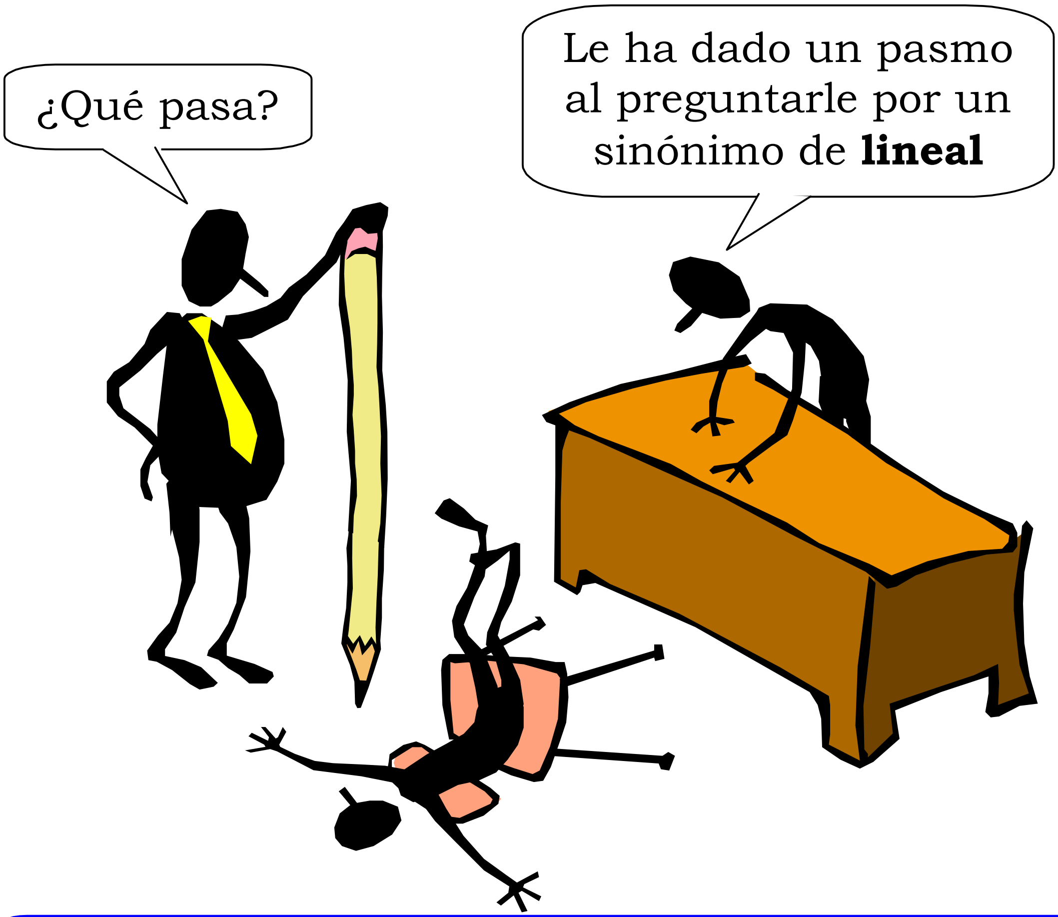
Álgebra de lo Lineal
Introducción

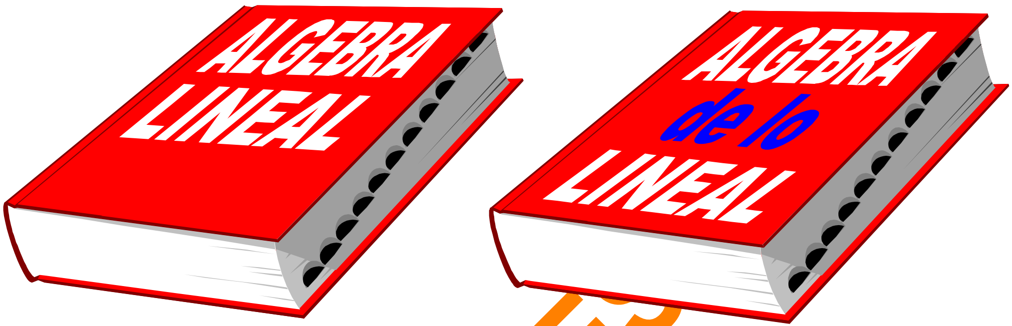
- El artículo neutro **lo** 2
- Ojo con la palabra **lineal** 2
- Las **cajas** llenas de números 3
- ¿Por qué estudiamos Álgebra de lo Lineal? 6
- Ordenación de los Temas 9



El artículo neutro lo

El artículo neutro **lo** se ha inventado porque es necesario según qué cosa queramos decir. ***Por ejemplo,*** no es lo mismo decir caótico que lo caótico .... y es claro que la supresión inadecuada del neuro lo puede generar notable confusión, porque, por ejemplo, no es lo mismo decir **estudio caótico** que decir **estudio de lo caótico.**

Así las cosas, para que lo sustancial se asimile adecuadamente desde el principio, sería bueno que los profesores de Matemáticas dejáramos de hablar de **Álgebra Lineal** y habláramos de **Álgebra de lo Lineal,** pues de inmediato los alumnos nos preguntarían por **lo lineal** y se sorprenderían de que lo lineal sea tan importante como para dedicarle decenas de horas de estudio.



Ojo con la palabra lineal

En el lenguaje coloquial la palabra lineal se usa a veces como sinónimo de constante: cuando se dice que los salarios de una empresa han sufrido una subida lineal de "k" euros, quiere decirse que todos aumentan su salario la misma cantidad "k"; o sea, para todos sucede que:

$$\text{Salario Nuevo} = k + (\text{Salario Viejo})$$

No obstante, si buscas la palabra lineal en el diccionario de la Real Academia, verás que dice:

Lineal: (adjetivo) perteneciente a la **línea**

El diccionario dedica a la palabra línea casi una página, pero entre el montón de cosas que se dicen sobre línea no hay nada que permita usar la palabra lineal como sinónimo de constante.

ESCÚLPELO EN EL CEREBRO!

En Matemáticas, lineal es sinónimo de proporcional

Por ejemplo, una subida **lineal** del 25 % en el salario significa que si ganas 120, te suben 30 (pues el 25 % de 120 es 30) y pasas a ganar 150; y si ganas 300, te suben 75 (pues el 25 % de 300 es 75) y pasas a ganar 375; es decir, para todos sucede que:

$$\text{Salario Nuevo} = 1'25 \times (\text{Salario Viejo})$$

O sea, la **proporción** entre el Salario Viejo de cada trabajador y su Salario Nuevo es 1'25:

$$\frac{\text{Salario Viejo}}{\text{Salario Nuevo}} = 1'25$$

O al revés: la **proporción** entre el Salario Nuevo de cada trabajador y su Salario Viejo es 0'8:

$$\frac{\text{Salario Nuevo}}{\text{Salario Viejo}} = \frac{1}{1'25} = 0'8$$

Aunque sea increíble, entre las cosas que dice el diccionario sobre **línea,** tampoco hay nada que permita usar **lineal** como sinónimo de **proporcional.** Sin duda eso se debe a que la aportación del castellano a la construcción del "edificio" de las Matemáticas ha sido practicamente nula a los largo de los últimos diez siglos .... y para que tan penosa situación no dure otros diez siglos, sería bueno que la próxima edición del diccionario pusiera su granito de arena, diciendo que, en Matemáticas, las palabras lineal y proporcional son sinónimas; por tanto, hablar de **lo lineal** es igual que hablar de **lo proporcional.**

Las cajas llenas de números

Atent@s: imagina que eres tú quien a final de mes se encarga de pagar a la gente de una empresa que tiene "n" trabajadores cuyos *salarios base* respectivos son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siendo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ los respectivos *complementos salariales.*

Para gestionar la **información** que contienen los "n" números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y los "n" números $y_1, y_2, \ldots, y_n$, **seguro que se te ocurriría** ponerlos **ordenadamente** en sendas **cajas** "A" y "B":

$$A = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n] \equiv \text{caja de salarios base}$$

$$B = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n] \equiv \text{caja de complementos salariales}$$

Aunque no tuvieras ni idea de Álgebra de lo Lineal, **seguro que te inventarías** la **operación** consistente en **sumar cajas,** pues eso te permitiría obtener una tercera caja "P" que te diría lo que debes pagar a cada trabajador a final de mes:

$$P = A + B = \underbrace{[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]}_{A} + \underbrace{[y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n]}_{B} =$$

$$= [x_1+y_1 \quad x_2+y_2 \quad \ldots \quad x_n+y_n] \equiv \text{caja de salarios totales}$$

En este contexto, si en la negociación del convenio colectivo se pactan respectivas subidas **lineales** del 25 % y el 50 % en los *salarios base* y en los *complementos salariales,* deberás cambiar las **cajas** que almacenan la **información** relativa a esos asuntos: la nueva **caja** de *salarios base* será

$$A_1 = [1'25.x_1 \quad 1'25.x_2 \quad \ldots \quad 1'25.x_n]$$

y la nueva **caja** de *complementos salariales* será

$$B_1 = [1'5.y_1 \quad 1'5.y_2 \quad \ldots \quad 1'5.y_n]$$

Además, incluso sin saber nada de Álgebra de lo Lineal, **seguro que te inventarías** la **operación** consistente en **multiplicar una caja por un número,** pues dirías que la **caja** A_1 se obtiene multiplicando la **caja** "A" por el número 1'25, y la **caja** B_2 se obtiene multiplicando la **caja** "B" por el número 1'5 ..... y **sin ningún pudor escribirías:**

$$A_1 = 1'25 \bullet A \;\; ; \;\; B_1 = 1'5 \bullet B$$

Incluso dirías que la **caja** A_1 es **proporcional** a la **caja** "A", pues cada elemento de A_1 se obtiene multiplicando por 1'25 su correspondiente elemento de "A"; también dirías que "A" es **proporcional** a la A_1, pues cada elemento de "A" se obtiene multiplicando por 0'8 su correspondiente elemento de A_1 .... y lo mismo para las **cajas** "B" y B_1, pero con los números 1'5 y 1/1'5.

Así, llegado fin de mes, podrías obtener la nueva **caja** P_1 de salarios totales

$$P_1 = A_1 + B_1 =$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1'25.x_1 & 1'25.x_2 & ..... & 1'25.x_n \end{bmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1'5.y_1 & 1'5.y_2 & ..... & 1'5.y_n \end{bmatrix}}_{B_1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1'25.x_1 + 1'5.y_1 & 1'25.x_2 + 1'5.y_2 & ..... & 1'25.x_n + 1'5.y_n \end{bmatrix} =$$
$$= 1'25 \bullet A + 1'5 \bullet B$$

El Álgebra, para expresar de modo rápido y eficiente que la **información** contenida en la caja P_1 es suma de las respectivas **informaciones** obtenidas al multiplicar la caja "A" por un número (el 1'25) y la caja "B" por otro número (el 1'5), dirá que la caja P_1 es **combinación lineal** de las cajas "A" y "B".

Como escribir $P_1 = A_1 + B_1$ es lo mismo que escribir $P_1 = 1 \bullet A_1 + 1 \bullet B_1$, también diremos que la caja P_1 es combinación lineal de las cajas A_1 y A_2, pues la **información** contenida en P_1 es suma de las respectivas **informaciones** obtenidas al multiplicar la caja A_1 por un número (el 1) y la caja B_1 por otro número (el 1). Del mismo modo, para expresar que $P = A + B = 1 \bullet A + 1 \bullet B$, diremos que la caja "P" es **combinación lineal** de las cajas "A" y "B".

¿Por qué estudiamos Álgebra de lo Lineal?

Estudiamos **Álgebra de lo Lineal** porque la vida está llena de **fenómenos lineales** que tienen que ver con todas las ramas de la Ciencia y del quehacer humano ..... nadie puede sustraerse de **lo** lineal o proporcional.

Por ejemplo: si vas de compras a un hiper eres protagonista de un **fenómeno lineal,** pues siendo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ los precios unitarios (sin impuestos) de los "n" bienes (tomates, pan, etc.) que compras, y $K_1, K_2, \ldots, K_n$ las correspondientes cantidades compradas de cada uno de ellos, el valor "V" de tu compra es

$$V = \gamma_1.K_1 + \gamma_2.K_2 + \ldots + \gamma_n.K_n$$

que es suma de un número $\gamma_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\gamma_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\gamma_n.K_n$ proporcional a K_n.

Del mismo modo, si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ son los respectivos beneficios unitarios que obtiene el hiper por cada unidad que compras, el beneficio total "B" obtenido gracias a tu compra es

$$B = \delta_1.K_1 + \delta_2.K_2 + \ldots + \delta_n.K_n$$

que es suma de un número $\delta_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\delta_2.K_2$ proporcional a K_2.... y de un número $\delta_n.K_n$ proporcional a K_n.

La cantidad "C" que al hiper le cuesta tu compra es:

$$C = (\gamma_1 - \delta_1).K_1 + (\gamma_2 - \delta_2).K_2 + \ldots + (\gamma_n - \delta_n).K_n =$$
$$= \varepsilon_1.K_1 + \varepsilon_2.K_2 + \ldots + \varepsilon_n.K_n$$

$\boxed{\text{por comodidad, hacemos } \gamma_1 - \delta_1 = \varepsilon_1, \gamma_2 - \delta_2 = \varepsilon_2, \ldots, \gamma_n - \delta_n = \varepsilon_n}$

que es suma de un número $\varepsilon_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\varepsilon_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\varepsilon_n.K_n$ proporcional a K_n.

La Hacienda Pública no se queda atrás, pues si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ son los respectivos tipos de IVA (expresados en "tanto por uno") que soportan los productos que compras, la cantidad "H" que ingresa Hacienda gracias a tu compra:

$$H = \theta_1.\gamma_1.K_1 + \theta_2.\gamma_2.K_2 + \ldots + \theta_n.\gamma_n.K_n =$$
$$= \lambda_1.K_1 + \lambda_2.K_2 + \ldots + \lambda_n.K_n$$

$\boxed{\text{por comodidad, hacemos } \theta_1.\gamma_1 = \lambda_1, \theta_2.\gamma_2 = \lambda_2, \ldots, \theta_n.\gamma_n = \lambda_n}$

que es suma de un número $\lambda_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\lambda_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\lambda_n.K_n$ proporcional a K_n.

ESQUEMA DE UN "FENÓMENO LINEAL"

$(K_1, \dots, K_n)$ → **UN "ENTE"; POR EJEMPLO, UN HIPER** →

$V = \gamma_1 . K_1 + \dots + \gamma_n . K_n$

$B = \delta_1 . K_1 + \dots + \delta_n . K_n$

$C = \varepsilon_1 . K_1 + \dots + \varepsilon_n . K_n$

$H = \lambda_1 . K_1 + \dots + \lambda_n . K_n$

A una entrada $(K_1, \dots, K_n)$, el ente responde con una salida $(V; B; C; H)$ lineal

Como en el hiper no se chupan el dedo, meten en una **caja con diversas filas** toda la información relativa a cantidades compradas, precios unitarios, beneficios unitarios y tipos de IVA, y ello con el fin de gestionar más eficientemente el negocio.

	Artículo	Cantidad comprada	Precio unitario	Beneficio unitario	....	Tipo de IVA
1	Malocotones	K_1	γ_1	δ_1	....	θ_1
2	Servesita	K_2	γ_2	δ_2	....	θ_2
:	:::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::
N	Perejil	K_n	γ_n	δ_n	....	θ_n

Así, las cosas, **aunque no se tenga ni idea** de Álgebra de lo Lineal, **todo el mundo alcanza a entender que:**

- El valor "V" de la compra se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la segunda, y sumando después los productos realizados:

$$V = \gamma_1 . K_1 + \dots + \gamma_n . K_n$$

- El beneficio "B" que obtiene el hiper se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la tercera, y sumando después los productos realizados:

$$B = \delta_1 . K_1 + \dots + \delta_n . K_n$$

- El ingreso "H" de Hacienda se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por sus correspondientes de las columnas segunda y última, y sumando después los productos realizados:

$$H = \theta_1 . \gamma_1 . K_1 + \dots + \theta_n . \gamma_n . K_n$$

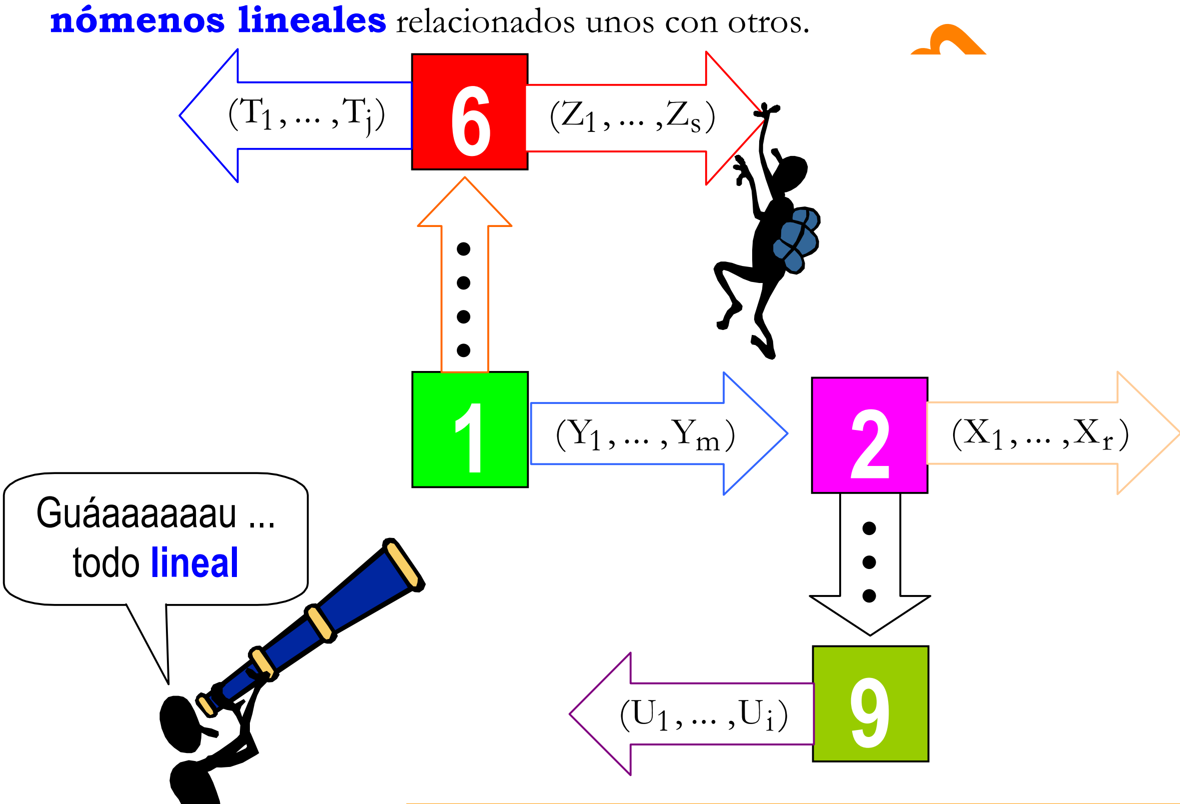
- Multiplicando cada elemento de la 1ª columna por su correspondiente de la columna obtenida al restar la 3ª columna de la 2ª, y después sumamos los productos realizados, obtenemos la cantidad "C" que al hiper le cuesta tu compra:

$$C = (\gamma_1 - \delta_1).K_1 + \ldots + (\gamma_n - \delta_n).K_n$$

Como vemos, a partir de una tabla con números ordenados en filas y columnas puede obtenerse **información** muy interesante para según qué cosas:

K_1	γ_1	δ_1	....	θ_1
K_2	γ_2	δ_2	....	θ_2
:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::
K_n	γ_n	δ_n	....	θ_n

Además, la realidad es tan compleja que hay en ella **cadenas o redes** de **fenómenos lineales** relacionados unos con otros.



Al-jabr w'al-muqabalah es el nombre del escrito árabe que dio origen a la palabra álgebra

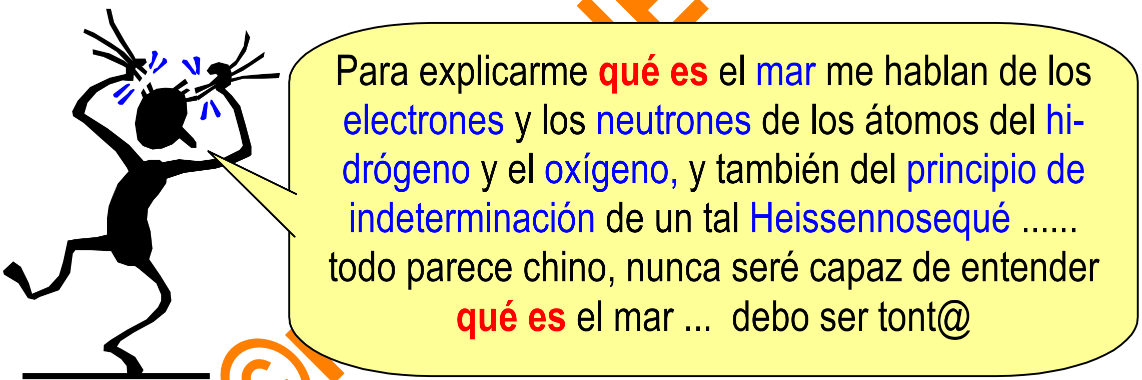
El Álgebra Lineal posibilita la creación de modelos matemáticos que ayudan a comprender y gestionar los fenómenos lineales ..... y el asunto es tan importante que en tu primer año de Carrera debes lidiar un curso de Álgebra Lineal, para ampliar los conocimientos adquiridos en el Bachiller. Naturalmente, cuanto más sepas de estas cosas al llegar a la Universidad, más cómodo y seguro será tu aterrizaje en ella.

Ordenación de los temas

El orden elegido por casi todos los libros de Álgebra Lineal es el siguiente:

Tema 1: Espacios Vectoriales
Tema 2: Subespacios Vectoriales
Tema 3: Cálculo Matricial
Tema 4: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Tema 5: Aplicaciones Lineales
Tema 6: Diagonalización de endomorfismos
Tema 7: Formas bilineales y cuadráticas

Al seguir este orden **el Álgebra Lineal se cimenta en el concepto de espacio vectorial,** concepto al que se llega tras una singladura en que intervienen un conjunto "Pepe" donde se han definido dos leyes de composición interna y un conjunto "Juan" en el que ha definido una ley de composición interna y una ley de composición externa, y eso de modo que esas leyes satisfagan una batería de 17 propiedades ..... **y presentado así, todo resulta muy espeso y abstracto para muchos principiantes, que acaban viendo montañas donde sólo hay granos de arena.**



Estudiaremos Álgebra Lineal en el siguiente orden:

Tema 1: Cálculo Matricial
Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Tema 3: Espacios Vectoriales
Tema 4: Subespacios Vectoriales
Tema 5: Aplicaciones Lineales
Tema 6: Diagonalización de endomorfismos
Tema 7: Formas bilineales y cuadráticas

Así cimentaremos el Álgebra de lo Lineal en los conceptos de fila y de columna que todos asimilamos en la infancia temprana. Apoyándonos en estos conceptos elementales es muy fácil entender el concepto de **matriz** *(caja llena de números ordenados en filas y columnas),* y también es muy fácil **APRENDER A TRABAJAR CON MATRICES** *(suma de matrices, multiplicación de una matriz por un número, multiplicación de matrices, cálculo del determinante de una matriz cuadrada, cálculo del rango de una matriz).*

Cuando sepas trabajar con matrices sólo necesitarás una tarde para aprender a resolver sistemas de ecuaciones lineales, asunto que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices .... y el que es artista con los sistemas de ecuaciones lineales **se parte de risa** cuando ha de lidiar con los **espacios vectoriales** y el resto del Álgebra Lineal, pues la lidia se reduce a poco más que resolver sistemas ecuaciones lineales.

Independientemente de cualquier otra consideración, el Álgebra de lo Lineal es una estupendísima gimnasia mental para dotarte de un cerebro razonablemente analítico, riguroso y cartesiano ..... que es lo que necesitas para tener éxito en la Carrera

Otros ofrecen peces ..... Keynes enseña a pescar