.dy\ ;\ b)\ \int_2^{\sqrt{y}} \int_1^4 x.y.dx.dy\ ;\ c)\ \int_1^4 \int_2^{\sqrt{y}} x.y.dx.dy$$

16) Sea $f(x)$ continua $\forall\ x \in [0;b]$, con $b > 0$. Podemos afirmar que:

a) Si "F" es una primitiva de la función f(x), entonces $\int_0^b f(x).dx = F(b)$

b) La función f(x) siempre admitirá primitivas en en el intervalo $[0;b]$

c) La función f(x) no siempre admitirá primitivas en en el intervalo $[0;b]$

17) Señale la respuesta correcta

$$a)\ \beta(2;p) = \frac{1}{p.(p+1)}\ ;\ b)\ \beta(1;1) = \sqrt{\pi}\ ;\ c)\ \beta(p;q) = -\beta(q;p)$$

Solución

01) El que "f" tenga límite en el punto $(a;b)$ no garantiza la existencia de los dos límites reiterados de "f" en $(a;b)$.

02) La b)

03) La b)

04) La b)

05) La b), pues $\sum 7^{a_n}$ es una STP que no cumple la C.N. de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} 7^{a_n} \underset{\uparrow}{=} 7^0 = 1 \neq 0$$

$$\boxed{\text{Como } \sum a_n \text{ es convergente entonces } a_n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty}$$

06) La b), pues $\sum(a_n^2-2)=-\sum(2-a_n^2)$ y $\sum(2-a_n^2)$ es una STP que no cumple la C.N, ya que $2-a_n^2 \to 2 \neq 0$ cuando $n\to\infty$.

07) La c)

08) La a), pues la derivada de "f" respecto de "x" es positiva.

09) La a)

10) La a)

$\boxed{\text{pues } F(x;y)=0 \text{ define a "y" como función de "x"}}$

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y}{x}$$

$\boxed{\text{"F" homogénea de grado 0 } \Rightarrow x.F_x+y.F_y=0 \Rightarrow \frac{F_x}{F_y}=-\frac{y}{x}}$

11) La b): si "f" es homogénea de grado 3, todas sus funciones derivadas segundas son homogéneas de grado $3-2=1$.

12) La a):

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u}=$$

$$=1.1+\frac{1}{y}.v.e^{u.v}+\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.v.\cos u.v=1+2.v$$

$$\boxed{\text{pues}\begin{cases} y=e^{u.v} \\ z=\operatorname{sen} u.v \Rightarrow \sqrt{1-z^2}=\cos u.v \end{cases}}$$

13) La a)

14) La a), pues $\int_a^a g(x).dx=0$ y es $-\int_b^a f(x).dx=\int_a^b f(x).dx$

15) La a)

16) La b)

17) La a): $\beta(2;p)=\frac{\Gamma(2).\Gamma(p)}{\Gamma(2+p)}=\frac{\Gamma(2).\Gamma(p)}{p.(p+1).\Gamma(p)}=\frac{\Gamma(2)}{p.(p+1)}=\frac{1!}{p.(p+1)}=\frac{1}{p.(p+1)}$

TEORÍA (1'25 PUNTOS)

Demostrar que si $f:\Re^n\to\Re$ es una función de clase C^1 y homogénea de grado "r", sus derivadas primeras son homogéneas de grado "$r-1$".

TEORÍA (1'25 PUNTOS)

Enuncie y demuestre la ley de recurrencia de la función $\Gamma(p)$

TEORÍA (1 PUNTO)

Sea $f(x;y)$ una función homogénea de grado 1 y clase 3. Demuestre que su desarrollo de Taylor de orden 2 en el punto $(a;b)$ está dado por

$$f(x;y) = x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) +$$
$$+\frac{1}{2}.\left(x^2.f_{x^2}(a;b) + 2.x.y.f_{xy}(a;b) + y^2.f_{y^2}(a;b)\right) + T_L$$

Solución

El desarrollo de Taylor de orden 2 de "f" en el punto $(a;b)$ es:

$$f(x;y) = f(a;b) + (x-a).f_x(a;b) + (y-b).f_y(a;b) +$$
$$+\frac{1}{2}.\left((x-a)^2.f_{x^2}(a;b) + 2.(x-a).(y-b).f_{xy}(a;b) + (y-b)^2.f_{y^2}(a;b)\right) + T_L =$$

Como "f" es homogénea de grado 1, según el teorema de Euler, en $(a;b)$ es:

$$a.f_x(a;b) + b.f_y(a;b) = f(a;b) \Rightarrow f(a;b) - a.f_x(a;b) - b.f_y(a;b) = 0$$

Como "f" es homogénea de grado 1, sus funciones derivadas primeras f_x y f_y son homogéneas de grado cero. Aplicando el teorema de Euler a la función f_x en el punto $(a;b)$, es:

$$a.\frac{\partial(f_x(a;b))}{\partial x} + b.\frac{\partial(f_x(a;b))}{\partial y} = 0 \Rightarrow a.f_{x^2}(a;b) + b.f_{xy}(a;b) = 0 \quad \text{(I)}$$

y aplicando el teorema de Euler a la función f_y en el punto $(a;b)$, es:

$$a.\frac{\partial(f_y(a;b))}{\partial x} + b.\frac{\partial(f_y(a;b))}{\partial y} = 0 \Rightarrow a.f_{xy}(a;b) + b.f_{y^2}(a;b) = 0 \quad \text{(II)}$$

Si multiplicamos respectivamente por "a" y "b" las ecuaciones (I) y (II) y después las sumamos miembro a miembro, resulta ser:

$$a^2.f_{x^2}(a;b) + 2.a.b.f_{xy}(a;b) + b^2.f_{y^2}(a;b) = 0$$

Si multiplicamos respectivamente por "x" e "y" las ecuaciones (I) y (II) y después las sumamos miembro a miembro, resulta ser:

$$a.x.f_{x^2}(a;b) + b.x.f_{xy}(a;b) + a.y.f_{xy}(a;b) + b.y.f_{y^2}(a;b) = 0$$

$$= x.f_x(a;b) + y.f_y(a;b) +$$
$$+\frac{1}{2}.\left(x^2.f_{x^2}(a;b) + 2.x.y.f_{xy}(a;b) + y^2.f_{y^2}(a;b)\right) + T_L$$

EJERCICIO (1 PUNTO)

Mediante el cambio a coordenadas polares, calcule $\iint_D (x^2+y^2).dx.dy$, siendo

$$D=\{(x;y)\in\Re^2 \;/\; x^2+y^2\le 4,\; y\ge 0,\; x\ge y\}$$

Solución

El dominio "D" es el primer octante del circulo de centro en el origen y radio 2

$$\iint_D (x^2+y^2).dx.dy=\iint_D \rho^3.d\rho.d\theta=$$

$$=\int_{\rho=0}^{\rho=2}\left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} d\theta\right).\rho^3.d\rho=\frac{\pi}{4}.\int_{\rho=0}^{\rho=2}\rho^3.d\rho=\frac{\pi}{4}.\left(\frac{1}{4}.\rho^4\right)_{\rho=0}^{\rho=2}=\pi$$

EJERCICIO (1'25 PUNTOS)

Probar que $f:\Re^2\to\Re$ admite derivadas de primer orden en cualquier punto de $\Re^2$ pero no es diferenciable en $(0;0)$.

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x.y}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y)\ne(0;0)\\ 0 & \text{si } (x;y)\ne(0;0)\end{cases}$$

Solución

Las derivadas primeras de "f" en el punto $(0;0)$ son:

$$f_x(0;0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(0+\lambda;0)-f(0;0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\dfrac{(0+\lambda).0}{(0+\lambda)^2+0^2}-0}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{0}{\lambda}=0$$

$$f_y(0;0)=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(0;0+\theta)-f(0;0)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\dfrac{0.(0+\theta)}{0^2+(0+\theta)^2}-0}{\lambda}=\lim_{\theta\to 0}\frac{0}{\theta}=0$$

Aunque en un punto $(x;y)\ne(0;0)$ podemos calcular $f_x(x;y)$ y $f_y(x;y)$ con las reglas de derivación, quedaremos mejor si usamos la definición:

$$f_x(x;y)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda;y)-f(x;y)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\dfrac{(x+\lambda).y}{(x+\lambda)^2+y^2}-\dfrac{x.y}{x^2+y^2}}{\lambda}=$$

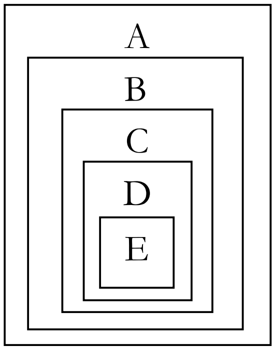
$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{(x^2+y^2).y-(\lambda+2.x).x.y}{((x+\lambda)^2+y^2).(x^2+y^2)}=y.\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x;y)=x.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Como $f(x;y)=f(y;x)$, para obtener $f_y(x;y)$ basta sustituir "x" por "y" e "y" por "x" en $f_x(x;y)$

La función "f" carece de límite en el punto $(0;0) \Rightarrow$ no es continua en $(0;0) \Rightarrow$ no es diferenciable en $(0;0)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x;m.x) = \lim_{x \to 0} \frac{x.(m.x)}{x^2 + m^2.x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$



$A \equiv$ todas las funciones de $\Re^2$ en $\Re$

$B \equiv$ tienen límite en $(a;b) \in \Re^2$

$C \equiv$ son continuas en $(a;b) \in \Re^2$

$D \equiv$ son diferenciables en $(a;b) \in \Re^2$

$E \equiv$ tienen funciones derivadas 1as continuas en $(a;b) \in \Re^2$

EJERCICIO (1'25 PUNTOS)

Pruebe que el sistema

$$2.x^3.e^u - 2 + v^2.\text{Ln } y = 0$$
$$x.y^2 - e^u.v^2 = 0$$

define implícitamente a "u" y "v" como funciones de "x" e "y" en el entorno del punto $p = (x;y;u;v) = (1;1;0;1)$. Calcule las derivadas parciales $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$ en el punto $(1;1)$.

Solución

Sean $F{:}\Re^4 \mapsto \Re$ y $G{:}\Re^4 \mapsto \Re$ definidas como

$$F(x;y;u;v) = 2.x^3.e^u - 2 + v^2.\text{Ln } y$$
$$G(x;y;u;v) = x.y^2 - e^u.v^2$$

El sistema dado define implícitamente a "u" y "v" como funciones de "x" e "y" en el entorno del punto $p = (1;1;0;1)$, pues "p" satisface las dos ecuaciones del sistema, las funciones "F" y "G" son de clase C^1 en el punto "p" y es

$$\left|\begin{matrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{matrix}\right|_p = \left|\begin{matrix} 2.x^3.e^u & 2.v.\text{Ln } y \\ -e^u.v^2 & -2.v.e^u \end{matrix}\right|_p = \left|\begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{matrix}\right| \neq 0$$

A partir del sistema dado no es posible explicitar (despejar) los valores de "u" y "v" en función de los valores de "x" e "y"; así, para calcular la rapidez con que cambia "u" cuando cambia "x" (o sea, u_x) y la rapidez con que cambia "v" cuando cambia "x" (o sea, v_x) resolvemos el sistema de ecuaciones que se obtiene al derivar respecto de "x" los dos miembros de cada ecuación del sistema dado:

$$\left.\begin{array}{l} F_x + F_u.u_x + F_v.v_x = 0 \\ G_x + G_u.u_x + G_v.v_x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_x \\ G_x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2.x^3.e^u & 2.v.Ln\, y \\ -e^u.v^2 & -2.v.e^u \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6.x^2.e^u \\ y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{si} \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 1 \end{array}\right.}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_x(1;1) \\ v_x(1;1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_x(1;1) = \dfrac{\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = -3 \\ v_x(1;1) = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = 2 \end{array}\right.$$