EXAMEN FEBRERO 2000

01) Dados dos conjuntos "A" y "B" cualquiera, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

$$a)\ A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c\ ;\ b)\ A \subset B \Rightarrow A^c \subset B^c\ ;\ c)\ A \subset B \Rightarrow A^c = B$$

02) Si $x \bullet y$ denota el producto escalar de dos vectores del espacio vectorial "E", ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Si $x \bullet y = 0 \Rightarrow$ los vectores "x" e "y" son linealmente independientes
b) Si $x \bullet y = 0 \Rightarrow$ los vectores "x" e "y" son linealmente dependientes
c) Si $x \bullet y = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $y = 0$

03) Si "E" es un espacio vectorial y $S = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ es un conjunto de vectores de "E" linealmente independientes, entonces:

$$a)\ 0 \in S\ ;\ b)\ \text{Dim.}(E) = n\ ;\ c)\ x_i \neq x_j,\ \forall\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots.,n$$

04) Sea $f: \Re^n \mapsto \Re^m$ una aplicación lineal con matriz asociada $A \in M_{m \times n}(\Re)$, y $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)^t$ representa a un vector de $\Re^n$, podemos afirmar que:

a) "f" es un monomorfismo $\Leftrightarrow$ el sistema $Ax = 0$ es compatible determinado
b) "f" es un epimorfismo $\Leftrightarrow$ el sistema $Ax = 0$ es compatible indeterminado
c) "f" es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ el sistema $Ax = 0$ es incompatible

05) Sean "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, ambas ortogonales. ¿Cuál de las siguientes matrices particionadas es ortogonal?

$$a)\ M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} A & B \\ -A & -B \end{bmatrix}\ ;\ b)\ N = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} A & -B \\ -A & -B \end{bmatrix}\ ;\ c)\ P = \begin{bmatrix} A & (B(AB)^t)^t \\ 0 & -A \end{bmatrix}$$

06) Sean "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, es cierto que:

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$
c) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

07) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re^2$ una aplicación lineal, ¿cuál de las siguientes afirmaciones no siempre es cierta?

a) $f(-(x;y)) + f(x;y) = (0;0),\ \forall\ (x;y) \in \Re^2$
b) $f(0;0) = (0;0)$
c) $f(1;0) = (1;0)$ y $f(0;1) = (0,1)$

08) Sean $f:E \mapsto F$ y $g:F \mapsto G$ dos aplicaciones lineales tales que:

$$E = (\ker.f) \cup \{x \,/\, f(x) \in \ker.g\}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) $g \bullet f$ es la aplicación nula ; b) $g \bullet f$ es monomorfismo
c) Si $g \bullet f$ es monomorfismo, entonces "g" es la aplicación nula

09) Sea "A" una matriz con ecuación característica $(\lambda - 1).(\lambda - 5).(\lambda - b)$

a) "A" es diagonalizable si $b = 1$ ó $b = 5$
b) "A" es diagonalizable siempre
c) "A" es diagonalizable si $b \neq 1$ y $b \neq 5$

10) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 3 con autovalores 1, -1 y 3; entonces:

a) "A" no es diagonalizable ; b) traza(A) = 3 ; c) $|A| = 8$

11) Sea "A" es una matriz regular de orden 3, ¿cuál de las siguientes opciones puede corresponder al conjunto de valores propios de "A"?:

a) $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 = 3$ (doble) ; b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 1$
c) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$

12) Sea "A" una matriz diagonalizable y "P" la matriz tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces:

a) $A^3 = D^3 = D$; b) $A^3 = P^3D^3(A^{-1})^3$; c) $A^3 = A$

13) Los valores propios de una matriz "A" de orden 3 son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 1$, y sus subespacios propios asociados son:

Subespacio propio de λ_1 y $\lambda_2 = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, z = x + y\}$
Subespacio propio de $\lambda_3 = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x = 2.z,\ y = 0\}$

entonces:

a) "A" no es diagonalizable ; b) "A" es diagonalizable
c) No es posible saber si "A" es diagonalizable o no

14) Sea $Q(x) = x^tAx$ una forma cuadrática semidefinida positiva. Entonces, al restringirla a un subespacio puede ser:

a) indefinida ; b) definida positiva ; c) definida negativa

15) Si la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 2.x_2^2 + a.x_3^2 + 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3$,

siendo $a \in \Re$, es semidefinida, entonces: a) $a = 0$; b) $a = 2$; c) $a \le 0$

16) Sean "A" y "B" dos matrices cuadradas del mismo orden, tales que la forma cuadrática que tiene como matriz asociada el producto $A \bullet B$ es semidefinida positiva, entonces:

a) $|A \bullet B| = 0$; b) $|A|$ y $|B|$ tiene el mismo signo
c) $|A|$ y $|B|$ tiene distinto signo

17) Si la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3) = a.x_1^2 + b.x_2^2 + 3.x_3^2$ es indefinida, los posibles valores para los parámetros "a" y "b" son:

a) $a \le 0$ y $b < 0$; b) $a > 0$ y $b = 0$; c) $a \ge 0$ y $b \ge 0$

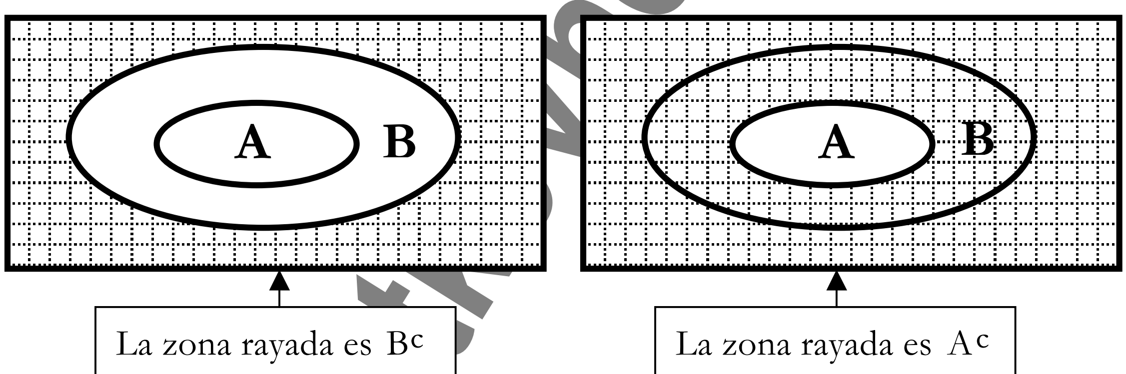
18) Si "A" es el conjunto formado por los inversos de los números naturales, ¿cuál de los siguientes puntos es punto de acumulación de "A"?

a) 0 ; b) 1 ; c) 1/2

EL "PESO" DEL TEST EN LA NOTA FINAL ES DE 3 PUNTOS

Solución

01) La correcta es la a).



02) La correcta es la a), famosa propiedad.

03) La a) es una falsa (todo conjunto "S" que contenga al vector cero es "ligado"; o sea, los vectores que forman "S" son LD). La b) es falsa, pues si los "n" vectores de "S" son LI, entonces $\dim.(E) \ge n$. La c) es correcta, pues si los "n" vectores que forman "S" son LI, en "S" no hay dos vectores iguales.

04) La correcta es la a): si $f: \Re^n \mapsto \Re^m$ es un monomorfismo $\Rightarrow$ el núcleo de "f" está formado sólo por el vector cero de $\Re^n \Rightarrow$ el sistema homogéneo $Ax = 0$ sólo tiene la solución trivial (es compatible y determinado).

05) La correcta es la b), pues $NN^t = I$:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{bmatrix} A & -B \\ -A & -B \end{bmatrix}\right)}_{N}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{bmatrix} A^t & -A^t \\ -B^t & -B^t \end{bmatrix}\right)}_{N^t} =$$

$$= \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} AA^t + BB^t & -AA^t + BB^t \\ -AA^t + BB^t & AA^t + BB^t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{"A" y B" ortogonales del mismo orden } \Rightarrow AA^t = BB^t = I}$$

06) La correcta es la c).

07) La a) y la b) son ciertas siempre, no así la c).

08) La correcta es la a):

$$\text{Si } x \in E \Rightarrow \begin{cases} x \in \ker.f \Rightarrow f(x) = 0 \in F \Rightarrow g(f(x)) = g(0) = 0 \in G \\ \text{ó} \\ f(x) \in \ker.g \Rightarrow g(f(x)) = 0 \in G \end{cases}$$

$$\boxed{\text{pues } E = (\ker.f) \cup \{x \,/\, f(x) \in \ker.g\}}$$

09) La correcta es la c), pues en tal caso los autovalores son todos distintos.

10) La a) es falsa (pues los autovalores de "A" son todos distintos). La c) es falsa, pues el determinante de "A" es el producto de los autovalores de "A". La b) es correcta, pues la traza de "A" coincide con la suma de los autovalores de "A".

11) La correcta es la c): si "A" tiene determinante no nulo (es regular), ningún autovalor de "A" puede ser el número cero.

12) La correcta es la c):

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^3 = A^2A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D^3 = \begin{bmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D}$$

13) La correcta es la b), pues la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica.

14) La correcta es la b), pues si todos los alumnos de la Facultad tienen coeficiente intelectual no negativo (≥ 0), puede suceder que todos los alumnos de cuarto curso tengan coeficiente intelectual positivo.

15) La correcta es la b), pues si la FC es semidefinida, debe anularse el determinante de su matriz asociada "A", pues sólo así ocurre que $\lambda = 0$ es autovalor de "A":

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

16) Si la FC que tiene como matriz asociada $A \bullet B$ es semidefinida positiva, entonces $\lambda = 0$ es autovalor de $A \bullet B$, lo que sólo sucede si $\left|A \bullet B\right| = 0$.

17) La c) es falsa, pues si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces "Q" no es indefinida:

$$Q(x_1;x_2;x_3) = a.x_1^2 + b.x_2^2 + 3.x_3^2 \geq 0,\ \forall\ (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3$$

La b) es falsa, pues si $a > 0$ y $b = 0$, entonces "Q" no es indefinida:

$$Q(x_1;x_2;x_3) \underbrace{=}_{\boxed{\text{si } b=0}} a.x_1^2 + 3.x_3^2 \underbrace{\geq}_{\boxed{\text{si } a>0}} 0,\ \forall\ (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3$$

La a) es verdadera, pues si $a \leq 0$ y $b < 0$, entonces "Q" es indefinida:

$$Q(0;0;x_3) = 3.x_3^2 > 0,\ \forall\ x_3 \in \Re$$
$$Q(0;x_2;0) = b.x_2^2 < 0,\ \forall\ x_2 \in \Re$$

18) La correcta es la a), pues el único punto de acumulación de una sucesión es su límite (si existe), y el límite de la sucesión 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... ,1/n, ... es el número 0 (si $n \to \infty \Rightarrow 1/n \to 0$).

<u>TEORÍA (2 PUNTOS)</u>

Justificando la respuesta, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1) Si "A" es idempotente y regular $\Rightarrow$ "A" es la matriz unidad.

2) Si "A" es una matriz cuadrada $\Rightarrow$ la matriz $B = A + A^t$ es simétrica.

3) Dos matrices semejantes no tienen los mismos valores propios.

4) Si $f: E \mapsto E$ es un endomorfismo con matriz asociada "A" ortogonal, entonces "f" es un isomorfismo

<u>*Solución*</u>

1) Verdadero, si "A" es idempotente entonces $A \bullet A = A$, y al multiplicar por la izquierda por la matriz A^{-1} (cuya existencia está garantizada, por ser regular la matriz "A"), resulta $A^{-1} \bullet A \bullet A = A^{-1} \bullet A \Rightarrow A = I$

2) Verdadero, si $B = A + A^t \Rightarrow B^t = (A + A^t)^t = A^t + A = B \Rightarrow B$ es simétrica

3) Más falso que un billete de 31738573563353 euros. En examen quedaremos guay si demostramos que dos matrices semejantes siempre tienen los mismos valores

propios.

4) Verdadero, pues si la matriz cuadrada "A" asociada al endomorfismo "f" es ortogonal $\Rightarrow$ "A" tiene determinante no nulo $\Rightarrow$ sucede que el rango de "A" coincide con las dimensiones de los espacios "inicial" y "final", por lo que "f" es un isomorfismo.

TEORÍA (1'5 PUNTOS)

Demuestre que si "A" es una matriz simétrica, vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

EJERCICIO (1'75 PUNTOS)

Sea la aplicación lineal $f:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^3$ definida como:

$$f(x;y;z) = (-x+z;x+2.y+3.z;x+y+z)$$

1) Determinar el núcleo y la imagen de "f", y clasificar "f"
3) Sea $g:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es

$$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

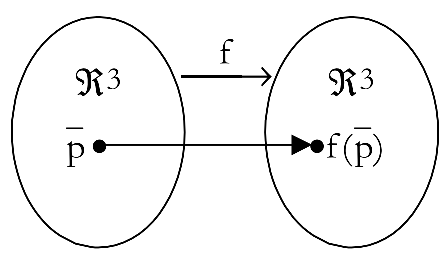
¿Cuál es la matriz asociada a la aplicación lineal $g \bullet f$? ¿Es $g \bullet f$ epimorfismo?
3) ¿Cuál es la matriz asociada a "g" si en el espacio inicial se toma como base de referencia la $\{(1;0;1),(0;1;0),(1;0;-1)\}$.

Solución

1) Consideramos que $(x;y;z)$ son las coordenadas respecto de la base canónica de $\mathfrak{R}^3$ de un vector cualquiera $\overline{p} \in \mathfrak{R}^3$, y que $(u;v;w)$ son las coordenadas del vector $f(\overline{p}) \in \mathfrak{R}^3$ respecto de la base canónica de $\mathfrak{R}^3$; así, es:

$$\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(1;0;0) & f(0;1;0) & f(0;0;1) \end{array}$$



- Es: $\quad \ker.f = \{\overline{p} = (x;y;z) \in \mathfrak{R}^3 \,/\, f(\overline{p}) = \overline{0} \in \mathfrak{R}^3\} =$

$$= \{\overline{p} = (x;y;z) \in \mathfrak{R}^3 \,/\, (-x+z;x+2.y+3.z;x+y+z) = \overline{0} \in \mathfrak{R}^3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} -x + z &= 0 \\ x + 2.y + 3.z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= z \\ y &= -2.z \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

La matriz de coeficientes es "A", que tiene rango igual a 2
Eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos "z"

$$\Rightarrow \ker.f = \{(z;2.z;z),\ \forall\ z \in \Re\} = \{z \bullet (1;2;1),\ \forall\ z \in \Re\}$$

El vector $(1;2;1)$ es una base del núcleo de "f"

- Es $\mathrm{Im.f} = \{\overline{n} \in \Re^3 \,/\, \exists\ \overline{p} \in \Re^3$ para el que es $f(\overline{p}) = \overline{n}\}$, siendo:

$$\dim.(\mathrm{Im.f}) = \mathrm{rg}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f(1;0;0) & f(0;1;0) & f(0;0;1) \end{array}\end{array} = 2$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, los vectores $(-1;1;1)$ y $(0;2;1)$ forman una base Im.f (o sea, todo vector del subespacio Im.f puede obtenerse como combinación lineal de los vectores $(-1;1;1)$ y $(0;2;1)$).

2) La aplicación lineal $h = g \bullet f : \Re^3 \mapsto \Re^2$ es la definida como $h(\overline{p}) = g(f(\overline{p}))$, y su matriz asociada respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$ es $C \bullet A$:

$$C \bullet A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Como $\mathrm{rg}(C \bullet A) = 1 \neq$ dim.(Espacio Final de "h"), la aplicación $h = g \bullet f$ no es epimorfismo (no es sobreyectiva; es decir, en el espacio final hay vectores que no son imagen de ningún vector del espacio inicial).

3) Si $(x;y;z)$ son las coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^3$ de un vector cualquiera $\overline{p} \in \Re^3$, y $(a;b)$ son las coordenadas del vector $g(\overline{p}) \in \Re^2$ respecto de la base canónica de $\Re^2$, según se nos dice, es:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{C} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

Si llamamos $(x^*;y^*;z^*)$ a las coordenadas del vector $\overline{p}$ respecto de la base $\{\overline{k}_1 = (1;0;1), \overline{k}_2 = (0;1;0), \overline{k}_3 = (1;0;-1)\}$ de $\Re^3$, es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{N} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \end{matrix}$$

- Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "g" si en el espacio inicial $\Re^3$ se toma como base de referencia la $\{(1;0;1), (0;1;0), (1;0;-1)\}$; resulta:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = C \bullet N \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz asociada a "g" respecto de la citada base de $\Re^3$ y respecto de la base canónica de $\Re^2$ es la $C \bullet N$.

EJERCICIO (1'75 PUNTOS)

Sea la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 9.x_3^2 + 6.x_2.x_3$

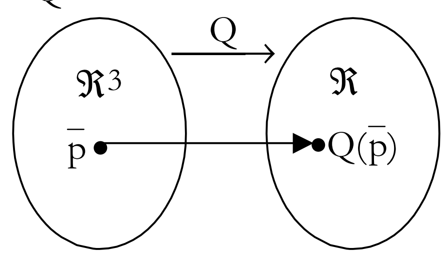
1) Clasifíquela según su signo
2) Halle su expresión canónica y la matriz de paso ortogonal
3) Determine el signo de la forma cuadrática si se restringe al subespacio

$$S = \{(x_1;x_2;x_3)/x_1 - 5.x_2 = 0,\ x_2 - 3.x_3 = 0\}$$

Solución

Consideramos que la base de referencia en el espacio vectorial $\Re^3$ es la canónica; así, entendemos que x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de un vector $\bar{p} \in \Re^3$ respecto de dicha base. Por tanto, la expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$Q(\bar{p}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$



1) La forma cuadrática "Q" es semidefinida positiva, pues los autovalores de "A" son $\lambda = 0, \lambda = 1$ y $\lambda = 10$, todos no negativos (≥ 0).

2) Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 0$:

$$(A-0\bullet I)\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&3&9\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=0\\x_2=-3.x_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Como }\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\text{ eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos } x_3}$$

$$\Rightarrow L(\lambda=0)=\{(0;-3.\theta;\theta),\ \forall\theta\in\Re\}=\{\theta\bullet(0;-3;1),\ \forall\theta\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_1=(0;-3;1)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\bar{u}_1=\bar{h}_1/\|\bar{h}_1\|=(0;-\frac{3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}})$$

es una base ortonormal del subespacio.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda=1$:

$$(A-1\bullet I)\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&3\\0&3&8\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Como }\begin{vmatrix}0&3\\3&8\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\text{ eliminamos la 1ª ecuación y parametrizamos } x_1}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}3.x_3=0\\3.x_2+8.x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_2=0\\x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=1)=\{(\theta;0;0),\ \forall\theta\in\Re\}=\{\theta\bullet(1;0;0),\ \forall\theta\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_2=(1;0;0)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\bar{u}_2=\bar{h}_2/\|\bar{h}_2\|=(1;0;0)$$

es una base ortonormal del subespacio.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda=10$:

$$(A-10\bullet I)\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}-9&0&0\\0&-9&3\\0&3&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Como }\begin{vmatrix}-9&0\\0&-1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\text{ eliminamos la 2ª ecuación y parametrizamos } x_2}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}-9.x_1=0\\x_3=3.x_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=0\\x_3=3.x_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=10)=\{(0;\theta;3.\theta),\ \forall\theta\in\Re\}=\{\theta\bullet(0;1;3),\ \forall\theta\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_3=(0;1;3)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\bar{u}_3=\bar{h}_3/\|\bar{h}_3\|=(0;\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}})$$

es una base ortonormal del subespacio.

- Si en el espacio $\Re^3$ tomamos como base de referencia la base ortonormal que forman los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$, se modifican las coordenadas de $\bar{p} \in \Re^3$, de modo que si $\bar{p} = x_1^* \bullet \bar{u}_1 + x_2^* \bullet \bar{u}_2 + x_3^* \bullet \bar{u}_3$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}}^{C \equiv \text{matriz de "paso"}} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \end{array}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión canónica de la forma cuadrática "Q" (o sea, la expresión de "Q" respecto de la base ortonormal de $\Re^3$ que forman los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$); resulta:

$$Q(\bar{p}) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = (x_2^*)^2 + 10.(x_3^*)^2$$

$$\boxed{C^t \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}}$$

- La forma cuadrática "Q" es definida positiva si se restringe al subespacio dado "S", ya que:

$$Q(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 9.x_3^2 + 6.x_2.x_3 =$$

$$= (15.x_3)^2 + (3.x_3)^2 + 9.x_3^2 + 6.(3.x_3).x_3 = 261.x_3^2 > 0, \ \forall \ x_3 \neq 0$$

$$\boxed{S = \{(x_1; x_2; x_3) / x_1 - 5.x_2 = 0, x_2 - 3.x_3 = 0\} = \left\{(x_1; x_2; x_3) \middle/ \begin{array}{l} x_1 = 15.x_3 \\ x_2 = 3.x_3 \end{array} \right\}}$$

<u>OTRAS PREGUNTAS TIPO TEST (DEL EXAMEN DE ADE)</u>

19) Sea $f:E \mapsto F$ una aplicación lineal; "f" es monomorfismo si:

$$\text{a) } \{x \in E \, / \, f(x) = 0_E\} = \{0_F\}$$
$$\text{b) } \{x \in E \, / \, f(x) = 0_F\} = \{0_E\}$$
$$\text{c) } \{x \in F \, / \, f(x) = 0_F\} = \{0_E\}$$

20) Sean $f:\Re^n \mapsto \Re^m$ y $g:\Re^m \mapsto \Re^k$ dos epimorfismos, entonces:

a) $g \bullet f$ es epimorfismo ; b) $g \bullet f$ no es epimorfismo
c) No se puede saber si $g \bullet f$ es epimorfismo o no

21) Sea la aplicación lineal $f(x;y;z) = (x;0;2.z)$, entonces:

a) "f" es monomorfismo ; b) "f" es epimorfismo
c) las anteriores son falsas

22) ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores es una base de $\Re^3$?

a) $\{(-2;0;1), (-1;0;0), (-1;0;1)\}$; b) $\{(-1;0;0), (1;1;0)\}$
c) $\{(-1;0;0), (-1;1;0), (-1;1;-1)\}$

23) Sea "B" una matriz simétrica de orden "n" e "I" la matriz unidad del mismo orden que "B"; sea la matriz particionada en bloques:

$$A = \begin{bmatrix} -B & 0 \\ I & B^t \end{bmatrix}$$

a) $tr(A) = 2.tr(B)$; b) $tr(A) = 0$; c) $tr(A) = n$

24) Sean "A" y "B" dos matrices cuadradas del mismo orden, tales que es definida positiva la forma cuadrática cuya matriz asociada es $A \bullet B$, entonces:

a) $|A \bullet B| = 0$; b) $|A|$ y $|B|$ tiene el mismo signo
c) $|A|$ y $|B|$ tiene distinto signo

25) Sean $A \in M_{2\times 2}(\Re)$ con polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2.\lambda + 1$.

a) "A" es simétrica ; b) $tr(A) = 2$; c) $|A| = -1$

Solución

19) Una aplicación lineal $f:E \mapsto F$ es monomorfismo si su núcleo está formado sólo por el vector cero del espacio inicial; así, la correcta es la b).

20) Si $f:\Re^n \mapsto \Re^m$ y $g:\Re^m \mapsto \Re^k$ son epimorfismos, entonces $g \bullet f$ también

21) Se trata de una aplicación lineal de un espacio vectorial de dimensión 3 en otro espacio vectorial de dimensión 3; la matriz asociada a "f" es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Y como

$$\begin{gathered} rg(A) = 2 \neq \dim.(\text{Espacio Inicial}) \Rightarrow \text{"f" no es monomorfismo} \\ rg(A) = 2 \neq \dim.(\text{Espacio Final}) \Rightarrow \text{"f" no es epimorfismo} \end{gathered}$$

22) La correcta es la c), pues las bases de $\Re^3$ están formadas por 3 vectores L.I

23) $tr(A) = tr(-B + B^t) = tr(-B) + tr(B^t) = -tr(B) + tr(B) = 0$

24) Si es definida positiva la FC con matriz asociada $A \bullet B$, entonces ha de ser $|A \bullet B| = |A|.|B| > 0$, lo que sólo sucede si $|A|$ y $|B|$ tienen el mismo signo.

25) La correcta es la b), pues $P(\lambda) = \lambda^2 - 2.\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (doble), y la traza de "A" siempre coincide con la suma de los autovalores de "A".