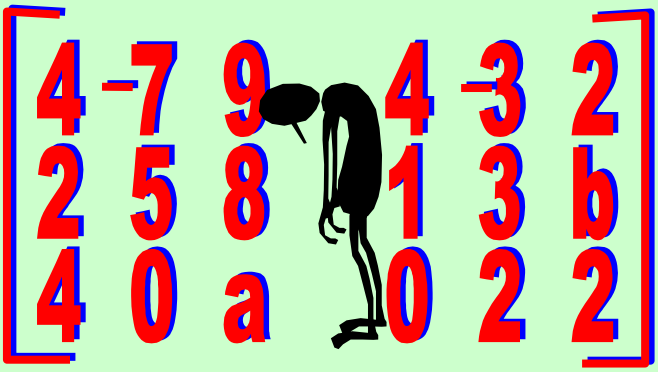
MATEMATICAS 1º

VADEMÉCUM DE ALGEBRA LINEAL

Licenciatura en ADE
Licenciatura en Economía
Diplomatura en Empresariales

INDICE



Matriz

Llamamos matriz de orden $m \times n$ a toda disposición rectangular de $m \times n$ números reales ordenados en "m" filas y "n" columnas. El conjunto formado por las matrices de orden $m \times n$ se denota $M_{m \times n}$. Para identificar los elementos que forman una matriz "A" usamos subíndices: al hablar del elemento a_{ij} de "A", hablamos del elemento de "A" que está en la i-ésima fila y en la j-ésima columna, y para referirnos genéricamente a los elementos de "A", escribimos $A = \{a_{ij}\}$.

Se dice que una matriz es cuadrada de orden "n" si tiene "n" filas y "n" columnas; en tal caso, los elementos que tienen los dos subíndices iguales forman la diagonal principal de la matriz. La traza de una matriz cuadrada "A" es la suma de los elementos de la diagonal principal de "A", y se denota Tr(A).
Si una matriz es de orden $1 \times n$, se dice que es una matriz fila; y si es de orden $m \times 1$, se dice que es una matriz columna.
Diremos que dos matrices son equidimensionales si tienen el mismo orden; es decir, si ambas tienen igual número de filas e igual número de columnas.
La matriz opuesta de la matriz "A" se denota $-A$, y es la matriz obtenida al cambiar el signo de los elementos que "A".
Se llama nula a toda matriz cuyos elementos sean nulos; se denota "0" tenga el orden que tenga.
Las matrices equidimensionales $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$.

Suma de matrices

Si $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ son matrices de orden $m \times n$, su suma A+B es la matriz de orden $m \times n$ tal que $A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$.

1) Es conmutativa: $A + B = B + A$
2) Es asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) Admite elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$
4) Cada matriz tiene simétrica respecto de la suma: $A + (-A) = (-A) + A = 0$
5) Si "A" y "B" son matrices cuadradas de igual orden, es $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.

Producto de un escalar por una matriz

El producto del escalar "α" por la matriz "A" se denota $\alpha \bullet A$, y es la matriz obtenida al multiplicar por "α" todos los elementos de "A". Siendo "α" y "β" escalares y "A" y "B" matrices equidimensionales, es:

$$\alpha \bullet (A + B) = \alpha \bullet A + \alpha \bullet B \;;\; (\alpha + \beta) \bullet A = \alpha \bullet A + \beta \bullet A \;;\; \alpha \bullet (\beta \bullet A) = (\alpha . \beta) \bullet A \;;\; Tr(\alpha \bullet A) = \alpha . Tr(A)$$

Producto de matrices

Siendo $A = \{a_{ij}\}$ una matriz de orden $m \times n$ y $B = \{b_{ij}\}$ una matriz de orden $n \times p$, la matriz $C = \{c_{ij}\}$ de orden $m \times p$ es el producto de "A" por "B", y se denota $C = A \bullet B$, si c_{ij} es la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento de la i-ésima fila de "A" por su correspondiente de la j-ésima columna de "B"; o sea: $c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$.

1) Asociativa: $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$
2) Distributiva respecto de la suma: $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$
3) En general, el producto de matrices no es conmutativo.
4) Si los productos $A \bullet B$ y $B \bullet A$ tienen sentido, es $Tr(A \bullet B) = Tr(B \bullet A)$,

Traspuesta de una matriz

Si en una matriz "A" permutamos filas por columnas conservando el orden de ellas, resulta la matriz llamada traspuesta de "A", que se denota A^t. Es: $(A^t)^t = A$; $(A + B)^t = A^t + B^t$; $(\alpha \bullet A)^t = \alpha \bullet A^t$; $(A \bullet B \bullet C \bullet D)^t = D^t \bullet C^t \bullet B^t \bullet A^t$

Matriz simétrica

La matriz cuadrada "A" es "simétrica" si $A = A^t$; o sea, si $a_{ij} = a_{ji}$. Para toda matriz $A = \{a_{ij}\}$ sucede que $A \bullet A^t$ es simétrica, siendo $Tr(A \bullet A^t) = \sum a_{ij}^2$. Si "A" es cuadrada, $A + A^t$ es simétrica.

Matriz antisimétrica

La matriz cuadrada "A" es antisimétrica si $A = -A^t$; o sea: $a_{ij} = -a_{ji}$. Los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son nulos. Si "A" es cuadrada, $A - A^t$ es antisimétrica. Toda matriz cuadrada "C" puede descomponerse en suma de una matriz simétrica "S" y otra antisimétrica "H":

$$S = (C + C^t)/2 = \{(c_{ij} + c_{ji})/2\} \ ; \ H = (C - C^t)/2 = \{(c_{ij} - c_{ji})/2\}$$

Matriz unidad: matriz cuadrada tal que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y los demás elementos de la matriz son nulos. Se denota "I".

Matriz escalar: matriz cuadrada tal que los elementos de la diagonal principal son todos iguales, siendo nulos los restantes elementos de la matriz.

Matriz diagonal: matriz cuadrada tal que son nulos todos los elementos no situados en la diagonal principal.

Matriz triangular: matriz cuadrada tal que todos los elementos a un lado de la diagonal principal son nulos.

Matriz idempotente: la matriz cuadrada "A" es idempotente si $A \bullet A = A$.

Matriz involutiva: la matriz cuadrada "A" es involutiva si $A \bullet A = I$. Si "A" es idempotente, la matriz $2 \bullet A - I$ es involutiva. Si "A" es involutiva, la matriz $(A + I)/2$ es idempotente.

Transformaciones elementales

Si "A" es una matriz, se llaman transformaciones elementales a las siguientes: la trasposición, el cambio entre sí de dos filas o columnas de "A", la multiplicación de todos los elementos de una línea de “A” por un mismo número distinto de cero, y la adición a todos los elementos de una fila (columna) de "A" de los elementos correspondientes de otra fila (columna) multiplicados por un mismo número. Las transformaciones elementales no alteran el rango de una matriz.

Determinantes, menor complementario, cofactor

A cada matriz cuadrada "A" le asociamos un número que llamamos "determinante" de "A" y denotamos $|A|$; según que $|A| \neq 0$ ó $|A| = 0$, decimos que "A" es regular o singular. El menor complementario del elemento a_{ij} de "A" se denota α_{ij}, y es el determinante de la matriz obtenida al suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna de "A". El cofactor de a_{ij} es $(-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$, y se denota A_{ij}. El valor $|A|$ es la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento de una línea de "A" por su cofactor. Siendo "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, es $|A \bullet B| = |A|.|B|$.

1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
2) Si todos los elementos de una línea son cero, el determinante es cero.
3) Si se cambia el orden de dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo.
4) Si dos líneas paralelas son iguales o proporcionales, el determinante es cero.
5) Si todos los elementos de una línea se multiplican por un mismo número, el determinante queda multiplicado por ese número. Así, si la matriz "A" es cuadrada de orden "n" y "k" es un número real, entonces $|k \bullet A| = k^n.|A|$.
6) Un determinante no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos o restamos otras líneas paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera.
7) Un determinante es cero si una de sus líneas puede obtenerse como suma de otras líneas paralelas a ella, multiplicadas cada una de éstas por un número.

Menores de una matriz

Si seleccionamos los elementos de la matriz "A" (no necesariamente cuadrada) que a la vez están en "k" cualquiera de sus filas y en "k" cualquiera de sus columnas, obtenemos una matriz cuadrada de orden "k" de cuyo determinante se dice que es un menor de orden "k" de "A".

Rango de una matriz

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden. Se denota $rg(A)$.

1) El rango de una matriz coincide con el de su matriz traspuesta.
2) El rango de una matriz no varía si cambiamos el orden de filas o columnas.
3) El rango de una matriz no varía si multiplicamos una línea por un número distinto de cero.
4) El rango de una matriz no varía si a una línea le sumamos otras paralelas multiplicadas por números cualesquiera.
5) El rango de una matriz no varía al suprimir una línea de ceros.
6) Si una línea es suma de otras paralelas a ella multiplicadas por ciertos números, podemos eliminar dicha línea sin que se altere el rango de la matriz.

Adjunta de una matriz cuadrada

Siendo "A" una matriz cuadrada de orden "n", llamamos adjunta de "A" a la matriz cuadrada de orden "n" que resulta al sustituir cada elemento de la matriz traspuesta de "A" por su cofactor. Se denota Adj.(A).

1) $A \bullet Adj.(A) = (Adj.(A)) \bullet A = |A| \bullet I$
2) Siendo "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, es: $Adj.(A \bullet B) = ((Adj.(A)) \bullet ((Adj.(B))$.
3) Es $|A|.|Adj.(A)| = (|A|)^n \Rightarrow |Adj.(A)| = (|A|)^{n-1}$.
4) Si "A" es singular, la matriz Adj.(A) también lo es, y $rg(Adj.(A)) \leq 1$ además: $A \bullet Adj.(A) = (Adj.(A)) \bullet A = 0$.

Inversa de una matriz cuadrada

Si "A" es una matriz cuadrada de orden "n" e "I" es la matriz unidad del mismo orden que "A", se llama inversa de "A" y se denota A^{-1} a la matriz cuadrada de orden "n" que verifica que $A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I$; es: $A^{-1} = \text{Adj.}(A)/|A|$.

1) Es $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Si "A" es simétrica, A^{-1} también es simétrica, si existe A^{-1}.
2) Siendo $|A| \neq 0$ y "B" y "C" matrices cuadradas del mismo orden que "A", si $A \bullet B = A \bullet C$, entonces $B = C$.
3) La inversa de un producto de matrices regulares del mismo orden es el producto de las inversas en orden contrario. Por ejemplo, siendo "A, "B", "C" y "D" regulares del mismo orden, es: $(A \bullet B \bullet C \bullet D)^{-1} = D^{-1} \bullet C^{-1} \bullet B^{-1} \bullet A^{-1}$.
4) Si "A" tiene inversa, es $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Matriz ortogonal

Siendo "A" una matriz cuadrada regular e "I" la matriz unidad del mismo orden que "A", se dice que "A" es ortogonal si $A \bullet A^t = I$ ó $A^t = A^{-1}$. El determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1. Si "A" es ortogonal, A^t y A^{-1} también lo son. Si "A" y "B" son ortogonales de igual orden, la matriz $A \bullet B$ es ortogonal.

Matrices congruentes y semejantes

Siendo "A" y "B" matrices cuadradas de orden "n", se dice que son congruentes si existe una matriz "H" cuadrada de orden "n" y tal que $A = H^t \bullet B \bullet H$. Se dice que "A" y "B" son semejantes si existe una matriz regular "P" cuadrada de orden "n" y tal que $B = P^{-1} \bullet A \bullet P$. Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante y la misma traza.

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un sistema de "m" ecuaciones cuya "estructura" es tal que todas las incógnitas siempre aparecen elevadas a exponente unidad y multiplicadas por constantes a_{ij}:

$$a_{k1}.x_1 + a_{k2}.x_2 + \ldots + a_{kn}.x_n = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

Se dice que el sistema es incompatible si no tiene solución. Se dice que es compatible si tiene solución; en tal caso, se dice determinado si la solución es única, y se dice que es indeterminado si tiene infinitas soluciones. Se dice que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Si en un sistema lineal sustituimos una ecuación por la que resulta al multiplicarla por un número cualquiera no nulo y sumarla miembro a miembro a otras ecuaciones del sistema (tras multiplicar éstas por un número cualquiera), el nuevo sistema es equivalente al primero.

Teorema de Rouché-Frobenius

En un sistema lineal de "n" incógnitas cuya matriz de coeficientes es "A" y cuya matriz ampliada es "B", es condición necesaria y suficiente para que dicho sistema sea compatible (tenga solución) es que $rg(A) = rg(B)$; y en tal caso:

Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ el sistema tiene solución única
Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones

Si $rg(A) \neq rg(B) \Leftrightarrow$ el sistema es incompatible.

Sistemas lineales homogéneos

Se dice que un sistema lineal es homogéneo (SLH) si es nulo el término independiente de cada ecuación; así, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros; por ello siempre tienen igual rango, y eso hace que los sistemas lineales homogéneos siempre sean compatibles, pues siempre admiten la ST (solución trivial). Por tanto, según Rouché-Frobenius, para un SLH con "n" incógnitas y matriz de coeficientes "A", se tiene que:

Si $rg(A) = n \Rightarrow$ el sistema sólo tiene la solución trivial
Si $rg(A) < n \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones

Si un SLH tiene infinitas soluciones, el conjunto de ellas tiene dos mágicas propiedades: la suma de dos soluciones del sistema es solución del sistema, y el producto de una solución del sistema por un número real es solución del sistema.

Espacio Vectorial

Sea $(K;\oplus;\otimes)$ un cuerpo conmutativo y "ω" el elemento neutro de la ley producto "$\otimes$" definida en el conjunto "K". Sea $V=\{\bar{x};\bar{y};\bar{h};......\}$ un conjunto donde hemos definido una ley de composición interna llamada "suma" (se denota "+") y una ley de composición externa llamada "producto por un escalar" (se denota "$\bullet$"); así, se dice que el conjunto "V", con las leyes suma y producto por un escalar definidas en él, es un espacio vectorial (EV) sobre el cuerpo $(K;\oplus;\otimes)$ si:

1) La suma es conmutativa: $\forall \bar{x};\bar{y}\in V$ es $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$
2) La suma es asociativa: $\forall \bar{x};\bar{y},\bar{h}\in V$ es $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{h})=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{h}$
3) La suma admite elemento neutro: $\exists\ \bar{0}\in V\ /\ \forall \bar{x}\in V$ es $\bar{x}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{x}=\bar{x}$
4) Cada elemento de "V" tiene simétrico respecto de la suma: $\forall\ \bar{x}\in V,\ \exists\ \bar{y}\in V$ tal que $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}=\bar{0}$
5) $\omega\bullet\bar{x}=\bar{x},\ \forall\bar{x}\in V$
6) $\forall\alpha,\beta\in K,\ \forall\bar{x}\in V$, es: $(\alpha\oplus\beta)\bullet\bar{x}=(\alpha\bullet\bar{x})+(\beta\bullet\bar{x})$
7) $\forall\alpha\in K,\ \forall\bar{x},\bar{y}\in V$, es: $\alpha\bullet(\bar{x}+\bar{y})=(\alpha\bullet\bar{x})+(\alpha\bullet\bar{y})$
8) $\forall\alpha,\beta\in K,\ \forall\bar{x}\in V$, es: $\alpha\bullet(\beta\bullet\bar{x})=(\alpha\otimes\beta)\bullet\bar{x}$

Si "V" es un espacio vectorial, a sus elementos se les llama vectores.

Combinación lineal de vectores

Se dice que el vector $\bar{x}$ es combinación lineal (CL) de los vectores $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$ si es posible encontrar "k" números reales $\alpha_1,\ ...\ ,\alpha_k$ tales que $\bar{x}=\alpha_1\bullet\bar{h}_1+....+\alpha_k\bullet\bar{h}_k$. Expresado en términos intuitivos, se dice que $\bar{x}$ es CL de $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$ para indicar que la "información" que contiene $\bar{x}$ puede obtenerse a partir de la que contienen $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$ (para ello basta multiplicar cada vector $\bar{h}_i$ por un número adecuado α_i y sumar todos los productos realizados).

A EFECTOS PRÁCTICOS

Para averiguar si el vector $\bar{x}$ es CL de los vectores $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$, exigiremos que $\bar{x}=\alpha_1\bullet\bar{h}_1+....+\alpha_k\bullet\bar{h}_k$, lo que SIEMPRE nos conducirá a un sistema lineal con "k" incógnitas $\alpha_1,...,\alpha_k$; y $\bar{x}$ es (no es) CL de $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$ si dicho sistema lineal tiene (no tiene) solución. La matriz A/B de coeficientes/ampliada del sistema lineal en cuestión es:

$$A/B=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|c}\bullet & \bullet & ..... & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & ..... & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & ..... & \bullet & \bullet\\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\\ \bullet & \bullet & ..... & \bullet & \bullet\end{array}\right]\\ \begin{array}{cccc c}\uparrow & & \uparrow\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \bar{h}_1 & & ..... & \bar{h}_k & \bar{x}\end{array}\end{array}$$

Por tanto, según Rouché-Frobenius, si "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango, el sistema lineal tiene (no tiene) solución, por lo que $\bar{x}$ es (no es) CL de $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$.

Dependencia e independencia lineal de vectores

Los vectores $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$ son linealmente independientes (LI) si la ecuación vectorial $\alpha_1\bullet\bar{h}_1+....+\alpha_k\bullet\bar{h}_k=\bar{0}$ admite sólo la solución trivial (ST) $\alpha_1=\alpha_2=....=\alpha_k=0$; si no son LI, se dice que son linealmente dependientes (LD). Afirmar que unos vectores de "V" son LI es afirmar que entre ellos no hay "información repetida": es imposible obtener la "información" que contiene cualquiera de ellos combinando linealmente la "información" que contienen los restantes. Al contrario: afirmar que son LD es afirmar que entre ellos hay "información repetida": es posible obtener la "información" que contiene alguno de ellos combinando linealmente la "información" que contienen los restantes.

A EFECTOS PRÁCTICOS

Para saber si $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$ son LI o LD exigimos que $\alpha_1\bullet\bar{h}_1+...+\alpha_k\bullet\bar{h}_k=\bar{0}$, lo que SIEMPRE nos conducirá a un SLH con "k" incógnitas $\alpha_1,...,\alpha_k$. Los vectores son LI o LD según que dicho SLH tenga únicamente la ST o no. La matriz "A" de coeficientes del sistema es la que tiene por columnas a $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$. Por tanto, según Rouché-Frobenius, los vectores $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$ son LI si el rango de "A" coincide con el número de incógnitas (o sea, $rg(A)=k$), pues en tal caso el sistema sólo tiene la solución trivial $\alpha_1=\alpha_2=....=\alpha_k=0$. Son LD si el rango de "A" es inferior al número de incógnitas (o sea, si $rg(A)<k$), pues en ese caso el sistema no tiene sólo la ST. Si $rg(A)=p$, el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse entre $\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k$ es "p"; es concreto, son LI los "p" vectores correspondientes a cualesquiera "p" columnas de "A" con las que pueda formarse un menor no nulo de orden "p".

Dimensión de un espacio vectorial: es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en él.

Sistema generador de un espacio vectorial

Si "V" es un EV y $H=\{\bar{h}_1,\ ....\ ,\ \bar{h}_k\}\subset V$, se dice que "H" es un sistema generador (SG) de "V" si haciendo combinaciones lineales con los vectores de "H" puede obtenerse cualquier vector de "V". De otro modo: "H" es un SG de "V" si la "información" que contiene cualquier vector de "V" puede obtenerse combinando linealmente la que contienen los vectores de "H".

$$\text{Si dim.}(V)=n \text{ y } \operatorname{rg}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow\uparrow \quad \uparrow \\ \bar{h}_1 \;\cdots\; \bar{h}_k \end{array} \text{ es } \begin{cases} = n \Rightarrow \bar{h}_1,\ldots,\bar{h}_k \text{ son un SG de "V"} \\ < n \Rightarrow \bar{h}_1,\ldots,\bar{h}_k \text{ no son un SG de "V"} \end{cases}$$

Base de un espacio vectorial

Si "V" es un EV de dimensión "n", se llama base de "V" a todo SG de "V" que esté formado por "n" vectores; es decir, una base de "V" es un subconjunto de "V" formado por "n" vectores (ni uno más ni uno menos) linealmente independientes. Como toda base de "V" es SG de "V", haciendo combinaciones lineales con los vectores de una base de "V" puede obtenerse cualquier vector de "V".

Coordenadas de un vector respecto de una base

Si $\bar{x}$ es un vector del espacio vectorial "V" y $B=\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n\}$ es una base de "V", las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base "B" son los coeficientes de la combinación lineal que permite obtener $\bar{x}$ a partir de los vectores de la base "B"; por tanto, si $\bar{x}=x_1 \bullet \bar{h}_1+\ldots+x_n \bullet \bar{h}_n$, las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de "B" son $(x_1; \ldots; x_n)$, y escribiremos $\bar{x}=(x_1; \ldots; x_n)$. Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

Ecuación de un cambio de base

Siendo $\text{dim.}(V)=n$, sean $B_1=\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n\}$ y $B_2=\{\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n\}$ bases de "V", siendo:

$$\begin{array}{c} \bar{k}_1 = a_{11} \bullet \bar{h}_1 + \ldots + a_{1n} \bullet \bar{h}_n \\ \vdots \\ \bar{k}_n = a_{n1} \bullet \bar{h}_1 + \ldots + a_{nn} \bullet \bar{h}_n \end{array}$$

Así, si $\bar{p} \in V$ es tal que

$$\bar{p}=x_1 \bullet \bar{h}_1+\ldots+x_n \bullet \bar{h}_n \;;\; \bar{p}=y_1 \bullet \bar{k}_1+\ldots+y_n \bullet \bar{k}_n$$

la ecuación del cambio $B_1 \to B_2$ que relaciona las coordenadas $(x_1; \ldots; x_n)$ de $\bar{p}$ respecto de B_1 (base "vieja") con las coordenadas $(y_1; \ldots; y_n)$ de $\bar{p}$ respecto de B_2 (base "nueva") es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow\uparrow \quad \uparrow \\ \bar{k}_1 \;\cdots\; \bar{k}_n \end{array}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

donde las columnas de "A" son las coordenadas que respecto de la base "vieja" B_1 tienen los vectores $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ que forman la base "nueva" B_2.

Subespacio vectorial

Si "V" es un espacio vectorial y "S" es un subconjunto de "V", se dice que "S" es subespacio de "V" si con las leyes suma y producto por un escalar definidas en "V", el conjunto "S" también es un espacio vectorial, lo que sucede sólo si:

1) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in S$, ocurre que $\bar{x}+\bar{y} \in S$
2) $\forall \bar{x} \in S$ y $\forall \alpha \in \Re$, ocurre que $\alpha \bullet \bar{x} \in S$

o lo que es igual:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in S,\; \forall \alpha, \beta \in \Re \text{ ocurre que } \alpha \bullet \bar{x}+\beta \bullet \bar{y} \in S$$

O sea, "S" es subespacio de "V" si toda combinación lineal de vectores de "S" es un vector de "S". Si "S" es subespacio de "V", vale para "S" todo lo dicho sobre combinación lineal de vectores de "S", dependencia e independencia lineal de vectores de "S", sistema de generadores de "S", dimensión de "S", base de "S", coordenadas de un vector de "S" respecto de una base de "S" y cambio de base de referencia en "S".

Variedad Lineal

Si "V" es un espacio vectorial y $H=\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_k\} \subset V$, la variedad lineal engendrada por "H" se denota L(H), y es el conjunto que forman los vectores de "V" que pueden obtenerse como combinación lineal de los vectores de "H":

$$L(H)=\{\bar{x} \in V \,/\, \bar{x}=\theta_1 \bullet \bar{h}_1+\ldots+\theta_k \bullet \bar{h}_k,\; \theta_i \in \Re,\; \forall i=1,2,\ldots,k\}$$

Del conjunto $H=\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_k\}$ se dice que es un sistema generador de L(H). El conjunto L(H) es un subespacio de "V", y su dimensión (o sea, el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en L(H)) coincide con el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en "H", que coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H". Si $\text{rg}(A)=p$, los "p" vectores de "H" correspondientes a cualesquiera "p" columnas de "A" con las que se pueda formar un menor no nulo de orden "p" forman una base de L(H). Obtendremos unas ecuaciones paramétricas de L(H) al expresar matemáticamente que todo vector de L(H) es combinación lineal de los vectores de una base de L(H). Al eliminar los parámetros en las ecuaciones paramétricas, obtendremos unas ecuaciones cartesianas de L(H), o sea, obtendremos un sistema lineal homogéneo de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones es L(H).

Producto escalar de vectores

Si "V" es un espacio vectorial de dimensión "n" y $\bar{x} = (x_1; .. ; x_n)$ e $\bar{y} = (y_1; .. ; y_n)$ son vectores del espacio vectorial "V", su producto escalar es el número real que se denota $\bar{x} \bullet \bar{y}$, siendo $\bar{x} \bullet \bar{y} = x_1 . y_1 + ... + x_n . y_n$.

1) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$, es $\bar{x} \bullet \bar{y} = \bar{y} \bullet \bar{x}$

2) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$, $\forall \alpha \in \Re$, es $(\alpha \bullet \bar{x}) \bullet \bar{y} = \alpha . (\bar{x} \bullet \bar{y})$

3) $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$, es $\bar{x} \bullet (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} \bullet \bar{y}) + (\bar{x} \bullet \bar{z})$

Vectores ortogonales

Se dice que los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$ del espacio vectorial "V" son ortogonales si $\bar{x} \bullet \bar{y} = 0$.

El vector cero es ortogonal a cualquier otro vector, pues $\bar{0} \bullet \bar{x} = 0$, $\forall \bar{x}$.

Si los vectores $\bar{h}_1, ... , \bar{h}_k$ (distintos de $\bar{0}$) son ortogonales dos a dos, son LI.

Base ortogonal

Una base de un espacio vectorial es ortogonal si el producto escalar de cualesquiera dos vectores de la base es cero.

La facultad de abstracción

La dificultad de desarrollar en el ser humano su capacidad de abstracción, que con la facultad de razonamiento constituye uno de los principales objetivos formativos de la enseñanza de la Matemática, lo prueba la historia del cero y del número negativo.

La palabra cero (de origen árabe: sifr = vacío) fue introducida hacia fines del siglo XV y el uso del cero como número se aceptó sólo desde el siglo XIII por Leonardo de Pisa (también llamado Fibonacci), que lo tomó de la escuela arábiga española, cuyo representante más prominente era Juan de Sevilla. Los hindúes, en su célebre numeración decimal, usaban el cero como hueco, lo que ya representa un avance formidable de representar la nada (o ausencia de unidades) por un símbolo; a esto llegaron también los mayas en su notable sistema de numeración vigesimal.

Y hasta el siglo XVII no fueron aceptados sin discusión los números negativos; los griegos nunca consideraron como solución de un problema una cantidad negativa o irracional.

Las "fracciones" no eran números para los matemáticos griegos, sino "razones de números"; pero el logisto = hábil calculador entre los griegos, o el escriba entre los egipcios, persistía en "calcular" profesionalmente con las "fracciones" como si fuesen "números", sin preocuparse por justificar lógicamente sus reglas de cálculo e indiferente a las críticas irónicas de Platón.

Ortogonalización de Graam-Schmidt

Siendo "V" un EV de dimensión "k" y $B_1 = \{\bar{h}_1, ... , \bar{h}_k\}$ una base de "V", calcularemos una base $B_2 = \{\bar{d}_1, ... , \bar{d}_k\}$ que sea ortogonal trabajando así:

$$\begin{aligned}
\bar{d}_1 &= \bar{h}_1 \\
\bar{d}_2 &= \bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1 \\
\bar{d}_3 &= \bar{h}_3 + \beta_1 . \bullet \bar{d}_1 + \beta_2 . \bullet \bar{d}_2 \\
\bar{d}_4 &= \bar{h}_4 + \theta_1 . \bullet \bar{d}_1 + \theta_2 . \bullet \bar{d}_2 + \theta_3 . \bullet \bar{d}_3 \\
&\vdots \\
\bar{d}_k &= \bar{h}_k + \lambda_1 . \bullet \bar{d}_1 + \lambda_2 . \bullet \bar{d}_2 + \lambda_3 . \bullet \bar{d}_3 + ... + \lambda_{k-1} . \bullet \bar{d}_{k-1}
\end{aligned}$$

Los valores de $\alpha, \beta_1, \beta_2, ... , \lambda_1, \lambda_2, ... , \lambda_{k-1}$ los determinaremos al exigir que $\bar{d}_1, ... , \bar{d}_k$ sean ortogonales dos a dos.

Módulo de un vector

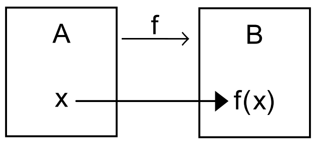
Es la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo.

Base ortonormal

Una base es ortonormal si es ortogonal y sus vectores tienen módulo 1.

Correspondencia entre conjuntos

Siendo "A" y "B" conjuntos cualesquiera, se llama correspondencia de "A" en "B" a todo criterio o ley que asocie elementos de "A" con elementos de "B". Si el nombre del criterio es "f", para expresar que "f" es una correspondencia de "A" en "B" escribiremos $f: A \mapsto B$. De "A" se dice que es el conjunto "inicial" de "f", y de "B" se dice que es el conjunto "final" de "f". Si $x \in A$, escribiremos $f(x)$ para referirnos a los elementos de "B" que "f" asocia a "x".

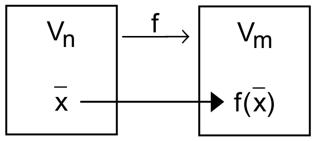


Aplicación entre conjuntos

Se dice que la correspondencia $f: A \mapsto B$ es una aplicación si cada elemento de "A" tiene una única imagen en "B". Una aplicación $f: A \mapsto B$ es inyectiva si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Se dice que "f" es sobreyectiva si todo elemento del conjunto final "B" es imagen de algún elemento del conjunto inicial "A". Se dice que "f" es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Aplicación lineal entre espacios vectoriales

Si V_n y V_m son espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales y $f: V_n \mapsto V_m$ es una aplicación, se dice que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo si:



$$1)\ f(\bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}),\ \forall\, \bar{x},\bar{y} \in V_n$$
$$2\ \ f(\alpha \bullet \bar{x}) = \alpha \bullet f(\bar{x}),\ \forall\, \bar{x} \in V_n,\ \forall\, \alpha \in \Re$$

o lo que es igual: $f(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}) = \alpha \bullet f(\bar{x}) + \beta \bullet f(\bar{y}),\ \forall\, \bar{x},\bar{y} \in V_n,\ \forall\, \alpha,\beta \in \Re$.

Una aplicación $f: V_n \mapsto V_m$ es lineal sólo si su expresión matemática es así:

$$f(x_1; \ldots; x_n) = (a_{11}.x_1 + \ldots + a_{1n}.x_n; \ldots\ldots; a_{m1}.x_1 + \ldots + a_{mn}.x_n)$$

donde todos los a_{ij} son constantes.

Expresión de una aplicación lineal

Sea $f: V_n \mapsto V_m$ una aplicación lineal, $B_1 = \{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n\}$ la base de referencia en V_n y $B_2 = \{\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_m\}$ la base de referencia la base en V_m. Si se conocen los vectores $f(\bar{h}_1), \ldots, f(\bar{h}_n)$, puede determinarse la imagen según "f" de cualquier vector $\bar{x} = x_1 \bullet \bar{h}_1 + \ldots + x_n \bullet \bar{h}_n \in V_n$. En concreto, si

$$f(\bar{h}_1) = a_{11} \bullet \bar{k}_1 + \ldots + a_{1m} \bullet \bar{k}_m$$
$$\vdots$$
$$f(\bar{h}_n) = a_{n1} \bullet \bar{k}_1 + \ldots + a_{nm} \bullet \bar{k}_m$$

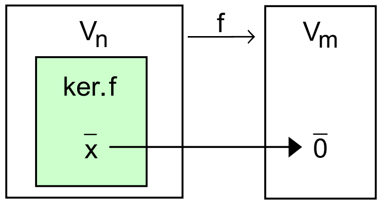
entonces, si $f(\bar{x}) = y_1 \bullet \bar{k}_1 + \ldots + y_m \bullet \bar{k}_m$, es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\boxed{\text{coordenadas de } f(\bar{x}) \text{ respecto de } B_2}} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}^{A}_{\uparrow\, f(\bar{h}_1)\ \ldots\ldots\ f(\bar{h}_n)\,\uparrow} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\boxed{\text{coordenadas de } \bar{x} \text{ respecto de } B_1}} \quad \text{(I)}$$

De (I) se dice que es la expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2; y de "A" se dice que es la matriz asociada a "f" respecto de las bases B_1 y B_2.

Núcleo de una aplicación lineal

El núcleo de la aplicación lineal $f: V_n \mapsto V_m$ se denota "ker.f", y es el conjunto que forman los vectores de V_n cuya imagen según "f" es el vector cero de V_m.



$$\ker.f = \{\bar{x} \in V_n \ /\ f(\bar{x}) = \bar{0} \in V_m\} \underset{\uparrow}{=} \{\bar{x} \in V_n \ /\ A \bullet \bar{x} = \bar{0} \in V_m\}$$

$$\boxed{\text{siendo "A" la matriz asociada a "f", es } f(\bar{x}) = A \bullet \bar{x}}$$

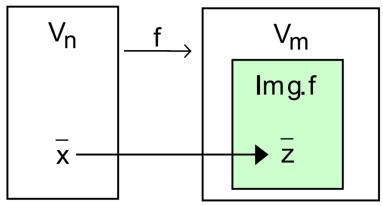
El núcleo de una aplicación lineal es un subespacio del espacio inicial.

La expresión $A \bullet \bar{x} = \bar{0}$ es la de un SLH, ¡que son unas ecuaciones cartesianas del núcleo!. Como siempre, el número de ecuaciones cartesianas independientes coincide con el rango de "A", siendo: $\dim.(\ker.f) = \dim.(V_n) - rg(A)$.

Si $rg(A) = \dim.(V_n) \Rightarrow \dim.(\ker.f) = 0 \Rightarrow A \bullet \bar{x} = \bar{0}$ sólo tiene la solución trivial $\bar{x} = \bar{0} \in V_n \Rightarrow$ el único vector del espacio inicial que tiene por imagen al vector cero del espacio final es el vector cero del espacio inicial.

Imagen de una aplicación lineal

La imagen de "f" se denota "Img.f", y es el conjunto que forman los vectores del espacio final que son imagen de algún vector del espacio inicial:



$$Img.f = \{\bar{z} \in V_m \ /\ \exists\ \bar{x} \in V_n \text{ para el que } f(\bar{x}) = \bar{z}\}$$

El conjunto $Img.f$ es subespacio del espacio final. Siempre es $\dim.(Img.f) = rg(A)$; y si $rg(A) = p$, los "p" vectores del espacio final correspondientes a cualesquiera "p" columnas de "A" con las que pueda formarse un menor no nulo de orden "p", forman una base de Img.f. Siempre es $\dim.(\ker.f) + \dim.(Img.f) = \dim.(V_n)$.

Propiedades de las aplicaciones lineales

Sea $f: V_n \mapsto V_m$ es una aplicación lineal.

1) Si $\bar{0}$ es el vector cero de V_n, entonces $f(\bar{0})$ es el vector cero de V_m.
2) Si $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_k \in V_n$ son LD $\Rightarrow f(\bar{h}_1), \ldots, f(\bar{h}_k)$ también son LD.
3) Si $f(\bar{h}_1), \ldots, f(\bar{h}_k) \in V_m$ son LI $\Rightarrow \bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_k \in V_n$ también son LI.

Clasificación de las aplicaciones lineales

Sea $f: V_n \mapsto V_m$ es una aplicación lineal y "A" su matriz asociada a "f" respecto de unas ciertas bases. Se dice que "f" es monomorfismo si es inyectiva, lo que sucede sólo si $\ker.f = \{\bar{0} \in V_n\}$; o sea, $rg(A) =$ dimensión del espacio "inicial". Se dice que "f" es epimorfismo si es sobreyectiva; lo que sucede sólo si $Img.f = V_m$; o lo que es igual: $rg(A) = m$. Se dice que "f" es isomorfismo si es inyectiva y sobreyectiva (o sea, es biyectiva), lo que sucede sólo si $rg(A)=n=m$. Si $\dim.(V_n)\neq\dim.(V_m)$ entonces "f" no puede ser isomorfismo, pues no puede ser $rg(A)=n=m$. Se llama endomorfismo a toda aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo. Si un endomorfismo es biyectivo, se llama automorfismo.

Las aplicaciones lineales y los cambios de base

Sea $f: V_n \mapsto V_m$ es una aplicación lineal y "A" su matriz asociada a "f" respecto de unas ciertas bases. Si cambiamos las bases de referencia en los espacios inicial y final, la matriz asociada a "f" respecto de las nuevas bases es $M^{-1}\bullet A\bullet N$, siendo "N" la matriz asociada al cambio de base realizado en el espacio inicial y "M" la matriz asociada al cambio de base realizado en el espacio final.

Suma de aplicaciones lineales

Si $f_1, f_2 \in F=\{f: V_n \mapsto V_m / \text{"f" es aplicación lineal}\}$, se dice que $h: V_n \mapsto V_m$ es suma de f_1 y f_2 si $h(\bar{x})=f_1(\bar{x})+f_2(\bar{x})$. La suma de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal. Si A_1 es la matriz asociada a f_1 y A_2 es la asociada a f_2, la matriz asociada a $h=f_1+f_2$ es A_1+A_2.

Producto de una aplicación lineal por un escalar

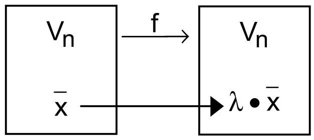
Si $f\in F$ y $\theta\in\Re$, se dice que $g: V_n \mapsto V_m$ es el producto de la aplicación lineal "f" por el escalar "θ" (se escribe $g=\theta\bullet f$) si $g(\bar{x})=\theta\bullet f(\bar{x})$. La aplicación "g" también es lineal, y si "A" es la matriz asociada a "f", la matriz asociada a "g" es $\theta\bullet A$.

Composición de aplicaciones lineales

Si $f: V_n \mapsto V_m$ y $g: V_m \mapsto V_k$ son aplicaciones lineales, se dice que la aplicación $h: V_n \mapsto V_k$ es la compuesta de "f" y "g" (se denota $h=g\bullet f$) si $h(\bar{x})=g(f(\bar{x}))$; o sea, la imagen de $\bar{x}\in V_n$ según "h" es la imagen según "g" de la imagen de $\bar{x}$ según "f". La aplicación $h=g\bullet f$ también es lineal, y si "A" es la matriz asociada a "f" y "C" es la matriz asociada a "g", la matriz asociada a $h=g\bullet f$ es $C\bullet A$.

Autovalores y autovectoes de un endomorfismo

Si $f: V_n \mapsto V_n$ es un endomorfismo y "A" es su matriz asociada respecto de una base "B" de V_n, se dice que el número λ es un autovalor (valor propio o valor característico) de "f" si en el espacio inicial hay vectores $\bar{x}\neq\bar{0}$ tales que $f(\bar{x})=\lambda\bullet\bar{x}$; y decimos que $\bar{x}\neq\bar{0}$ porque como $\forall\,\lambda$ es $f(\bar{0})=\bar{0}=\lambda\bullet\bar{0}$, el vector $\bar{0}$ cumple la condición $f(\bar{0})=\lambda\bullet\bar{0}$ para todo valor de λ.



- Siendo "I" la matriz unidad de orden "n", los autovalores de "f" son las soluciones de la ecuación $|A-\lambda\bullet I|=0$, llamada ecuación característica de "f".
- De $P(\lambda)=|A-\lambda\bullet I|$ se dice que es el polinomio característico de "f".
- Se llama multiplicidad algebraica de un autovalor al número de veces que es solución de $|A-\lambda\bullet I|=0$.
- La suma de los autovalores de "A" coincide con la traza de "A", y su producto coincide con el determinante de "A".
- Si λ es un autovalor del endomorfismo "f" y $\bar{x}\neq\bar{0}$ es tal que $f(\bar{x})=\lambda\bullet\bar{x}$ (o sea, $(A-\lambda\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}$), se dice que $\bar{x}$ es un autovector (vector propio o vector característico) del autovalor λ. Los autovectores del autovalor λ son las soluciones del sistema lineal homogéneo $(A-\lambda\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}$, por lo que forman un subespacio de V_n.
- Se llama multiplicidad geométrica de un autovalor a la dimensión de su subespacio de autovectores.
- Si la multiplicidad algebraica de un autovalor es "k", su multiplicidad geométrica puede tomar los valores $1, 2, \ldots, k-1, k$.
- Si "A" es simétrica, la multiplicidad algebraica de cada autovalor siempre coincide con su multiplicidad geométrica.

Diagonalización de endomorfismos

Sea $f: V_n \mapsto V_n$ un endomorfismo y "A" la matriz asociada a "f" respecto de la base de referencia "B" elegida para identificar a los vectores de V_n. Siendo $B*$ otra base de V_n y "C" la matriz asociada al cambio de base $B\to B*$, sabemos que si tanto en el espacio inicial como en el final tomamos como base de referencia la $B*$ en lugar de "B", la matriz asociada a "f" respecto de la base $B*$ es $C^{-1}\bullet A\bullet C$ .... y el problema de diagonalizar "f" es el problema de encontrar, si existe, una base $B*$ tal que la matriz $C^{-1}\bullet A\bullet C$ asociada a "f" respecto de $B*$ sea diagonal. Si existe (no existe) dicha base $B*$, se dice que "f" es (no es) diagonalizable.

- Un endomorfismo $f: V_n \mapsto V_n$ es diagonalizable sólo si la multiplicidad algebraica de cada autovalor de "f" coincide con su multiplicidad geométrica. En tal caso, diagonaliza a "f" cualquier base $B*$ de V_n formada por autovectores de "f" (para "construir" $B*$ cada autovalor "aporta" una base de su subespacio de autovectores), y la matriz diagonal asociada a respecto de la base $B*$ es la que tiene en la diagonal principal los autovalores de "f".
- Si "A" es simétrica, la multiplicidad algebraica de cada autovalor siempre coincide con su multiplicidad geométrica; por lo que "f" siempre es diagonalizable.
- Si todos los autovalores de "f" son distintos (o sea, todos tienen multiplicidad algebraica igual a 1), entonces "f" es diagonalizable, pues todos los subespacios de autovectores tienen dimensión 1.

Potencias de una matriz cuadrada

Si "A" es una matriz cuadrada "A" no diagonalizable y "k" un número natural, para calcular la matriz A^k hay que multiplicar la matriz "A" por sí misma "k" veces. Pero si "A" es diagonalizable, será posible encontrar una matriz cuadrada "C" del mismo orden que "A" y tal que $C^{-1}\bullet A\bullet C=D$, donde "D" es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A"; así, es $A=C\bullet D\bullet C^{-1}$, por tanto:

$$A^2 = A \bullet A = (C \bullet D \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^2 \bullet C^{-1}$$
$$A^3 = A^2 \bullet A = (C \bullet D^2 \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^3 \bullet C^{-1}$$
$$\vdots$$
$$A^k = A^{k-1} \bullet A = (C \bullet D^{k-1} \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^k \bullet C^{-1}$$

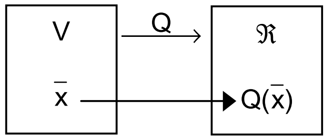
Como la matriz "D" es diagonal, para calcular D^k basta elevar a "k" los elementos de la diagonal principal de "D".

Teoremas diversos

1) El polinomio característico de un endomorfismo $f: V_n \mapsto V_n$ no depende de la base de la base de referencia elegida en el espacio V_n; es decir, dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y los mismos autovalores.
2) Una matriz (cuadrada) y su traspuesta tienen los mismos autovalores.
3) Los autovalores de una matriz simétrica siempre son números reales.
4) Autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales.
5) Autovectores asociados a autovalores distintos son LI
6) Si λ es autovalor de la matriz "A" y $k \in \Re \Rightarrow \lambda.k$ es autovalor de $k \bullet A$
7) Si λ es autovalor de la matriz "A" y $k \in \Re \Rightarrow \lambda + k$ es autovalor de $A + k \bullet I$
8) Si λ es autovalor de la matriz "A" y "k" es un número natural $\Rightarrow \lambda^k$ es autovalor de A^k
9) Si λ es autovalor de la matriz regular "A" $\Rightarrow \lambda^{-1}$ es autovalor de A^{-1}

Forma cuadrática

Si "V" es un espacio vectorial de dimensión "n" y "B" es la base de referencia en él, se llama forma cuadrática a toda aplicación $Q: V \mapsto \Re$ tal que si $\bar{x} \in V$ tiene coordenadas $(x_1; \dots; x_n)$ respecto de "B", el número real $Q(\bar{x})$ que "Q" asocia a $\bar{x}$ es:



$$Q(\bar{x}) = (x_1; \dots; x_n) \bullet A \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

donde "A" es una matriz simétrica de orden "n", y de ella se dice que es la matriz asociada a "Q" respecto de la base "B". De (I) se dice que es la expresión de "Q" respecto de la base "B"; y se abrevia (I) escribiendo $Q(\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{x}$.

Los cambios de base y las formas cuadráticas

Si $Q: V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática que respecto de la base "B" tiene asociada la matriz "A" y en "V" tomamos como nueva base de referencia la $B*$, si "C" es la matriz asociada al cambio de base $B \to B*$, la matriz asociada a "Q" respecto de la base $B*$ es $C^t \bullet A \bullet C$; o sea, la matriz asociada a "Q" respecto de la nueva base es la que teníamos, postmultiplicada por la matriz "C" asociada al cambio de base realizado y premultiplicada por la traspuesta de "C".

Diagonalización de una forma cuadrática

Sea $Q: V \mapsto \Re$ una forma cuadrática que respecto de la base "B" tiene asociada la matriz "A" (¡simétrica!). El problema de diagonalizar "Q" es el problema de encontrar una base $B*$ del espacio vectorial "V" tal que la matriz asociada a "Q" respecto de la base $B*$ sea diagonal. Planteado en términos puramente matriciales, el problema de diagonalizar una forma cuadrática (cuya matriz asociada es "A") es el problema de encontrar una matriz "C" tal que la matriz $C^t \bullet A \bullet C$ sea diagonal. Naturalmente, "C" es la matriz asociada al cambio de base $B \to B*$. Al contrario que los endomorfismos, las formas cuadráticas siempre pueden diagonalizarse.

Diagonalización por cambio de base ortonormal

Si $B*$ es una base ortonormal de V_n formada por autovectores de la matriz "A", la matriz asociada a la forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ respecto de la base $B*$ es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A". Para "construir" $B*$ cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su correspondiente subespacio de autovectores.

Clasificación de las formas cuadráticas

Si $Q: V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática, el vector cero de "V" siempre tiene por imagen según "Q" al número cero, pues si "A" es la matriz asociada a "Q" respecto de cierta base de "V", es $Q(\bar{0}) = \bar{0}^t \bullet A \bullet \bar{0} = 0$. La clasificación "Q" se establece en función del signo que tienen las imágenes según "Q" de los vectores de "V"; así, se dice que:

- "Q" es definida positiva si todos los vectores, salvo el vector cero, tienen imagen positiva.
- "Q" es definida negativa si todos los vectores, salvo el vector cero, tienen imagen negativa.
- "Q" es semidefinida positiva si todos los vectores tienen imagen no negativa (≥ 0).
- "Q" es semidefinida negativa si todos los vectores tienen imagen no positiva (≤ 0).
- "Q" es indefinida si hay vectores que tienen imagen positiva y también hay vectores que tienen imagen negativa.

Puedes clasificar una forma cuadrática "Q" mediante los autovalores de su matriz asociada "A", o mediante la sucesión de menores principales de "A".

CLASIFICACIÓN MEDIANTE LOS AUTOVALORES

- si los autovalores de "A" son $> 0 \Leftrightarrow$ "Q" es definida positiva
- si los autovalores de "A" son $< 0 \Leftrightarrow$ "Q" es definida negativa
- si los autovalores de "A" son $\geq 0 \Leftrightarrow$ "Q" es semidefinida positiva
- si los autovalores de "A" son $\leq 0 \Leftrightarrow$ "Q" es semidefinida negativa
- si los autovalores de "A" son de distinto signo $\Leftrightarrow$ "Q" es indefinida

CLASIFICACIÓN MEDIANTE MENORES PRINCIPALES

Sea $A = \{a_{ij}\}$ la matriz (simétrica) asociada a "Q" respecto de una base, siendo:

$$H_1 = a_{11} \; ; \; H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \; ; \; H_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \; ; \; .... \; ; \; H_n = |A|$$

1) "Q" es definida positiva si y sólo si $H_1 > 0$; $H_2 > 0$; $H_3 > 0$; $H_4 > 0$; ....
2) "Q" es definida negativa si y sólo si $H_1 < 0$; $H_2 > 0$; $H_3 < 0$; $H_4 > 0$; ....
3) Si sucede como en 1) pero el último menor ($H_n = |A|$) es cero, entonces "Q" es semidefinida positiva.
4) Si sucede como en 2) pero el último menor ($H_n = |A|$) es cero, entonces "Q" es semidefinida negativa.
5) Si $H_n \neq 0$ y no se cumple ni 1) ni 2), entonces "Q" es indefinida.
6) Si $H_n = 0$ y $H_{n-1} \neq 0$ y no se cumple ni 3) ni 4), entonces "Q" es indefinida.

Hay formas cuadráticas que no se pueden clasificar mediante la sucesión de menores principales.
Si en la diagonal principal de "A" hay elementos de distinto signo, "Q" es indefinida.

Forma cuadrática restringida a un subespacio

Si $Q\colon V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática definida sobre el espacio vectorial "V" y "S" es un subespacio de "V", al plantearnos el estudio del signo de "Q" restringida al subespacio "S", nos planteamos el estudio del signo que tienen las imágenes según "Q" de los vectores de "S". Así, se dice que:

- "Q" es definida positiva (negativa) en "S" si todo vector de "S", salvo el vector cero, tiene imagen positiva (negativa).
- "Q" es semidefinida positiva (negativa) en "S" si todo vector de "S" tiene imagen no negativa (no positiva)
- "Q" es "indefinida" en "S" si en "S" hay vectores con imagen positiva y también hay vectores con imagen negativa.

Obvio:

✓ Si "Q" es definida positiva en "V", es definida positiva en "S".
✓ Si "Q" es definida negativa en "V", es definida negativa en "S".
✓ Si "Q" es semidefinida positiva en "V", es semidefinida positiva o definida positiva en "S".
✓ Si "Q" es semidefinida negativa en "V", es semidefinida negativa o definida negativa en "S".
✓ Si "Q" es indefinida en "V", al restringirla al subespacio "S" puede pasar cualquier cosa: puede ser definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa o indefinida.

Lecciones básicas de Zoología

Diversos tipos de astados