MATEMÁTICAS PARA LA EMPRESA
EJERCICIOS DE EXAMEN

EJERCICIO 1

Sea la forma cuadrática $Q(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + x_2^2 + b^2.x_3^2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3$

1) Clasifíquela en función del parámetro real "b".
2) Determine su expresión canónica si $b = 0$.
3) Si $b = 0$, clasifique la forma cuadrática sujeta a la restricción $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

SOLUCIÓN

$$Q(x_1;x_2;x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b^2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1) $$H_1 = a_{11} = 1 > 0 \;;\; H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$H_3 = |A| = b^2 - 2 \begin{cases} > 0 \text{ si } |b| > \sqrt{2} \\ = 0 \text{ si } |b| = \sqrt{2} \\ < 0 \text{ si } |b| < \sqrt{2} \end{cases}$$

Por tanto:

* Si $|b| > \sqrt{2} \Rightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0 \Rightarrow$ definida positiva
* Si $|b| = \sqrt{2} \Rightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 = 0 \Rightarrow$ semidefinida positiva
* Si $|b| < \sqrt{2} \Rightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 < 0 \Rightarrow$ indefinida

2) Si $b = 0$, es $Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, siendo:

$$|A - \lambda \bullet I| = -\lambda^3 + 2.\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2, -1$$

La expresión canónica de "Q" es $Q(y_1;y_2;y_3) = y_1^2 + 2.y_2^2 - y_3^2$.

3) Si $b = 0$, la forma cuadrática "Q" es definida positiva si $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, pues:

$$Q(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 2.x_1.(x_1 + x_2) + 2.x_2.(x_1 + x_2) =$$

$$\boxed{x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2}$$

$$= 3.x_1^2 + 3.x_2^2 + 4.x_1.x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{W} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para "W" es $K_1 = w_{11} = 3 > 0 \;;\; K_2 = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0$

EJERCICIO 2

Sea $S=\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, x-y-2.z=0\}$.

1) Probar que "S" es un subespacio vectorial de $\Re^3$
2) Calcular la dimensión y un sistema de generadores de "S"
3) Hallar un vector unitario que sea ortogonal a todos los vectores de "S" (basta que sea ortogonal a los vectores de un sistema de generadores de "S").

SOLUCIÓN

1) El conjunto "S" lo forman los vectores de $\Re^3$ tales que su primer componente menos su segundo componente menos el doble de su tercer componente es cero (o sea, "S" esta formado por las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo $x-y-2.z=0$ que nos dan); y para probar que "S" es subespacio vectorial de $\Re^3$ debemos probar que toda combinación lineal de elementos de "S" es un elemento de "S"; o sea, debemos probar que

$$\forall\ \bar{u},\bar{v}\in S \text{ y } \forall\alpha,\beta\in\Re \text{ sucede que } \alpha\bullet\bar{u}+\beta\bullet\bar{v}\in S$$

Veamos:

$*$ Si $\bar{u}=(u_1;u_2;u_3)\in S \Rightarrow u_1-u_2-2.u_3=0$

$*$ Si $\bar{v}=(v_1;v_2;v_3)\in S \Rightarrow v_1-v_2-2.v_3=0$

$*$ Es $\alpha\bullet\bar{u}+\beta\bullet\bar{v}=(\alpha.u_1+\beta.v_1;\alpha.u_2+\beta.v_2;\alpha.u_3+\beta.v_3)$, y para probar que este vector pertenece a "S" debemos probar que cumple la condición que cumplen todos los vectores de "S"; o sea, debemos probar que su primer componente menos su segundo componente menos el doble de su tercer componente es cero; y así sucede:

$$\begin{aligned}&(\alpha.u_1+\beta.v_1)-(\alpha.u_2+\beta.v_2)-2.(\alpha.u_3+\beta.v_3)=\\&=\alpha.(u_1-u_2-2.u_3)+\beta.(v_1-v_2-2.v_3)\underset{\uparrow}{=}\alpha.0+\beta.0=0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{es } u_1-u_2-2.u_3=0 \text{ y } v_1-v_2-2.v_3=0}$$

2) Es $\dim.(S)=\dim.(\Re^3)-rg(A)$, donde "A" es la matriz de coeficientes del sistema lineal homogéneo de ecuaciones que define a "S"; o sea:

$$\dim.(S)=3-rg\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\end{bmatrix}=3-1=2$$

Parametrizando "y" y "z", resulta $x=y+2.z;$ por tanto, es:

$$\begin{aligned}S&=\{(y+2.z;y;z),\forall y,z\in\Re\}=\{(y;y;0)+(2.z;0;z),\forall y,z\in\Re\}=\\&=\{y\bullet(1;1;0)+z\bullet(2;0;1),\forall y,z\in\Re\}\end{aligned}$$

Así, los vectores $\bar{a}=(1;1;0)$ y $\bar{b}=(2;0;1)$ constituyen una base de "S" $\Rightarrow$ forman un sistema de generadores de "S".

3) Al exigir que el vector $\overline{p}=(p_1;p_2;p_3)$ sea ortogonal a los vectores $\overline{a}=(1;1;0)$ y $\overline{b}=(2;0;1)$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r}(p_1;p_2;p_3)\bullet(1;1;0)=0 \Rightarrow p_1+p_2=0\\ (p_1;p_2;p_3)\bullet(2;0;1)\Rightarrow 2.p_1+p_3=0\end{array}\right\} \underset{\text{parametrizamos } p_1}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}p_2=-p_1\\ p_3=-2.p_1\end{array}\right.$$

Por tanto, haciendo $p_1=1$ (por ejemplo), resulta que el vector $\overline{p}=(1;-1;-2)$ es ortogonal a los vectores $\overline{a}=(1;1;0)$ y $\overline{b}=(2;0;1)$, y el vector

$$\overline{m}=\frac{\overline{p}}{\|\overline{p}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\boxed{\|\overline{p}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}}$$

es ortogonal a los vectores $\overline{a}=(1;1;0)$ y $\overline{b}=(2;0;1)$ y tiene módulo unidad.

EJERCICIO 3

1) Demostrar que $S = \{ (x;y;z) \in \Re^3 \ / \ x - 2.y - z = 0 \}$ es subespacio de $\Re^3$.
2) Determine un sistema de generadores de "S".
3) Determine un vector unitario que sea ortogonal a los vectores del sistema de generadores obtenido con anterioridad.

SOLUCIÓN

1) El conjunto "S" lo forman los vectores de $\Re^3$ tales que su primer componente menos el doble del segundo menos el tercero es cero; o sea, "S" está formado por las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo $x - 2.y - z = 0$ que nos dan.

Para probar que "S" es subespacio de $\Re^3$ debemos probar que toda combinación lineal de elementos de "S" es un elemento de "S"; o sea:

$$\forall \ \bar{u}, \bar{v} \in S \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \Re \text{ sucede que } \alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v} \in S$$

Veamos:

* Si $\bar{u} = (u_1;u_2;u_3) \in S \Rightarrow u_1 - 2.u_2 - u_3 = 0$
* Si $\bar{v} = (v_1;v_2;v_3) \in S \Rightarrow v_1 - 2.v_2 - v_3 = 0$
* Es $\alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v} = (\alpha.u_1 + \beta.v_1; \alpha.u_2 + \beta.v_2; \alpha.u_3 + \beta.v_3)$, y para probar que este vector pertenece a "S" debemos probar que cumple la condición que cumplen todos los vectores de "S"; o sea, debemos probar que su primer componente menos su segundo componente menos el doble de su tercer componente es cero; y así sucede:

$$(\alpha.u_1 + \beta.v_1) - 2.(\alpha.u_2 + \beta.v_2) - (\alpha.u_3 + \beta.v_3) =$$
$$= \alpha.(u_1 - 2.u_2 - u_3) + \beta.(v_1 - 2.v_2 - v_3) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$$

$$\boxed{\text{es } u_1 - 2.u_2 - u_3 = 0 \text{ y } v_1 - 2.v_2 - v_3 = 0}$$

2) Es $\dim.(S) = \dim.(\Re^3) - rg(A)$, donde "A" es la matriz de coeficientes del sistema lineal homogéneo de ecuaciones que define a "S"; o sea:

$$\dim.(S) = 3 - rg\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Parametrizando "y" y "z", resulta $x = 2.y + z$; por tanto, es:

$$S = \{ (2.y + z; y; z), \forall y,z \in \Re \} =$$
$$= \{ (2.y; y; 0) + (z; 0; z), \forall y,z \in \Re \} =$$
$$= \{ y \bullet (2;1;0) + z \bullet (1;0;1), \forall y,z \in \Re \}$$

Así, los vectores $\bar{a} = (2;1;0)$ y $\bar{b} = (1;0;1)$ constituyen una base de "S" $\Rightarrow$ forman un sistema de generadores de "S".

3) Al exigir que el vector $\bar{p}=(p_1;p_2;p_3)$ sea ortogonal a los vectores $\bar{a}=(2;1;0)$ y $\bar{b}=(1;0;1)$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r}(p_1;p_2;p_3)\bullet(2;1;0)=0 \Rightarrow 2.p_1+p_2=0\\ (p_1;p_2;p_3)\bullet(1;0;1) \Rightarrow p_1+p_3=0\end{array}\right\} \underset{\boxed{\text{parametrizamos } p_1}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}p_2=-2.p_1\\ p_3=-p_1\end{array}\right.$$

Por tanto, haciendo $p_1=1$ (por ejemplo), resulta que el vector $\bar{p}=(1;-2;-1)$ es ortogonal a los vectores $\bar{a}=(2;1;0)$ y $\bar{b}=(1;0;1)$, y el vector

$$\bar{m}=\frac{\bar{p}}{\|\bar{p}\|}\underset{\boxed{\|\bar{p}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}}}{=}\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

es ortogonal a los vectores $\bar{a}=(2;1;0)$ y $\bar{b}=(1;0;1)$ y tiene módulo unidad.

EJERCICIO 4

Siendo $a \in \Re$, sea $f: \Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \begin{cases} e^{a.(x-1)} & \text{si } x < 1 \\ x^2/(2-x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de "f".

SOLUCIÓN

CONTINUIDAD

- Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = e^{a.(x-1)} \Rightarrow$ "f" es continua en todo punto.
- Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = x^2/(2-x) \Rightarrow$ "f" es continua si $x \neq 2$.
- La función "f" es continua en $x = 1$ para todo valor de "a", pues sea cual sea el valor de "a", los límites laterales de "f" en $x = 1$ coinciden con $f(1)$:

$$\begin{aligned} &* \text{ Si } x \to 1^- \Rightarrow f(x) = e^{a.(x-1)} \to e^0 = 1 \\ &* \text{ Si } x \to 1^+ \Rightarrow f(x) = x^2/(2-x) \to 1 \\ &* \ f(1) = 1^2/(2-1) = 1 \end{aligned}$$

DERIVABILIDAD

- Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = e^{a.(x-1)} \Rightarrow f'(x) = a.e^{a.(x-1)}$
- Si $x \in (1;2) \cup (2;+\infty) \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{2-x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4.x - x^2}{(2-x)^2}$
- La función "f" tiene derivada en $x = 1$ si sus derivadas laterales en dicho punto son iguales, lo que sucede sólo si $a = 3$:

$$f'(1^-) = \left(a.e^{a.(x-1)}\right)_{x=1} = a$$

$$f'(1^+) = \left(\frac{4.x - x^2}{(2-x)^2}\right)_{x=1} = 3$$

EJERCICIO 5

Hacer el estudio y la representación gráfica de $f(x)=\frac{x^2-2.x+4}{x-2}$

SOLUCIÓN

- **Dominio de definición y continuidad:** como "f" es un cociente de polinomios, está definida y es continua excepto en los puntos que anulan el denominador; o sea, está definida y es continua si $x\neq 2$.

  Para hacernos una idea del aspecto de la gráfica de "f" en las proximidades de $x=2$, calculamos los límites laterales de "f" en ese punto:

  $$* \text{ Si } x\to 2^- \Rightarrow f(x)=\frac{x^2-2.x+4}{x-2}\to\frac{4}{0^-}=-\infty$$

  $$* \text{ Si } x\to 2^+ \Rightarrow f(x)=\frac{x^2-2.x+4}{x-2}\to\frac{4}{0^+}=+\infty$$

  La recta $x=2$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

- **Signo de la función:** como el numerador $x^2-2.x+4$ es positivo en todo punto, el signo de $f(x)$ es el de $x-2$; así, es $f(x)<0$ si $x<2$, siendo $f(x)>0$ si $x>2$.

- **Simetrías:** como los puntos de discontinuidad de "f" no son simétricos respecto al punto $x=0$, la gráfica de "f" no es simétrica ni respecto al eje de ordenadas (OY) ni respecto al origen de coordenadas.

- **Intersecciones con los ejes:** la gráfica de "f" no toca al eje de abcisas, pues $f(x)=0$ carece de solución. Corta al eje de ordenadas en el punto $f(0)=-2$.

- **Signo de la primera derivada:** para determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de "f" y los puntos en que "f" presenta máximo o mínimo relativo, estudiamos el signo de su función derivada primera:

  $$f'(x)=\frac{(2.x-2).(x-2)-(x^2-2.x+4).(1)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4.x}{(x-2)^2}$$

  Si $x\neq 2$ es $(x-2)^2>0$; en consecuencia, el signo de $f'(x)$ es el de su numerador $u(x)=x^2-4.x$, que se anula si $x=0$ ó $x=4$; y se tiene que:

  $$* \text{ si } x<0 \Rightarrow u(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \text{"f" es creciente}$$
  $$* \text{ si } x\in(0;4) \Rightarrow u(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \text{"f" es decreciente}$$
  $$* \text{ si } x>4 \Rightarrow u(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \text{"f" es creciente}$$

  En el punto $x=0$ la función "f" presenta un máximo relativo, pues en él "f" pasa de ser creciente a ser decreciente; en el punto $x=4$ la función "f" presenta un mínimo relativo, pues en él "f" pasa de ser decreciente a ser creciente.

- **Signo de la segunda derivada:** para estudiar la concavidad de "f" y determinar los puntos de inflexión, estudiamos el signo de su función derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2.x-4).(x-2)^2 - \left(x^2-4.x\right).(2.(x-2))}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

La función es cóncava hacia abajo si $x<2$, pues $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3} < 0$ si $x<2$.

La función es cóncava hacia arriba si $x>2$, pues $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3} > 0$ si $x>2$.

Aunque el signo de $f''(x)$ cambia en $x=2$, no hay inflexión en dicho punto, pues "f" no está definida en él.

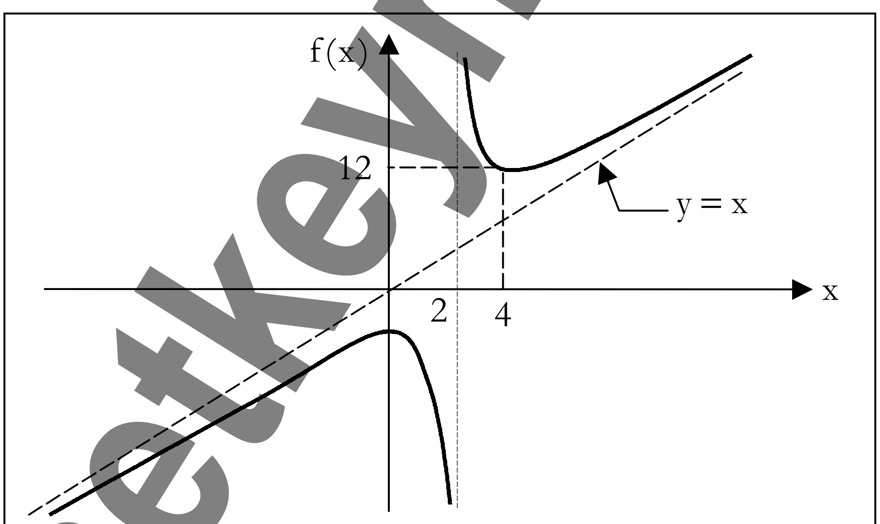
- **Asíntotas no verticales:**

No hay asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2.x+4}{x-2} = \infty$.

La recta $y = 1.x + 0$ es asíntota oblicua, pues:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2.x+4}{x(x-2)} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - m.x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2.x+4}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x-2} = 0$$



EJERCICIO 6

Si $f(x) = \dfrac{x^2-2.x+4}{x-2}$, calcular su integral indefinida.

SOLUCIÓN

$$\int \frac{x^2-2.x+4}{x-2}.dx = \int \left(x + \frac{4}{x-2}\right).dx = \frac{1}{2}.x^2 + 4.\text{Ln}\left|x-2\right| + C$$

Dividimos los polinomios

EJERCICIO 7

La función de producción de una empresa es $Q(x;y) = 60.x + 90.y - 2.x^2 - 3.y^2$, siendo "x" e "y" los factores empleados de producción, cuyos precios unitarios son $p_x = 2$ y $p_y = 4$ u.m. Determinar las cantidades "x" e "y" que maximizan la producción cuando el coste es de 68 u.m. Justificar la optimalidad global ¿Cuánto varía aproximadamente la producción máxima si se dispone de 69 u.m.?

SOLUCIÓN

- Debemos maximizar $Q(x;y)$ bajo la restricción $C(x;y) = 2.x + 4.y - 68 = 0$.
- Función de Lagrange:

$$L(x;y;\lambda) = 60.x + 90.y - 2.x^2 - 3.y^2 - \lambda.(2.x + 4.y - 68)$$

- Condición de primer orden:

$$\nabla L(x;y;\lambda) = \bar{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_x = 60 - 4.x - 2.\lambda = 0 \\ L_y = 90 - 6.y - 4.\lambda = 0 \\ L_\lambda = -(2.x + 4.y - 68) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lambda = 30 - 2.x & \text{(I)} \\ \lambda = \dfrac{90 - 6.y}{4} & \text{(II)} \\ 2.x + 4.y - 68 = 0 & \text{(III)} \end{array} \right.$$

De (I) y (II) se deduce que $30 - 2.x = \dfrac{90 - 6.y}{4} \Rightarrow x = \dfrac{15 + 3.y}{4}$

Haciendo $x = \dfrac{15 + 3.y}{4}$ en (III), resulta $y = 11$, por lo que $x = 12$.

Al hacer $x = 12$, $y = 11$ en (I), resulta $\lambda = 6$

- Condición 2º orden: el punto (12;11) corresponde a un máximo relativo, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & C_x & C_y \\ C_x & L_{x^2} & L_{xy} \\ C_y & L_{xy} & L_{y^2} \end{vmatrix}_{(12;11)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix}_{(12;11)} > 0$$

- Producción máxima: $Q(12;11) = 1059$
- Optimalidad global: el punto (12;11) corresponde a un máximo absoluto, pues la función de producción $Q(x;y)$ es estrictamente cóncava hacia abajo en todo punto, ya que $HQ(x;y) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ es definida negativa en todo punto.
- Como $\lambda = 6 \cong \left(\dfrac{\text{Variación de Producción}}{\text{Variación de Coste}}\right)_{(12;11)}$, si el coste aumenta 1 u.m., es Variación de Producción $\cong 1.6 = 6$; por tanto, si el coste es de 69 u.m., la producción máxima aproximada es $1059 + 6$.

EJERCICIO 8

Siendo $a < 3$, sea la función $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x.e^{x^2-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Analizar su continuidad y derivabilidad.

2) Optimizr $f(x)$ en $[-1;2]$, calculando $\int_1^2 f(x).dx$

SOLUCIÓN

1) CONTINUIDAD

- Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = 2 - x^2 \Rightarrow$ continua en todo punto.
- Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = x.e^{x^2-1} \Rightarrow$ continua en todo punto.
- La función es continua en $x = 1$, pues los límites laterales de $f(x)$ en $x = 1$ coinciden con $f(1)$:

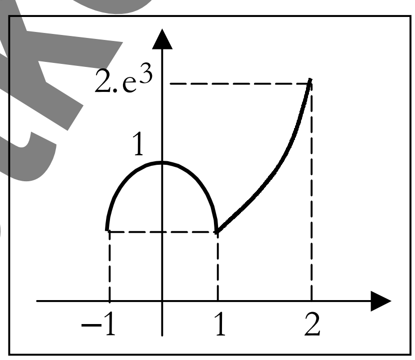
$$* \text{ Si } x \to 1^- \Rightarrow f(x) = 2 - x^2 \to 1$$
$$* \text{ Si } x \to 1^+ \Rightarrow f(x) = x.e^{x^2-1} \to 1$$
$$* \ f(1) = 1$$

DERIVABILIDAD

- Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = 2 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2.x$.
- Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = x.e^{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = (1 + 2.x^2).e^{x^2-1}$.
- La función carece de derivada en $x = 1$, pues $f'(1^-) \neq f'(1^+)$:

$$f'(1^-) = (-2.x)_{x=1} = -2 \ ; \ f'(1^+) = \left((1 + 2.x^2).e^{x^2-1}\right)_{x=1} = 3$$

2) En el intervalo $[-1;2]$ la función dada presenta mínimos absolutos en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, presentando máximo absoluto en $x = 2$.



3) Es:

$$\int_1^2 f(x).dx = \int_1^2 x.e^{x^2-1}.dx = \left(\frac{1}{2}.e^{x^2-1}\right)_1^2 = \frac{1}{2}.\left(e^3 - 1\right)$$

EJERCICIO 9

Hacer el estudio y la representación gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

SOLUCIÓN

- **Dominio de definición y continuidad:** como "f" es un cociente de polinomios, está definida y es continua excepto en los puntos que anulan el denominador; o sea, está definida y es continua si $x \neq -1$. Para hacernos una idea del aspecto de la gráfica de "f" en las proximidades de $x=-1$, calculamos los límites laterales de "f" en ese punto:

$$* \text{ Si } x \to -1^- \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x+1} \to \frac{1}{0^-}=-\infty$$
$$* \text{ Si } x \to -1^+ \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x+1} \to \frac{1}{0^+}=+\infty$$

La recta $x=-1$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

- **Intersecciones con los ejes:** la gráfica de "f" pasa por el origen de coordenadas, pues $f(0)=0$.

- **Signo de la función:**

Si $x<-1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}<0$.

Si $x \in (-1;0)\cup(0;+\infty) \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}>0$.

- **Simetrías:** es $f(-x)=\dfrac{x^2}{-x+1} \neq \begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{No simetría respecto OY} \\ -f(x) \Rightarrow \text{No simetría respecto origen} \end{cases}$

- **Signo de la primera derivada:** para determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de "f" y los puntos en que "f" presenta máximo o mínimo relativo, estudiamos el signo de su función derivada primera:

$$f'(x)=\frac{(2.x).(x+1)-(x^2).(1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2.x}{(x+1)^2}$$

Es $(x+1)^2>0$ si $x \neq -1$; así, el signo de $f'(x)$ coincide con el de la parábola $u(x)=x^2+2.x$, que se anula en $x=-2$ y $x=0$. Por tanto:

$* \text{ Si } x<-2 \Rightarrow u(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente
$* \text{ Si } x \in (-2;-1)\cup(-1;0) \Rightarrow u(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
$* \text{ Si } x>0 \Rightarrow u(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

En $x=-2$ hay un máximo relativo, pues $f(x)$ pasa de ser creciente a ser decreciente en $x=-2$. En $x=0$ hay un mínimo relativo, pues $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente en $x=0$.

- **Signo de la segunda derivada:** para estudiar la concavidad de "f" y determinar los puntos de inflexión, estudiamos el signo de su función derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{(2.x+2).(x+1)^2-\left(x^2+2.x\right).(2.(x+1))}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

La función es cóncava hacia abajo si $x<-1$, pues $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}<0$ si $x<-1$.

Es cóncava hacia arriba si $x>-1$, pues $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}>0$ si $x>-1$.

Aunque el signo de $f''(x)$ cambia en $x=-1$, no hay inflexión en dicho punto, pues "f" no está definida en él.

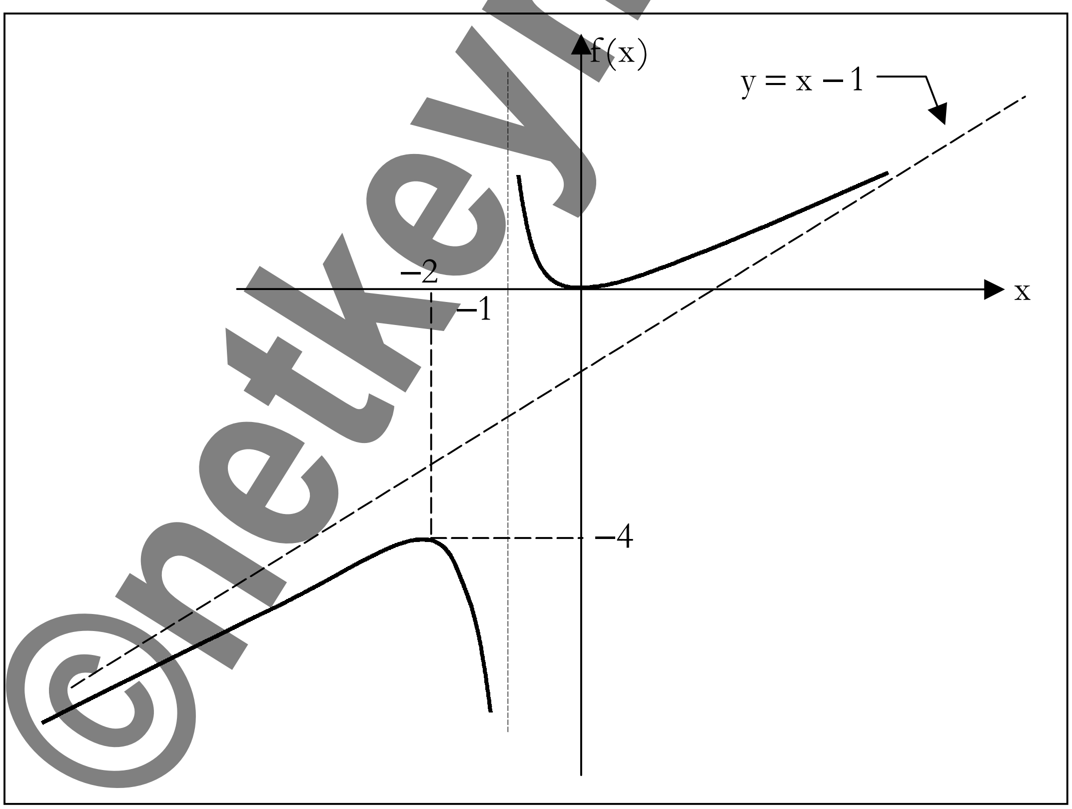
- **Asíntotas no verticales:**

No hay asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}=\infty$.

La recta $y=1.x-1$ es asíntota oblicua, pues:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x.(x+1)}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-m.x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$$



EJERCICIO 10

Una empresa produce dos bienes en cantidades "x" e "y" respectivamente, con una función de coste $C(x;y) = x^2 + y^2 + 4.x.y$. El primer bien se vende en un mercado en competencia perfecta a un precio de 36 u.m; el segundo bien se vende en un monopolio cuya función de demanda es $p_y = 80 - 4.y$.

Maximícese el beneficio.

SOLUCIÓN

- Denotando $B(x;y)$ el beneficio, es:

$$B(x;y) = \underbrace{(36.x + y.(80 - 4.y))}_{\text{Ingreso}} - \underbrace{(x^2 + y^2 + 4.x.y)}_{\text{Coste}} =$$
$$= 36.x + 8.y - x^2 - 5.y^2 - 4.x.y$$

- Condición de primer orden:

$$\nabla B(x;y) = \bar{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B_x = 36 - 2.x - 4.y = 0 \\ B_y = 80 - 10.y - 4.x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow p_y = 64$$

- Condición de segundo orden:

La función de beneficio presenta un máximo relativo y absoluto en el punto $(10;4)$, pues la matriz $HB(x;y)$ es definida negativa en todo punto:

$$HB(x;y) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 11

Clasificar la forma cuadrática

$$Q(x;y;z) = -x^2 - 2.y^2 + k.z^2 - 4.x.y + 2.x.z + 4.y.z$$

SOLUCIÓN

La matriz asociada a "Q" es $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix}$.

La forma cuadrática es indefinida si $k \neq -1$, pues en tal caso:

$$H_1 = -1 < 0 \ ; \ H_2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} < 0 \ ; \ H_3 = |A| = -2.k - 2 \neq 0$$

Si $k = -1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ "Q" es indefinida, pues "A" tiene autovalores de distinto signo.

EJERCICIO 12

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1) Hallar una expresión canónica y clasificar la forma cuadrática cuya matriz asociada es "A".
2) Hallar una matriz de paso ortogonal.
3) Clasificar $Q(X)=X^tAX$ restringida a $x_1-x_2=0$.

SOLUCIÓN

1) Autovalores de "A": $|A-\lambda\bullet I|=-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=\begin{cases} 1 \text{ (Simple)} \\ -1 \text{ (Doble)} \end{cases}$

- **Expresión canónica:** $Q(y_1;y_2;y_3)=y_1^2-y_2^2-y_3^2$.
- **Clasificación:** como los autovalores tienen signo distinto, la forma cuadrática es indefinida.

2) Autovectores de $\lambda=1$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A-1\bullet I}\bullet\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_1=-x_2 \\ 2.x_3=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_1=-x_2 \\ x_3=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=1)=\{(-x_2;x_2;0),\ \forall x_2\in\Re\}=\{x_2\bullet(-1;1;0),\ \forall x_2\in\Re\}$$

El vector $\overline{v}_1=(-1;1;0)$ es base de $L(\lambda=1)$.

El vector $\overline{w}_1=\dfrac{\overline{v}_1}{\|\overline{v}_1\|}=(-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)$ es base ortonormal de $L(\lambda=1)$.

- Autovectores de $\lambda=-1$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A+1\bullet I}\bullet\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-1)=\{(x_2;x_2;x_3),\ \forall x_2,x_3\in\Re\}=$$

$$=\{x_2\bullet(1;1;0)+x_3\bullet(0;0;1),\ \forall x_2,x_3\in\Re\}$$

Los vectores $\overline{v}_2=(1;1;0)$ y $\overline{v}_3=(0;0;1)$ son una base de $L(\lambda=-1)$.

Los vectores $\overline{w}_2=\dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|}=(1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)$ y $\overline{w}_3=\dfrac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|}=(0;0;1)$ son una base ortonormal de $L(\lambda=-1)$.

- Siendo $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, la matriz "C" tal que $C^t \bullet A \bullet C = D$, es:

$$C=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3\end{array}$$

3) La forma cuadrática $Q(X)=X^tAX$ es definida negativa en el subespacio $x_1 - x_2 = 0$, pues en la matriz orlada

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

es

$$\overline{A}_2=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}>0 \; ; \; \left|\overline{A}\right|<0$$

EJERCICIO 13

Para qué valores del parámetro "a" es diagonalizable la matriz "A"

$$A = \begin{bmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Calculemos los autovalores de "A":

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -4 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda).\begin{vmatrix} a-\lambda & -4 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda).(a-\lambda).(-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2, a, -2$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ $\Rightarrow$ los tres autovalores son distintos $\Rightarrow$ "A" es diagonalizable.

Si $a = 2$ $\Rightarrow$ $\lambda = 2$ es autovalor doble $\Rightarrow$ "A" no es diagonalizable, pues el subespacio de autovectores de $\lambda = 2$ no tiene dimensión 2:

$$\text{dim. } L(\lambda = 2) = 3 - rg(A - 2 \bullet I) = 3 - rg\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Si $a = -2$ $\Rightarrow \lambda = -2$ es autovalor doble $\Rightarrow$ "A" no es diagonalizable, pues el subespacio de autovectores de $\lambda = -2$ no tiene dimensión 2:

$$\text{dim. } L(\lambda = -2) = 3 - rg(A + 2 \bullet I) = 3 - rg\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

EJERCICIO 14

Sea la función definida como

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Calcular sus límites direccionales y según parábolas horizontales en el punto $(0;0)$. A partir de los resultados obtenidos, ¿qué se puede afirmar acerca de la existencia del límite doble en $(0;0)$.

Calcular sus límites direccionales y reiterados en el punto (1;1). A partir de los resultados obtenidos, ¿qué se puede afirmar acerca de la existencia del límite doble y la continuidad en (1;1)?

SOLUCIÓN

¡Qué suerte!, si $x \neq y$ entonces $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{(x+y).(x-y)}{x-y} = x + y$, por lo que $f(x;y)$ se puede expresar así:

$$f(x;y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Los límites direccionales de "f" en el punto $(0;0)$ son

$$\lim_{x \to 0} f(x; m.x) = \begin{cases} \boxed{\text{Si } m \neq 1} \to \lim\limits_{x \to 0} x + m.x = 0, \ \forall\ m \\ \boxed{\text{Si } m = 1} \to \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \end{cases}$$

Los límites de "f" según parábolas horizontales en el punto $(0;0)$ son

$$\lim_{y \to 0} f(m.y^2; y) = \lim_{y \to 0} m.y^2 + y = 0, \ \forall\ m$$

A partir de estos resultados podemos decir que si "f" tiene límite doble en el punto $(0;0)$ entonces es 0.

Los límites reiterados de "f" en el punto $(1;1)$ son

$$\lim_{x \to 1} \left(\lim_{y \to 1} f(x;y) \right) = \lim_{x \to 1} \left(\lim_{y \to 1} (x+y) \right) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 1} f(x;y)\right)=\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 1}(x+y)\right)=\lim_{y\to 1}(1+y)=2$$

Los límites direccionales de "f" en el punto $(1;1)$ son

$$\lim_{x\to 1} f(x;1+m.(x-1))=\begin{cases}\boxed{\text{Si } m\neq 1}\ \lim_{x\to 1}\ x+(1+m.(x-1))=2,\ \forall\ m\\[4pt] \boxed{\text{Si } m=1}\ \lim_{x\to 1}\ 0=0\end{cases}$$

Por tanto la función "f" no tiene límite doble ni es continua en el punto $(1;1)$.

EJERCICIO 15

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro "a"

$$\begin{bmatrix} a & -4 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ -4 & 4 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Sea "A" la matriz de los coeficientes del sistema y "B" la matriz ampliada. Es:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -4 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ -4 & 4 & 2\end{vmatrix}=-4.a$$

Por tanto, si $a\neq 0$ es $|A|\neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado (tiene solución única).

Si $a=0$, es

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ -4 & 4 & 2\end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ -4 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

y como $rg(A)=2\neq rg(B)=3$, el sistema es incompatible.

EJERCICIO 16

La producción de trigo que se obtiene en una cosecha depende de la cantidad de abono y de semilla que se utilizan en la siembra según la relación

$$z = f(x;y) = 10.x + 22.y - 2.x^2 - 2.y^2 + x.y$$

donde "z" el número de kilos de trigo recogidos por metro cuadrado, "x" es el número de kilos de semilla sembrados por metro cuadrado e "y" es el número de kilos de abono utilizados por metro cuadrado. El precio de la semilla es 10 $/kg y el del abono es 20 $/kg; una vez recolectado el trigo se vende a 5 $/kg.

1) Sabiendo que en cada metro cuadrado se usan un total de 6 kilos entre semilla y abono, hallar los valores de "x" e "y" que maximizan el beneficio. Justificar si se trata de un máximo global.
2) Si queremos aumentar el beneficio obtenido en la cosecha, ¿qué se debe hacer?: aumentar o disminuir la cantidad total (semilla+abono) utilizada por metro cuadrado (razone la respuesta). ¿En cuánto ha de variar esta cantidad si queremos que el beneficio aumente en 10 $/m^2?

SOLUCIÓN

1) Denotando $B(x;y)$ al beneficio por cada metro cuadrado cultivado, es:

$$B(x;y) = \text{Ingresos} - \text{Costes} = (5.z) - (10.x + 20.y) =$$

$$\boxed{z = 10.x + 22.y - 2.x^2 - 2.y^2 + x.y}$$

$$= 5.(10.x + 22.y - 2.x^2 - 2.y^2 + x.y) - (10.x + 20.y) =$$

$$= 40.x + 90.y - 10.x^2 - 10.y^2 + 5.x.y$$

Hay que determinar el punto $(x;y)$ que cumple la condición $x + y = 6$ (en cada metro cuadrado se usan 6 kilos de semilla+abono) y hace que la función $B(x;y)$ alcance su valor máximo.

La función de Lagrange es:

$$L(x;y;\lambda) = B(x;y) - \lambda.(x + y - 6) =$$

$$= 40.x + 90.y - 10.x^2 - 10.y^2 + 5.x.y - \lambda.(x + y - 6)$$

Exigimos la anulación del gradiente de la función de Lagrange:

$$\nabla L = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \partial L/\partial x = 40 - 20.x + 5.y - \lambda = 0 \\ \partial L/\partial y = 90 - 20.y + 5.x - \lambda = 0 \\ \partial L/\partial \lambda = -(x + y - 6) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{de la } \begin{Bmatrix} 1^a \\ 2^a \end{Bmatrix} \text{ se deduce que } \begin{Bmatrix} \lambda = 40 - 20.x + 5.y \\ \lambda = 90 - 20.y + 5.x \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow 40 - 20.x + 5.y = 90 - 20.y + 5.x \Rightarrow \\ \Rightarrow -50 - 25.x + 25.y = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0 \end{array}}$$

El punto $(2;4)$, para el que $\lambda = 40 - 20.2 + 5.4 = 20$, es un máximo, pues:

$$\left|H(L(2;4;20))\right| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -20 & 5 \\ -1 & 5 & -20 \end{vmatrix} > 0$$

2) Si queremos aumentar el beneficio hay que aumentar la cantidad total de semilla+abono utilizada por metro cuadrado, pues

$$\lambda = 20 \cong \left(\frac{\text{variación de beneficio}}{\text{variación de semilla + abono}}\right) > 0$$

El beneficio aumentará en $10\ \$/\mathrm{m}^2$ si

$$\lambda = 20 \cong \left(\frac{10}{\text{variación de semilla + abono}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{variación de semilla + abono} = \frac{1}{2}\ \mathrm{kg/m^2}$$

EJERCICIO 17

Estudiar la continuidad en el punto $(2;0)$ de la función

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2).y}{(x-2)^2 + y^2} & \text{si } (x;y) \neq (2;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (2;0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

La función no es continua en $(2;0)$, pues carece de límite en dicho punto:

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(2;0) \\ y-0=m.(x-2)}} f(x;y) = \lim_{x\to 2} \frac{m.(x-2)^2}{(x-2)^2 + m^2.(x-2)^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

EJERCICIO 18

1) Discutir el siguiente sistema según los valores de los parámetros "a" y "b":

$$\begin{aligned} x + z &= b \\ 2.y + 2.z &= -b \\ x + 2.y + a.z &= 0 \end{aligned}$$

2) Resolver el anterior sistema para $a = 3$ y $b = 1$ y también para $a = b = 0$.

3) Para $a = 3$ clasificar la forma cuadrática cuya matriz asociada es la de coeficientes del sistema dado y dar una expresión canónica de la misma.

4) Para $a = 3$ clasificar la forma cuadrática sujeta a la restricción lineal $x = 0$.

SOLUCIÓN

En un sistema lineal de ecuaciones, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, Rouché establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

1) Las matrices de coeficientes ("A") y ampliada ("B") son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \; ; \; B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 2 & 2 & -b \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right]$$

Como $|A| = 2.a - 6$ se anula sólo si $a = 3$, entonces:

- Si $a \neq 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado, su única solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ -b & 2 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -b & 2 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & -b \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

- Si $a = 3$ el sistema es compatible e indeterminado (tiene infinitas soluciones), pues $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas:

pues $|A| = 0$ (si $a = 3$) y el menor de orden 2 indicado es no nulo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 2 & 2 & -b \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow rg(B) = 2, \forall\, b$$

pues para todo "b" sucede que $H = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & -b \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

2) Si $a = 3$ y $b = 1$, es:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & 3 \end{bmatrix} \; ; \; B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos "z":

$$\left.\begin{matrix} x = b - z \\ 2.y = -b - 2.z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = b - z \\ y = -(b + 2.z)/2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{a=3;b=1} = \left\{(b - z; -\frac{b + 2.z}{2}; z),\ \forall\ z \in \Re\right\} \subset \Re^3$$

Si $a = 0$ y $b = 0$ el sistema lineal dado es homogéneo; además tiene solución única (pues $a = 0 \neq 3$), que es la trivial $x = y = z = 0$.

3) Para $a = 3$ la forma cuadrática "Q" que tiene asociada la matriz "A" es la definida como:

$$Q(x;y;z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 + 2.y^2 + 3.z^2 + 2.x.z + 4.y.z$$

Es: $$\left| A - \lambda \bullet I \right| = -\lambda^3 + 6.\lambda^2 - 6.\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ 3 + \sqrt{3} > 0 \\ 3 - \sqrt{3} > 0 \end{cases}$$

Como todos los autovalores de "A" son no negativos, la forma cuadrática "Q" asociada a "A" es semidefinida positiva: $Q(x;y;z) \geq 0,\ \forall (x;y;z) \in \Re^3$.

La expresión canónica de la forma cuadrática "Q" es:

$$Q(x^*;y^*;z^*) = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \sqrt{3} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} =$$

$$= 0.(x^*)^2 + (3 + \sqrt{3}).(y^*)^2 + (3 - \sqrt{3}).(z^*)^2$$

4) Es:

$$Q(\bar{v}) = x^2 + 2.y^2 + 3.z^2 + 2.x.z + 4.y.z \underset{\boxed{\text{si } \bar{v} = (x;y;z) \text{ es tal que } x = 0}}{=} 2.y^2 + 3.z^2 + 4.y.z =$$

$$= \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{W} \bullet \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Para la matriz "W" es $K_1 = w_{11} = 2 > 0$; $K_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$; así, la forma cuadrática "Q" sujeta a la restricción $x = 0$ es definida positiva.

EJERCICIO 19

Sean $u = e^{2.x+z}$, $v = x^2 + a.z^2$, siendo $x = \text{Ln } t$, $z = 1/t$.

Calcular $\left(\dfrac{du}{dt}\right)_{t=1}$ y determinar "a" sabiendo que $\left(\dfrac{dv}{dt}\right)_{t=1} = -2.$

SOLUCIÓN

Es:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt} = \left(2.e^{2.x+z}\right).\left(\frac{1}{t}\right) + \left(e^{2.x+z}\right).\left(-\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \text{Ln } 1 = 0 \\ z = 1/1 = 1 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=1} = \left(2.e^{2.0+1}\right).\left(\frac{1}{1}\right) + \left(e^{2.0+1}\right).\left(-\frac{1}{1}\right) = e$$

Es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}.\frac{dz}{dt} = (2.x).\left(\frac{1}{t}\right) + (2.a.z).\left(-\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \text{Ln } 1 = 0 \\ z = 1/1 = 1 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=1} = (2.0).\left(\frac{1}{1}\right) + (2.a).\left(-\frac{1}{1}\right) = -2.a = -2 \Rightarrow a = 1$$

Lo dice el enunciado

EJERCICIO 20

Una empresa produce un bien en competencia perfecta, siendo su función de producción $Q(K;L) = 8.K^{1/2}.L^{1/4}$, donde "K" y "L" son respectivamente los factores capital y trabajo. Si el precio de venta de cada unidad de producto es 5 u.m. y los respectivos precios unitarios de los factores capital y trabajo son 2 y 10 u.m., determinar "K" y "L" de modo que se maximice el beneficio, justificando que el óptimo obtenido es global.

SOLUCIÓN

- Denotando $B(K;L)$ el beneficio, es:

$$B(K;L) = \underbrace{\left(40.K^{1/2}.L^{1/4}\right)}_{\text{Ingreso}} - \underbrace{(2.K + 10.L)}_{\text{Coste}}$$

- Condición de primer orden:

$$\nabla B(K;L) = \bar{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B_K = 20.K^{-1/2}.L^{1/4} - 2 = 0 \\ B_L = 10.K^{1/2}.L^{-3/4} - 10 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 10.L^{1/4} = K^{1/2} \\ K^{1/2} = L^{3/4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K = 1000 \\ L = 100 \end{array}\right.$$

- Condición 2º orden:

  La función de beneficio presenta un máximo relativo en el punto (1000;100), pues la matriz HB(1000;100) es definida negativa:

$$HB(1000;100) = \begin{bmatrix} -10.K^{-3/2}.L^{1/4} & 5.K^{-1/2}.L^{-3/4} \\ 5.K^{-1/2}.L^{-3/4} & -\dfrac{15}{2}.K^{1/2}.L^{-7/4} \end{bmatrix}_{(1000,100)}$$

- Beneficio máximo: $B(1000;100) = 1000$

- Optimalidad global:

  Como HB(K;L) es definida negativa en todo punto del dominio económico, el máximo local (1000;100) también es global.

EJERCICIO 21

Clasificar las siguientes formas cuadráticas

$$Q_1(x;y;z) = -3.y^2 + 4.x.y + 8.x.z + 4.y.z$$
$$Q_2(x;y;z) = -x^2 - 2.y^2 - z^2 - 2.x.y - 2.x.z - 2.y.z$$
$$Q_3(x;y;z) = x^2 - 2.x.y + 2.x.z$$

SOLUCIÓN

• Q_1 es indefinida, pues su matriz asociada $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ es tal que

$$H_1 = a_{11} = 0 \ ; \ H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} < 0 \ ; \ H_3 = |A_1| \neq 0$$

A la misma conclusión se llega sin más que observar que

$$Q_1(0;1;0) = -3 < 0 \text{ y } Q_1(1;0;1) = 8 > 0$$

• Q_2 es definida negativa, pues su matriz asociada $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ es tal que

$$H_1 = a_{11} = -1 < 0 \ ; \ H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} > 0 \ ; \ H_3 = |A_2| < 0$$

• Q_3 es indefinida, pues $Q_3(1;0;0) = 1 > 0$ y $Q_3(1;1;0) = -1 < 0$.

EJERCICIO 22

Siendo $a < 3$, sea la función $f(x) = \begin{cases} |x - a| & \text{si } x \leq 3 \\ -x^2 + 7.x - 10 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Determinar "a" para que sea continua en $\Re$. Para el valor de "a" obtenido estudiar la derivabilidad de $f(x)$ y calcular $f'(x)$.

SOLUCIÓN

CONTINUIDAD

- Si $x < 3 \Rightarrow f(x) = |x - a| \Rightarrow$ continua en todo punto.
- Si $x > 3 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 7.x - 10 \Rightarrow$ continua en todo punto.
- La función es continua en el punto $x = 3$ sólo si $a = 1$, pues sólo en tal caso sucede que los límites laterales de $f(x)$ en $x = 3$ coinciden con $f(3)$:

  $*$ Si $x \to 3^- \Rightarrow f(x) = |x - a| \to |3 - a| = 3 - a$, pues si $a < 3$, es $|3 - a| = 3 - a$.

  $*$ Si $x \to 3^+ \Rightarrow f(x) = -x^2 + 7.x - 10 \to 2$

  $*$ $f(3) = |3 - a| = 3 - a$

DERIVABILIDAD

$$\text{Si } a = 1, \text{ es } f(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x \leq 3 \\ -x^2 + 7.x - 10 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -(x - 1) & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 7.x - 10 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = -(x - 1) \Rightarrow f'(x) = -1$.
- Si $1 < x < 3 \Rightarrow f(x) = x - 1 \Rightarrow f'(x) = 1$.
- Si $x > 3 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 7.x - 10 \Rightarrow f'(x) = -2.x + 7$.
- La función carece de derivada en $x = 1$, pues $f'(1^-) \neq f'(1^+)$:

$$f'(1^-) = \left(\frac{d(-(x-1))}{dx}\right)_{x=1} = -1 \;;\; f'(1^+) = \left(\frac{d(x-1)}{dx}\right)_{x=1} = 1$$

- La función tiene derivada en $x = 3$, pues $f'(3^-) = f'(3^+)$:

$$f'(3^-) = \left(\frac{d(x-1)}{dx}\right)_{x=3} = 1$$

$$f'(3^+) = \left(\frac{d(-x^2 + 7.x - 10)}{dx}\right)_{x=3} = (-2.x + 7)_{x=3} = 1$$

- Es:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2.x^2 + 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 23

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

1) Hallar una expresión canónica y clasificar la forma cuadrática cuya matriz asociada es "A".
2) Hallar una matriz de paso ortogonal.
3) Clasificar $Q(X)=X^{t}AX$ restringida a $x_1-x_2=0$.

SOLUCIÓN

1) Autovalores de "A": $|A-\lambda\bullet I|=-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=\begin{cases}1 \text{ (Simple)}\\ -1 \text{ (Doble)}\end{cases}$

- Expresión canónica: $Q(y_1;y_2;y_3)=y_1^2-y_2^2-y_3^2$.
- Clasificación: como los autovalores tienen signo distinto, la forma cuadrática es indefinida.

2) Autovectores de $\lambda=1$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}}_{A-1\bullet I}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=-x_2\\ 2.x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=-x_2\\ x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=1)=\{(-x_2;x_2;0),\ \forall x_2\in\Re\}=\{x_2\bullet(-1;1;0),\ \forall x_2\in\Re\}$$

El vector $\bar{v}_1=(-1;1;0)$ es base de $L(\lambda=1)$.

El vector $\bar{w}_1=\frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}=(-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)$ es base ortonormal de $L(\lambda=1)$.

- Autovectores de $\lambda=-1$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{A+1\bullet I}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-1)=\{(x_2;x_2;x_3),\ \forall x_2,x_3\in\Re\}=$$

$$=\{x_2\bullet(1;1;0)+x_3\bullet(0;0;1),\ \forall x_2,x_3\in\Re\}$$

Los vectores $\bar{v}_2=(1;1;0)$ y $\bar{v}_3=(0;0;1)$ son una base de $L(\lambda=-1)$.

Los vectores $\bar{w}_2=\frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|}=(1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)$ y $\bar{w}_3=\frac{\bar{v}_3}{\|\bar{v}_3\|}=(0;0;1)$ son una base ortonormal de $L(\lambda=-1)$.

- Siendo $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, la matriz "C" tal que $C^t \bullet A \bullet C = D$, es:

$$C=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \overline{w_3}\end{array}$$

3) La forma cuadrática $Q(X)=X^tAX$ es definida negativa en el subespacio $x_1-x_2=0$, pues en la matriz orlada

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

es

$$\overline{A}_2=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}>0\ ;\ \left|\overline{A}\right|<0$$

EJERCICIO 24

La función de producción de una empresa es $Q(x;y)=120.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{1/3}$, siendo "x" e "y" son las cantidades empleadas de los factores de producción. Si la función de coste es $C(x;y)=3.x+4.y$ u.m. y el empresario gasta 48 u.m. en la compra de los factores de producción, hallar la producción máxima de la empresa.

SOLUCIÓN

- Debemos maximizar $Q(x;y)$ bajo la restricción $C(x;y)=3.x+4.y-48=0$.
- Función de Lagrange:

$$L(x;y;\lambda)=120.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{1/3}-\lambda.(3.x+4.y-48)$$

- Condición de primer orden:

$$\nabla L(x;y;\lambda)=\bar{0}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&L_x=60.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{1/3}-3.\lambda=0\\&L_y=40.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{-2/3}-4.\lambda=0\\&L_\lambda=-(3.x+4.y-48)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\lambda=20.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{1/3} & \text{(I)}\\ \lambda=10.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{-2/3} & \text{(II)}\\ 3.x+4.y-48=0 & \text{(III)}\end{array}\right.$$

De (I) y (II) se deduce que:

$$20.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{1/3}=10.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{-2/3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.(y-3)=x-2\Rightarrow x=2.y-4$$

Haciendo $x=2.y-4$ en (III), resulta:

$$3.(2.y-4)+4.y-48=0\Rightarrow 10.y=60\Rightarrow y=6\Rightarrow x=8$$

$$\boxed{x=2.y-4}$$

Al hacer $x=8$, $y=4$ en (I), resulta $\lambda=20.(8-2)^{-1/2}.(6-3)^{1/3}=\dfrac{20.\sqrt[3]{3}}{\sqrt{6}}$

- Condición de 2º orden: el punto $(8;4)$ corresponde a un máximo relativo, pues:

$$\left|\begin{array}{ccc}0 & C_x & C_y\\ C_x & L_{x^2} & L_{xy}\\ C_y & L_{xy} & L_{y^2}\end{array}\right|_{(8;4)}=$$

$$=\left|\begin{array}{ccc}0 & 3 & 4\\ 3 & -30.(x-2)^{-3/2}.(y-3)^{1/3} & 20.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{-2/3}\\ 4 & 20.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{-2/3} & -\dfrac{80}{3}.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{-5/3}\end{array}\right|_{(8;4)}>0$$

- Producción máxima: $Q(8;6)=120.(6-2)^{1/2}.(6-3)^{1/3}$

EJERCICIO 25

La función de utilidad de una persona que consume dos bienes en cantidades "x" e "y" respectivamente, es $U(x;y) = 100 - e^{-x} - e^{-2.y}$. ¿Cómo se maximiza la utilidad si el consumidor dispone de 40 u.m. y los respectivos precios unitarios de los bienes son 2 y 4 u.m.?

SOLUCIÓN

- Debemos maximizar $U(x;y)$ bajo la restricción $g(x;y) = 2.x + 4.y - 40 = 0$.
- Función de Lagrange:

$$L(x;y;\lambda) = 100 - e^{-x} - e^{-2.y} - \lambda.(2.x + 4.y - 40)$$

- Condición de primer orden:

$$\nabla L(x;y;\lambda) = \bar{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L_x = e^{-x} - 2.\lambda = 0 \\ L_y = 2.e^{-2.y} - 4.\lambda = 0 \\ L_\lambda = -(2.x + 4.y - 40) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = e^{-x}/2 & \text{(I)} \\ \lambda = e^{-2.y}/2 & \text{(II)} \\ 2.x + 4.y - 40 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) y (II) se deduce que:

$$e^{-x} = e^{-2.y} \Rightarrow x = 2.y$$

Haciendo $x = 2.y$ en (III), resulta:

$$2.(2.y) + 4.y - 40 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 10$$

Al hacer $x = 10,\ y = 5$ en (I), resulta $\lambda = e^{-10}/2$

- Condición de 2º orden: $(10;5)$ corresponde a un máximo relativo, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{x^2} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{y^2} \end{vmatrix}_{(10;5)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -e^{-x} & 0 \\ 4 & 0 & -4.e^{-2.y} \end{vmatrix}_{(10;5)} > 0$$

EJERCICIO 26

La función de coste total de una empresa en competencia perfecta, es

$$C(x) = a.x^2 + b.x + c$$

donde "x" es la cantidad producida.

Determinar los valores de "a", "b" y "c" sabiendo que:

El coste mínimo es de 50 u.m. y se alcanza si $x = 4$

El beneficio máximo es de 150 u.m. y se alcanza si $x = 6$

SOLUCIÓN

- Al exigir que $C(4) = 50$, resulta:

$$16.a + 4.b + c = 50 \quad (I)$$

- Es $C'(x) = 2.a.x + b$, y al exigir que se anule en $x = 4$, resulta:

$$8.a.x + b = 0 \quad (II)$$

- Siendo "p" el precio unitario del bien producido, la función de beneficio de la empresa es $B(x) = \text{Ingresos} - \text{Costes} = p.x - \left(a.x^2 + b.x + c\right)$
- Al exigir que $B(4) = 150$, resulta:

$$6.p - (36.a + 6.x + c) = 150 \quad (III)$$

- Es $B'(x) = p - 2.a.x - b$, y al exigir que se anule en $x = 6$, resulta:

$$p - 12.a - b = 0 \quad (IV)$$

- La solución del sistema de ecuaciones que forman (I), (II), (III) y (IV) es

$$a = 10 \;;\; b = -80 \;;\; c = 210 \;;\; p = 40$$

EJERCICIO 27

La producción de una empresa es $Q(x;y)=\sqrt{(x+100).y}$, siendo "x" e "y" son las cantidades de los factores de producción, cuyos respectivos precios unitarios son 1 y 2 u.m. Si se gastan 500 u.m. en comprar los factores de producción, determina la cantidad a emplear de cada factor para que la producción sea máxima. ¿Cuál es aproximadamente la producción máxima si se gastan 504 u.m.?

SOLUCIÓN

- Debemos maximizar $Q(x;y)$ bajo la restricción $C(x;y)=x+2.y-500=0$.
- Función de Lagrange: $L(x;y;\lambda)=\sqrt{(x+100).y}-\lambda.(x+2.y-500)$
- Condición de primer orden:

$$\nabla L(x;y;\lambda)=\bar{0}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} L_x=\dfrac{\sqrt{y}}{2.\sqrt{x+100}}-\lambda=0 \\ L_y=\dfrac{\sqrt{x+100}}{2.\sqrt{y}}-2.\lambda=0 \\ L_\lambda=-(x+2.y-500)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll} \lambda=\dfrac{\sqrt{y}}{2.\sqrt{x+100}} & \text{(I)} \\ \lambda=\dfrac{\sqrt{x+100}}{4.\sqrt{y}} & \text{(II)} \\ x+2.y-500=0 & \text{(III)} \end{array}\right.$$

De (I) y (II) se deduce que $\dfrac{\sqrt{y}}{2.\sqrt{x+100}}=\dfrac{\sqrt{x+100}}{4.\sqrt{y}}\Rightarrow 2.y=x+100$

Haciendo $2.y=x+100$ en (III), resulta:

$$x+(x+100)-500=0\Rightarrow x=200\Rightarrow y=150$$

Al hacer $x=200$, $y=150$ en (I), resulta $\lambda=\sqrt{2}/4$

- Condición 2º orden: (200;150) corresponde a un máximo relativo, pues:

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & C_x & C_y \\ C_x & L_{x^2} & L_{xy} \\ C_y & L_{xy} & L_{y^2} \end{array}\right|_{(200;150)}=$$

$$=\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{4}.(x+100)^{-3/2}.y^{1/2} & \frac{1}{4}.(x+100)^{-1/2}.y^{-1/2} \\ 2 & \frac{1}{4}.(x+100)^{-1/2}.y^{-1/2} & -\frac{1}{4}.(x+100)^{1/2}.y^{-3/2} \end{array}\right|_{(200;150)}>0$$

- Producción máxima: $Q(200;150)=\sqrt{45000}$
- Como $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cong\left(\dfrac{\text{Variación de Producción}}{\text{Variación de Coste}}\right)_{(200;150)}$, si el coste aumenta 4 u.m., es Variación de Producción $\cong 4.\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$; por tanto, si el coste es de 504 u.m., la producción máxima aproximada es $\sqrt{45000}+\sqrt{2}$.

EJERCICIO 28

La utilidad de una persona es $U(x;y)=\frac{1}{2}.\text{Ln } x+\frac{1}{2}.\text{Ln }(16-y)$, donde "x" es la cantidad consumida de un bien cuyo precio unitario es 4 u.m, e "y" es la cantidad de horas que trabaja, siendo su salario de 3 u.m./hora. Maximizar la utilidad si el consumidor invierte toda su renta en el consumo del bien en cuestión.

SOLUCIÓN

- Debemos maximizar $U(x;y)$ bajo la restricción $g(x;y)=4.x-3.y=0$.
- Función de Lagrange:

$$L(x;y;\lambda)=\frac{1}{2}.\text{Ln } x+\frac{1}{2}.\text{Ln }(16-y)-\lambda.(4.x-3.y)$$

- Condición de primer orden:

$$\nabla L(x;y;\lambda)=\bar{0}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} L_x=\frac{1}{2.x}-4.\lambda=0\\ L_y=-\frac{1}{2.(16-y)}+3.\lambda=0\\ L_\lambda=-(4.x-3.y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\lambda=\frac{1}{8.x} & \text{(I)}\\ \lambda=\frac{1}{6.(16-y)} & \text{(II)}\\ 4.x-3.y=0 & \text{(III)}\end{array}\right.$$

De (I) y (II) se deduce que: $\frac{1}{8.x}=\frac{1}{6.(16-y)}\Rightarrow x=\frac{3}{4}.(16-y)$

Haciendo $x=\frac{3}{4}.(16-y)$ en (III), resulta:

$$4.\frac{3}{4}.(16-y)-3.y=0\Rightarrow y=8\Rightarrow x=6$$

Al hacer $x=6$, $y=8$ en (I), resulta $\lambda=1/48$

- Condición de 2º orden: (6;8) corresponde a un máximo relativo, pues:

$$\left|\begin{array}{ccc}0 & g_x & g_y\\ g_x & L_{x^2} & L_{xy}\\ g_y & L_{xy} & L_{y^2}\end{array}\right|_{(10;5)}=\left|\begin{array}{ccc}0 & 4 & -3\\ 4 & -\frac{1}{2.x^2} & 0\\ -3 & 0 & -\frac{1}{2.(16-y)^2}\end{array}\right|_{(6;8)}>0$$

EJERCICIO 29

Determinar la relación que debe existir entre "a" y "b" para que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+a}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+b}{x+2}\right)^{x+5}$$

SOLUCIÓN

- Es:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+a}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+a).\left(\frac{x+1}{x+3}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-2.\frac{x+a}{x+3}}=e^{-2}$$

- Es:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+b}{x+2}\right)^{x+5}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+5).\left(\frac{x+b}{x+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(b-2).\frac{x+5}{x+2}}=e^{b-2}$$

- Es $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+a}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+b}{x+2}\right)^{x+5}$ si $e^{-2}=e^{b-2}\Rightarrow b=0.$

EJERCICIO 30

Siendo $f(x)=x.e^{-x}$, calcular $\int_0^1 f(x).dx$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

SOLUCIÓN

- Es:

$$\int_0^1 x.e^{-x}.dx=\left(-x.e^{-x}\right)_0^1+\int_0^1 e^{-x}.dx=$$

Por partes: $\int_a^b u.dv=(u.v)_a^b-\int_a^b v.du$

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=e^{-x}\Rightarrow v=\int e^{-x}.dx=-e^{-x}$

$$=\left(0-e^{-1}\right)+\left(-e^{-x}\right)_0^1=-e^{-1}+\left(1-e^{-1}\right)=1-2.e^{-1}$$

- Es:

$$\lim_{x\to+\infty}x.e^{-x}=(\infty.0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=(0/0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Aplicamos la Regla de L'Hospital

EJERCICIO 31

La función de producción de una empresa es $Q(x;y;z)=x.y+z^2$, siendo "x", "y" y "z" son las cantidades empleadas de los factores de producción, cuyos respectivos precios unitarios son 11, 7 y 6 u.m. El coste fijo es de 40 u.m., y el precio unitario de venta es 2 u.m.

1) Calcular las funciones de beneficio, de beneficio medio y de coste total.
2) Calcular el beneficio si $x=y=2$, $z=9$, determinado la variación aproximada de beneficio si se pasa a $x=1$, $y=3$, $z=9$.

SOLUCIÓN

- Siendo "x", "y" y "z" las cantidades empleadas de los factores de producción, cuyos respectivos precios unitarios son 11, 7 y 6 u.m., el coste variable es $11.x+7.y+6.z$; así, si el coste fijo es de 40 u.m., el coste total es:

$$C(x;y;z)=40+11.x+7.y+6.z$$

- Si el precio unitario de venta es 2 u.m., el ingreso obtenido es:

$$I(x;y;z)=2.Q(x;y;z)=2.(x.y+z^2)$$

- El beneficio es:

$$B(x;y;z)=I(x;y;z)-C(x;y;z)=2.(x.y+z^2)-(40+11.x+7.y+6.z)$$

- El beneficio medio es:

$$BM(x;y;z)=\frac{B(x;y;z)}{Q(x;y;z)}=\frac{2.(x.y+z^2)-(40+11.x+7.y+6.z)}{x.y+z^2}$$

- Es:

$$B(2;2;9)=2.(2.2+9^2)-(40+11.2+7.2+6.9)=40$$

- La variación aproximada de beneficio si el input pasa de (2;2;9) a (1;3;9) es la diferencial total del beneficio:

$$dB(2;2;9)=\nabla B(2;2;9)\bullet\begin{bmatrix}1-2\\3-2\\9-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -3 & 30\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=4$$

$$\boxed{\begin{array}{l}B(x;y;z)=2.(x.y+z^2)-(40+11.x+7.y+6.z)\Rightarrow\\ \Rightarrow\begin{cases}B_x(2;2;9)=(2.y-11)_{(2;2;9)}=-7\\ B_y(2;2;9)=(2.x-7)_{(2;2;9)}=-3\\ B_z(2;2;9)=(4.z-6)_{(2;2;9)}=30\end{cases}\end{array}}$$

EJERCICIO 32

Sea la forma cuadrática $Q(x;y;z) = x^2 + y^2 + 3.z^2 - 2.x.y + 2.x.z - 2.y.z$

1) Dar la expresión canónica de "Q" y clasificarla.

2) Según los valores de "b", clasificar "Q" sujeta a la restricción $b.z - y = 0$.

SOLUCIÓN

• Expresión matricial de "Q":

$$Q(x;y;z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

• Autovalores de "A":

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 5.\lambda^2 - 4.\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1, 4$$

• Expresión canónica de "Q":

$$Q(x^*;y^*;z^*) = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = (y^*)^2 + 4.(z^*)^2$$

• La forma cuadrática es semidefinida positiva, pues la matriz "A" tiene un autovalor nulo y los restantes son positivos.

• Si $b.z - y = 0$, es $y = b.z$; así:

$$Q(x;b.z;z) = x^2 + (b.z)^2 + 3.z^2 - 2.x.(b.z) + 2.x.z - 2.(b.z).z =$$

$$= x^2 + (b^2 - 2.b + 3).z^2 + 2.(1-b).x.z =$$

$$= \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1-b \\ 1-b & b^2 - 2.b + 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Sea cual sea el valor de "B", la forma cuadrática "Q" es definida positiva bajo la restricción $b.z - y = 0$, pues:

$$H_1 = 1 > 0 \; ; \; H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-b \\ 1-b & b^2 - 2.b + 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \forall b \in \Re$$

EJERCICIO 33

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

1) Determinar "a" de modo que sea definida positiva la forma cuadrática cuya matriz asociada es "A".
2) Para $a = 5$, determinar las matrices "P" y "C" tales que $P^{-1} \bullet A \bullet P = D$ y $C^t \bullet A \bullet C = D$, siendo "D" una matriz diagonal.

SOLUCIÓN

- La forma cuadrática es definida positiva sólo si:

$$H_1 = a_{11} > 0 \ ; \ H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ ; \ H_3 = |A| > 0$$

La forma cuadrática es definida positiva sólo si $a > 1/2$, pues:

$$H_1 = 3 > 0, \forall a \in \Re$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 3.a - 1 > 0 \text{ si } a > \frac{1}{3}$$

$$H_3 = |A| = 8.a - 4 > 0 \text{ si } a > \frac{1}{2}$$

- Si $a = 5$, es $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, y se tiene que:

$$|A - \lambda \bullet I| = -\lambda^3 + 11.\lambda^2 - 36.\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 3, 6$$

- Autovectores de $\lambda = 2$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-2\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_2 = -x_3 \\ -x_1 + 3.x_2 = x_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(-x_3;0;x_3), \forall x_3 \in \Re\} =$$
$$= \{x_3 \bullet (-1;0;1), \forall x_3 \in \Re\}$$

El vector $\overline{v}_1 = (-1;0;1)$ es base de $L(\lambda = 2)$.

El vector $\overline{w}_1 = \frac{\overline{v}_1}{\|\overline{v}_1\|} = (-1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2})$ es base ortonormal de $L(\lambda = 2)$.

- Autovectores de $\lambda = 3$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A-3\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -x_2 = -x_3 \\ -x_1 + 2.x_2 = x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 3) = \{(x_3; x_3; x_3), \forall x_3 \in \Re\} =$$
$$= \{x_3 \bullet (1;1;1), \forall x_3 \in \Re\}$$

El vector $\overline{v}_2 = (1;1;1)$ es base de $L(\lambda = 3)$.

El vector $\overline{w}_2 = \dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$ es base ortonormal de $L(\lambda = 3)$.

- Autovectores de $\lambda = 6$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}}_{A-6\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 3.x_1 + x_2 = x_3 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 6) = \{(x_3; -2.x_3; x_3), \forall x_3 \in \Re\} =$$
$$= \{x_3 \bullet (1; -2; 1), \forall x_3 \in \Re\}$$

El vector $\overline{v}_3 = (1; -2; 1)$ es una base de $L(\lambda = 6)$.

El vector $\overline{w}_3 = \dfrac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = (1/\sqrt{6}; -2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6})$ es base ortonormal de $L(\lambda = 3)$.

- Siendo $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, la matriz "P" tal que $P^{-1} \bullet A \bullet P = D$, es:

$$\begin{array}{c} P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \quad\;\; \begin{matrix} \uparrow & \;\uparrow & \;\uparrow \\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \overline{v}_3 \end{matrix} \end{array}$$

La matriz "C" tal que $C^t \bullet A \bullet C = D$, es:

$$\begin{array}{c} C = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \\ \quad\;\; \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow & \quad\uparrow \\ \overline{w}_1 & \quad\overline{w}_2 & \quad\overline{w}_3 \end{matrix} \end{array}$$

EJERCICIO 34

1) Discutir el sistema $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \Re$.

2) Clasificar la forma cuadrática cuya matriz asociada es la de los coeficientes del anterior sistema, determinando su expresión canónica.

SOLUCIÓN

1) Las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -2 & -1 & b \\ 0 & -1 & -1 & c \end{bmatrix}$$

Es $rg(A) = 2$, pues $|A| = 0$ y el menor de orden 2 indicado es no nulo. Como el citado menor es no nulo, podemos eliminar la 3ª columna de "B" sin que se altere su rango. Es:

$$rg(B) = rg \begin{bmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & -2 & b \\ 0 & -1 & c \end{bmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } c - b - a = 0 \\ 3 \text{ si } c - b - a \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & -2 & b \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix} = c - b - a}$$

Por tanto:

* Si $c - b - a \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 3 \neq rg(A) \Rightarrow$ incompatible

* Si $c - b - a = 0 \Rightarrow rg(B) = 2 = rg(A) < n^{o}$ incóg. $\Rightarrow$ Compatible indeterminado

2) Autovalores de "A":

$$|A - \lambda \bullet I| = -\lambda^3 - 4.\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \text{ (simple)} \\ -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

- La forma cuadrática es semidefinida negativa, pues la matriz "A" tiene un autovalor nulo y los restantes son negativos.

- Expresión canónica de "Q":

$$Q(x^*; y^*; z^*) = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = -(y^*)^2 - (z^*)^2$$

EJERCICIO 35

1) Discutir el sistema $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a, b \in \Re$.

2) Clasificar la forma cuadrática cuya matriz asociada es la de los coeficientes del anterior sistema.

SOLUCIÓN

1) Las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es $|A| = a$, que se anula sólo si $a = 0$.

* Si $a \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(B) = n^{o}$ incógnitas $\Rightarrow$ Compatible determinado

* Si $a = 0$, es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es $rg(B) = rg\begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } b = 0 \\ 3 \text{ si } b \neq 0 \end{cases}$

Si $a = 0$ y $b = 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 2 < n^{o}$ incóg. $\Rightarrow$ comp. indet.

Si $a = 0$ y $b \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg(B) \Rightarrow$ incompatible

2) Sean:

$$H_1 = a_{11} \; ; \; H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \; ; \; H_3 = |A|$$

En nuestro caso:

$$H_1 = a \; ; \; H_2 = -2.a \; ; \; H_3 = a$$

Por tanto:

* Si $a > 0 \Rightarrow H_1 > 0,\ H_2 < 0,\ H_3 > 0 \Rightarrow$ indefinida.

* Si $a < 0 \Rightarrow H_1 < 0,\ H_2 > 0,\ H_3 < 0 \Rightarrow$ definida negativa.

* Si $a = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, que es semidefinida negativa, pues la matriz "A" tiene un autovalor nulo y los restantes son negativos.

EJERCICIO 36

Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\begin{cases} |2.x-1| & \text{si } x\le 3 \\ -x^2+8.x-10 & \text{si } x>3 \end{cases}$

1) Analizar su continuidad.

2) Calcular $f'(x)$

SOLUCIÓN

1) Si $x<3 \Rightarrow f(x)=|2.x-1| \Rightarrow$ "f" es continua en todo punto.

Si $x>3 \Rightarrow f(x)=-x^2+8.x-10 \Rightarrow$ "f" es continua en todo punto.

La función "f" es continua en $x=3$, pues sus límites laterales en $x=3$ coinciden con $f(3)=|2.3-1|=5$:

$$* \text{ Si } x\to 3^- \Rightarrow f(x)=|2.x-1|\to 5$$

$$* \text{ Si } x\to 3^+ \Rightarrow f(x)=-x^2+8.x-10\to 5$$

2) Es:

$$f(x)=\begin{cases} -(2.x-1) & \text{si } x\le 1/2 \\ 2.x-1 & \text{si } 1/2<x\le 3 \\ -x^2+8.x-10 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{pues } u(x)=2.x-1 \text{ toma valores } \begin{cases}\text{negativos}\\ \text{positivos}\end{cases} \text{ si } \begin{cases} x<1/2 \\ x>1/2\end{cases}}$$

- Si $x<1/2 \Rightarrow f(x)=-(2.x-1) \Rightarrow f'(x)=-2$
- Si $1/2<x<3 \Rightarrow f(x)=2.x-1 \Rightarrow f'(x)=2$
- Si $x>3 \Rightarrow f(x)=-x^2+8.x-10 \Rightarrow f'(x)=-2.x+8$
- La función "f" no tiene derivada en $x=1/2$, pues sus derivadas laterales en dicho punto no son iguales:

$$f'(0'5^-)=\left(\frac{d(-(2.x-1))}{dx}\right)_{x=0'5}=-2$$

$$f'(0'5^+)=\left(\frac{d(2.x-1)}{dx}\right)_{x=0'5}=2$$

- La función "f" tiene derivada en $x=3$, pues sus derivadas laterales en dicho punto son iguales:

$$f'(3^-)=\left(\frac{d(2.x-1)}{dx}\right)_{x=3}=2$$

$$f'(3^+)=\left(\frac{d(-x^2+8.x-10)}{dx}\right)_{x=3}=(-2.x+8)_{x=3}=2$$

EJERCICIO 37

Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\begin{cases} 1+2.x^2 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 3.x+\text{Ln } x & \text{si } 1<x\le 3 \end{cases}$

1) Calcular sus funciones derivadas primera y segunda.
2) Estudiar el crecimiento de "f", determinando sus óptimos absolutos.

SOLUCIÓN

1) Si $-1<x<1 \Rightarrow f(x)=1+2.x^2 \Rightarrow f'(x)=4.x$.
   Si $1<x<3 \Rightarrow f(x)=3.x+\text{Ln } x \Rightarrow f'(x)=3+(1/x)$.

   La función "f" es continua en $x=1$ (los límites laterales de "f" en dicho punto coinciden con $f(1)=3$), y tiene derivada en $x=1$, pues sus derivadas laterales en $x=1$ son iguales:

$$f'(1^-)=\left(\frac{d(1+2.x^2)}{dx}\right)_{x=1}=(4.x)_{x=1}=4$$

$$f'(1^+)=\left(\frac{d(3.x+\text{Ln } x)}{dx}\right)_{x=1}=\left(3+\frac{1}{x}\right)_{x=1}=4$$

   Si $-1<x<1 \Rightarrow f'(x)=4.x \Rightarrow f''(x)=4$.

   Si $1<x<3 \Rightarrow f'(x)=3+(1/x) \Rightarrow f''(x)=-1/x^2$.

   La función f' es continua en $x=1$ (los límites laterales de f' en dicho punto coinciden con $f'(1)=4$), y no tiene derivada en $x=1$, pues sus derivadas laterales en $x=1$ son distintas:

$$f''(1^-)=\left(\frac{d(4.x)}{dx}\right)_{x=1}=4$$

$$f'(1^+)=\left(\frac{d(3+(1/x))}{dx}\right)_{x=1}=\left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=1}=-1$$

2) La función "f" es decreciente si $x<0$ (pues $f'(x)<0$ si $x<0$) y creciente si $x>0$ (pues $f'(x)>0$ si $x>0$). Así, "f" presenta un mínimo local o relativo en $x=0$, siendo $f(0)=1+2.0^2=1$.

   En los extremos $x=-1$ y $x=3$ del intervalo $[-1;3]$, es:

$$f(-1)=1+2.(-1)^2=3 \; ; \; f(3)=3.3+\text{Ln } 3=9+\text{Ln } 3$$

   Como el valor de "f" en el mínimo relativo $x=0$ es inferior a $f(-1)$ y a $f(3)$, el mínimo absoluto de "f" en $[-1;3]$ se presenta en $x=0$. Como "f" carece de máximos relativos en $[-1;3]$ y $f(3)>f(-1)$, el máximo absoluto de "f" en $[-1;3]$ se presenta en $x=3$.

EJERCICIO 38

Sea la forma cuadrática

$$Q(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+x_2^2+3.x_3^2-2.x_1.x_2+2.x_1.x_3-2.x_2.x_3$$

1) Dar una expresión canónica de la forma cuadrática y clasificarla.
2) Clasificar, según los valores del parámetro "b", la forma cuadrática sujeta a la restricción $-x_2+b.x_3=0$.

SOLUCIÓN

Es:

$$Q(x_1;x_2;x_3)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}}_{A}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

La forma cuadrática es semidefinida positiva, pues los autovalores de "A" son no negativos:

$$\left|A-\lambda\bullet I\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+5.\lambda^2-4.\lambda=0\Rightarrow\lambda=\begin{cases}0\\1\\4\end{cases}$$

La expresión canónica de "Q" es $Q(y_1;y_2;y_3)=0.y_1^2+y_2^2+4.y_3^2$

Es:

$$Q(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+x_2^2+3.x_3^2-2.x_1.x_2+2.x_1.x_3-2.x_2.x_3=$$

$$=x_1^2+b^2.x_3^2+3.x_3^2-2.b.x_1.x_3+2.x_1.x_3-2.b.x_3^2=$$

$$\boxed{-x_2+b.x_3=0.\Rightarrow x_2=b.x_3}$$

$$=x_1^2+(b^2-2.b+3).x_3^2+(2-2.b).x_1.x_3=$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_3\end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1-b\\ 1-b & b^2-2.b+3\end{bmatrix}}_{W}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix}$$

Para la matriz "W" es:

$$K_1=w_{11}=1>0\ ;\ K_2=\begin{vmatrix}w_{11} & w_{12}\\ w_{21} & w_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1-b\\ 1-b & b^2-2.b+3\end{vmatrix}=2>0$$

así, la forma cuadrática "Q" sujeta a la restricción $-x_2+b.x_3=0$ es definida positiva para todo valor de "b".

EJERCICIO 39

Estudie la continuidad de $f(x;y)$ en todos los puntos de $\Re^2$:

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{y^2.(x-1)}{y^4+(x-1)^2} & \text{si } (x;y)\neq(1;0)\\ 0 & \text{si } (x;y)=(1;0)\end{cases}$$

SOLUCIÓN

Si $(x;y)\neq(1;0)$ entonces "f" es continua en $(x;y)$, pues $f(x;y)$ es un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula en $(x;y)$.

La función dada carece de límite doble en $(1;0)$, pues si $(x;y)$ se aproxima a $(1;0)$ siguiendo la trayectoria parabólica $x=1+m.(y-0)^2$, el valor al que se aproxima $f(x;y)$ depende del valor de "m":

$$\lim_{y\to 0} f(1+m.(y-0)^2;y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2.(m.y^2)}{y^4+(m.y^2)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

La función "f" no es continua en $(1;0)$, pues carece de límite doble en $(1;0)$.

EJERCICIO 40

La producción de una empresa es $Q(x;y)=120.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{1/3}$, donde $Q(x;y)$ es el número de unidades producidas y "x" e "y" son las cantidades empleadas de los factores de producción. Si la función de coste de la empresa es $C(x;y)=3.x+8.y$ u.m. y el empresario decide gastar 50 u.m. en la compra de los factores productivos, hallar la producción máxima de la empresa y justificar la respuesta.

SOLUCIÓN

Debemos hallar el punto $(x;y)$ que cumple la condición $C(x;y)=3.x+8.y=50$ y hace que la función $Q(x;y)=120.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{1/3}$ alcance su valor máximo.

La función de Lagrange es:

$$L(x;y;\lambda)=120.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{1/3}-\lambda.(3.x+8.y-50)$$

La condición necesaria exige la anulación del gradiente de la función de Lagrange:

$$\nabla L=\overline{0}\Rightarrow\begin{cases}\partial L/\partial x=60.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{1/3}-3.\lambda=0\\ \partial L/\partial y=40.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{-2/3}-8.\lambda=0\\ \partial L/\partial\lambda=-(3.x+8.y-50)=0\end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce que

$$\frac{60.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{1/3}}{3}=\frac{40.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{-2/3}}{8}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4.(y-3)=x-2\Rightarrow x=4.y-10$$

Haciendo $x=4.y-10$ en la tercera ecuación del sistema $\nabla L=\bar{0}$, resulta:

$$3.(4.y-10)+8.y-50=0\Rightarrow y=4\Rightarrow\begin{cases}x=6\\ \lambda=10\end{cases}$$

El punto $(6;4)$, para el que es $\lambda=10$, corresponde a un máximo, pues:

$$|H(L(6;4;10))|=$$
$$=\left|\begin{matrix}0 & -3 & -8\\ -3 & -30.(x-2)^{-3/2}.(y-3)^{1/3} & 20.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{-2/3}\\ -8 & 20.(x-2)^{-1/2}.(y-3)^{-2/3} & -\frac{80}{3}.(x-2)^{1/2}.(y-3)^{-5/3}\end{matrix}\right|_{(6;4;10)}=$$
$$=\left|\begin{matrix}0 & -3 & -8\\ -3 & -30.4^{-3/2} & 20.4^{-1/2}\\ -8 & 20.4^{-1/2} & -\frac{80}{3}.4^{1/2}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}0 & -3 & -8\\ -3 & -30/8 & 10\\ -8 & 10 & -40/3\end{matrix}\right|>0$$

La producción máxima es $Q(6;4)=120.(6-2)^{1/2}.(4-3)^{1/3}=240$

Aunque no se pida, aprovecha para acreditar que estás al corriente de la interpretación del multiplicador de Lagrange; para ello basta decir que:

$$\lambda=10\cong\left(\frac{\text{Variación de Producción}}{\text{Variación de Coste}}\right)_{(6;4)}$$

EJERCICIO 41

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según el valor del parámetro "a":

$$\begin{aligned} -x+2.y+11.z&=a\\ 2.x+3.y-z&=-4\\ -x-y+2.z&=1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Sea "A" la matriz de los coeficientes del sistema y "B" la matriz ampliada:

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&11\\2&3&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-1&2&11&a\\2&3&-1&-4\\-1&-1&2&1\end{bmatrix}$$

Es $\mathrm{rg}(A)=2$, pues $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}-1&2\\2&3\end{vmatrix}\neq 0.$

En la matriz "B", es $\begin{vmatrix}-1&2&a\\2&3&-4\\-1&-1&1\end{vmatrix}=a+5$, que se anula sólo si $a=-5$.

$*$ Si $a\neq -5 \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=2\neq \mathrm{rg}(B)=3 \Rightarrow$ incompatible.

$*$ Si $a=-5 \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=2=\mathrm{rg}(B)<$ nº incógnitas $\Rightarrow$ compatible indeterminado.

EJERCICIO 42

Sea $f(x)=e^x/x$

1) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) Determinar las asíntotas de $f(x)$.

3) Estudiar el crecimiento de $f(x)$ determinando sus extremos relativos.

4) Esbozar la gráfica de $f(x)$.

SOLUCIÓN

1) Es:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=\frac{e^0}{0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty\ ;\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=\frac{e^0}{0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}=\frac{0}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underset{\boxed{\text{Regla de L'Hospital}}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1}=e^{+\infty}=+\infty$$

2) La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal si $x \to -\infty$, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

No hay asíntota horizontal si $x \to +\infty$, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

No hay asíntota oblicua si $x \to +\infty$, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = +\infty$.

3) Para determinar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de "f" y los puntos en que "f" presenta máximo o mínimo relativo, estudiamos el signo de su función derivada primera:

$$f'(x) = \frac{e^x . x - e^x}{x^2} = \frac{e^x .(x-1)}{x^2}$$

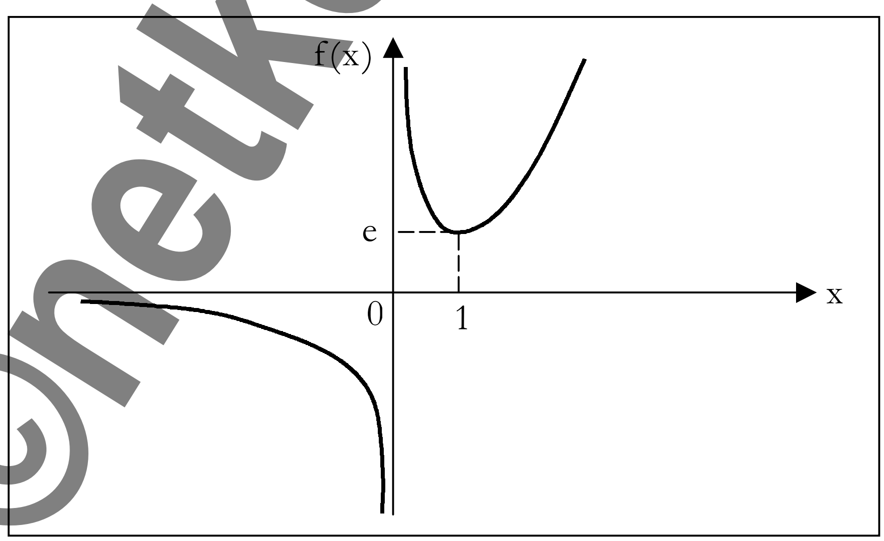
Si $x \neq 0$ es $e^x/x^2 > 0$; así, el signo de $f'(x)$ es el de "$x-1$", que es negativo ($\Rightarrow$ $f(x)$ es decreciente) si $x < 1$ y positivo ($\Rightarrow$ $f(x)$ es creciente) si $x > 1$. En $x = 1$ hay mínimo relativo, pues en él "f" pasa de ser decreciente a ser creciente.

4) La función está definida y es continua excepto en los puntos que anulan el denominador; o sea, está definida y es continua si $x \neq 0$. Como e^x es positivo en todo punto, el signo de $f(x) = e^x/x$ es el de "x"; así, es $f(x) < 0$ si $x < 0$, siendo $f(x) > 0$ si $x > 0$.

La gráfica no es simétrica respecto al eje OY, pues $f(-x) = -e^{-x}/x \neq f(x)$.

La gráfica no es simétrica respecto al origen, pues $f(-x) = -e^{-x}/x \neq -f(x)$.

La gráfica de "f" no toca al eje de abcisas, pues $f(x) = 0$ carece de solución.



EJERCICIO 43

La función de producción de una empresa es $Q(x;y) = x.y$, siendo "x" e "y" los factores empleados de producción. El nivel de contaminación generado por el proceso productivo es $C(x;y) = 3.x + 2.y$. Determinar las cantidades "x" e "y" que maximizan la producción con un nivel de contaminación 88. ¿Es un óptimo global?

SOLUCIÓN

- Debemos maximizar $Q(x;y)$ bajo la restricción $C(x;y) = 3.x + 2.y - 88 = 0$.
- Función de Lagrange:

$$L(x;y;\lambda) = x.y - \lambda.(3.x + 2.y - 88)$$

- Condición de primer orden:

$$\nabla L(x;y;\lambda) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} L_x = y - 3.\lambda = 0 \\ L_y = x - 2.\lambda = 0 \\ L_\lambda = -(3.x + 2.y - 88) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{y}{3} & \text{(I)} \\ \lambda = \dfrac{x}{2} & \text{(II)} \\ 3.x + 2.y - 88 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) y (II) se deduce que $\dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2.y}{3}$

Haciendo $x = \dfrac{2.y}{3}$ en (III), resulta $y = 22$, por lo que $x = \dfrac{44}{3}$.

Al hacer $y = 22$ en (I), resulta $\lambda = 22/3$.

- Condición 2º orden:

El punto $(44/3;22)$ corresponde a un máximo relativo, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & C_x & C_y \\ C_x & L_{x^2} & L_{xy} \\ C_y & L_{xy} & L_{y^2} \end{vmatrix}_{(44/3;22)} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(44/3;22)} > 0$$

- Optimalidad global:

Como $HQ(x;y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es indefinida en todo punto, no puede afirmarse que el punto $(44/3;22)$ corresponda a un máximo absoluto.

EJERCICIO 44

Clasificar las siguientes formas cuadráticas

$$Q_1(x;y;z) = -3.y^2 + 4.x.y + 8.x.z + 4.y.z$$
$$Q_2(x;y;z) = -x^2 - 2.y^2 - z^2 - 2.x.y - 2.x.z - 2.y.z$$
$$Q_3(x;y;z) = x^2 - 2.x.y + 2.x.z$$

SOLUCIÓN

- Q_1 es indefinida, pues su matriz asociada $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ es tal que

$$H_1 = a_{11} = 0 \ ; \ H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} < 0 \ ; \ H_3 = |A_1| \neq 0$$

A la misma conclusión se llega sin más que observar que

$$Q_1(0;1;0) = -3 < 0 \text{ y } Q_1(1;0;1) = 8 > 0$$

- Q_2 es definida negativa, pues su matriz asociada $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ es tal que

$$H_1 = a_{11} = -1 < 0 \ ; \ H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} > 0 \ ; \ H_3 = |A_2| < 0$$

- Q_3 es indefinida, pues $Q_3(1;0;0) = 1 > 0$ y $Q_3(1;1;0) = -1 < 0$.