Introducción a la Estadística

Tema 5

Números índice

5.1 NÚMEROS ÍNDICE

Un **número índice** es una medida estadística que permite caracterizar la evolución de una magnitud (simple, como el precio del pan, o compuesta, como el PIB) en dos instantes o periodos de tiempo distintos "0" y "t". Se suelen representar mediante una letra afectada por un subíndice (que indica el instante o periodo que se toma como base o referencia) y un superíndice (que indica el otro instante o periodo de tiempo al que se refiere el número índice).

5.2 ÍNDICES SIMPLES

Se refieren a una magnitud simple: si X_t es el valor de dicha magnitud en el periodo "t" y X_0 es su valor en el periodo base o de referencia, el **índice simple del periodo "t" respecto al periodo base** se denota I_0^t, siendo:

$$I_0^t = \frac{X_t}{X_0}$$

Así, I_0^t es un número adimensional que indica la variación (en tanto por uno) que ha sufrido la variable entre uno y otro periodo de tiempo .... y se suele expresar en porcentaje, multiplicándolo por 100.

La **tasa de variación** TVP_0^t de la magnitud en cuestión en el periodo $0-t$ puede expresarse en función de I_0^t:

$$TVP_0^t = \frac{X_t - X_0}{X_0} = \frac{X_t}{X_0} - 1 = I_0^t = -1$$

Si el periodo es anual, se habla de la **tasa de variación anual** TVA_0^t.

Índices simples más famosos

- **Indice de precio relativo:** es la razón $I_{P_0}^{\ t} = P_t / P_0$ entre el precio P_t de un bien en el periodo "t" y su precio P_0 en el periodo base.
- **Indice de cantidad relativa:** es la razón $I_{Q_0}^{\ t} = Q_t / Q_0$ entre la cantidad Q_t producida (vendida) de un bien en el periodo "t" y la cantidad Q_0 producida (vendida) en el periodo base.
- **Indice de valor relativo:** es la razón $I_{V_0}^{\ t}$ entre el valor $P_t.Q_t$ de un bien en el periodo "t" y su valor $P_0.Q_0$ en el periodo base:

$$I_{V_0}^{\ t} = \frac{P_t.Q_t}{P_0.Q_0} = \left(\frac{P_t}{P_0}\right).\left(\frac{Q_t}{Q_0}\right) = I_{P_0}^{\ t}.I_{Q_0}^{\ t}$$

Ejemplo

Año	Precio	Cantidad
2004	30	50
2005	32	60

$$I_{P,04}^{05} = \frac{32}{30}.100 = 106'6 \ ; \ I_{Q,04}^{05} = \frac{60}{50}.100 = 120$$

$$I_{V,04}^{05} = \frac{32.60}{30.50}.100 = P_{04}^{05}.Q_{04}^{05}$$

5.3 ÍNDICES COMPLEJOS SIN PONDERAR

Se refieren a una **magnitud compleja** "X" formada por "n" magnitudes simples $X_1, ..., X_n$:

Periodo base	Periodo "t"	Índice simple
x_{10} : x_{n0}	x_{1t} : x_{nt}	$I^t_{1,0} = x_{1t}/x_{10}$: $I^t_{n,0} = x_{nt}/x_{n0}$

Para **resumir** en un único índice la información que contienen los índices simples $I_1, ..., I_n$ cabe plantear diversos criterios para **promediar** $I_1, ..., I_n$.

CRITERIO DE LA MEDIA SIMPLE

- **Índice de media aritmética:**

$$I^t_0 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} I^t_{i,0} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{it}}{x_{i0}}$$

- **Índice de media geométrica:**

$$I^t_0 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} I^t_{i,0}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{x_{it}}{x_{i0}}}$$

- **Índice de media armónica:**

$$I^t_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{I^t_{i,0}}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i0}}{x_{it}}}$$

CRITERIO DE LA MEDIA AGREGATIVA SIMPLE

Se suman las magnitudes simples en cada periodo y se calculan índices simples con las sumas obtenidas:

$$I^t_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{it}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i0}}$$

Todos asignan igual importancia a cada una de las magnitudes simples $X_1, ..., ,X_n$; o sea, **no son ponderados,** y las unidades de medida de las magnitudes simples no son homogéneas.

Ejemplo

	2004	2005	2006
Pan	30	32	35
Vino	80	84	89
Tocino	200	220	235
Aceite	900	1100	1250
	1210	1436	1609

$\Rightarrow$

	$I_{i,04}^{04}$	$I_{i,04}^{05}$	$I_{i,04}^{06}$
Pan	100	106'6	116'6
Vino	100	105'0	111'2
Tocino	100	110'0	117'5
Aceite	100	122'2	138'8
		443'8	484'1

Tomando 2004 como año base

- Índice $I_0^t = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} I_{i,0}^t$ de **media aritmética:**

$$I_{04}^{05} = \frac{106'6 + 105 + 110 + 122'2}{4} = \frac{443'8}{4} = 110'97$$

$$I_{04}^{06} = \frac{116'6 + 111'2 + 117'5 + 138'8}{4} = \frac{484'1}{4} = 121'07$$

- Índice $I_0^t = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} I_{i,0}^t}$ de **media geométrica:**

$$I_{04}^{05} = \sqrt[4]{106'6.105.110.122'2} = 110'75$$

$$I_{04}^{06} = \sqrt[4]{116'6.111'25.117'5.138'8} = 120'6$$

- Índice $I_0^t = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/I_{i,0}^t}$ de **media armónica:**

$$I_{04}^{05} = \frac{4}{\frac{1}{106'6} + \frac{1}{105} + \frac{1}{110} + \frac{1}{122'2}} = 110'56$$

$$I_{04}^{06} = \frac{4}{\frac{1}{116'6} + \frac{1}{111'2} + \frac{1}{117'5} + \frac{1}{138'8}} = 120'17$$

- Índice $I_0^t = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{it}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i0}}$ de **media agregativa:**

$$I_{04}^{05} = \frac{32 + 84 + 220 + 1100}{30 + 80 + 200 + 900} = \frac{1436}{1210} = 118'68$$

$$I_{04}^{06} = \frac{32 + 84 + 220 + 1100}{30 + 80 + 200 + 900} = \frac{1609}{1210} = 132'98$$

5.4 ÍNDICES COMPLEJOS PONDERADOS

Los índices complejos ponderados tienen en cuenta la diferente importancia o **peso relativo** que puede tener cada una de las magnitudes simples $X_1, ..., X_n$ dentro del conjunto de todas ellas.

Periodo base	Periodo "t"	Ïndice simple	Ponderación
x_{10}	x_{1t}	$I^t_{1,0} = x_{1t}/x_{10}$	w_1
:	:	:	:
x_{n0}	x_{nt}	$I^t_{n,0} = x_{nt}/x_{n0}$	w_n

Para **resumir** en un único índice la información que contienen los índices simples $I^t_{1,0}, ..., I^t_{n,0}$ cabe plantear diversos criterios para **promediar** $I^t_{1,0}, ..., I^t_{n,0}$.

CRITERIO DE LA MEDIA PONDERADA

- **Índice de media aritmética ponderado**

$$I^t_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} I^t_{i,0} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{I^t_{1,0} \cdot w_1 + ... + I^t_{n,0} \cdot w_n}{w_1 + ... + w_n}$$

- **Índice de media geométrica ponderado**

$$I^t_0 = \sqrt[\sum w_i]{\prod_{i=1}^{n} {I^t_{i,0}}^{w_i}} = \sqrt[\sum w_i]{{I^t_{1,0}}^{w_1} \ ...... \ {I^t_{n,0}}^{w_n}}$$

- **Índice de media armónica ponderado**

$$I^t_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{I^t_{i,0}} \cdot w_i} = \frac{w_1 + ... + w_n}{\frac{1}{I^t_{1,0}} \cdot w_1 + ... + \frac{1}{I^t_{n,0}} \cdot w_n}$$

CRITERIO DE LA MEDIA AGREGATIVA PONDERADA

En cada periodo se multiplica cada magnitud por su correspondiente ponderación, sumando después los productos realizados, y se calculan índices simples con las sumas obtenidas:

$$I^t_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{it} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} x_{i0} \cdot w_i}$$

Ejemplo

	2004	2005	Ponderación	$I_{i,04}^{05}$
Pan	30	32	2	106'6
Vino	80	84	3	105'0
Tocino	200	220	5	110'0
Aceite	900	1100	4	122'2

- Índice de **media aritmética ponderado:**

$$I_{04}^{05} = \frac{106'6.2 + 105.3 + 110.5 + 122'2.4}{2+3+5+4}$$

- Índice de **media geométrica ponderado:**

$$I_{04}^{05} = \sqrt[14]{106'6^2 .105^3 .110^5 .122'2^4}$$

- Índice de **media armónica ponderado:**

$$I_{04}^{05} = \frac{2+3+5+4}{\frac{1}{106'6}.2 + \frac{1}{105}.3 + \frac{1}{110}.5 + \frac{1}{122'2}.4}$$

- Índice de **media agregativa ponderado:**

$$I_{04}^{05} = \frac{32.2 + 84.3 + 220.5 + 1100.4}{30.2 + 80.3 + 200.5 + 900.4}$$

5.5 ÍNDICES DE PRECIOS Y DE CANTIDADES

	Precio en periodo base	Precio en periodo "t"	Cantidad en periodo base	Cantidad en periodo "t"
Artículo "1"	P_{10}	P_{1t}	Q_{10}	Q_{1t}
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
Artículo "n"	P_{n0}	P_{nt}	Q_{n0}	Q_{nt}

- **Sauerbeck**

Es la **media aritmética no ponderada** de los índices simples:

$$S_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_{it}}{P_{i0}}}{n} \; ; \; S_Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{it}}{Q_{i0}}}{n}$$

- **Bradstreet-Dutot**

Es la **media agregativa no ponderada** de los precios o de las cantidades:

$$BD_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}} \; ; \; BD_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{i0}}$$

- **Laspeyres**

En el de precios, se **ponderan** éstos con las cantidades del año base ... y en el de cantidades, se ponderan éstas con los precios del año base.

$$L_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{i0}} \equiv \frac{\text{Valor del consumo del año base a precios del año "t"}}{\text{Valor del consumo del año base a precios del año base}}$$

$$L_Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{i0}} \equiv \frac{\text{Valor del consumo del año "t" a precios del año base}}{\text{Valor del consumo del año base a precios del año base}}$$

Así, L_P es la **media agregativa ponderada** de precios, siendo Q_{i0} la ponderación de los precios P_{i0} y P_{it} .... y L_Q es la **media agregativa ponderada** de las cantidades, siendo P_{i0} la ponderación de las cantidades Q_{i0} y Q_{it}.

Es el más empleado, porque las ponderaciones del año base son las que se emplean para todos los periodos. Pierde representatividad a medida que nos alejamos del periodo base.

Laspeyres de otro modo

- **Para el de precios:**

  Si el i-ésimo índice simple de precios $I^t_{i,0} = P_{it}/P_{i0}$ lo ponderamos con $w_i = P_{i0}.Q_{i0}$, la **media aritmética ponderada** de $I^t_{1,0}, \ldots, I^t_{n,0}$ es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} I^t_{i,0}.w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_{it}}{P_{i0}}.P_{i0}.Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{i0}} = L_P$$

- **Para el de cantidades:**

  Si el i-ésimo índice simple de cantidades $I^t_{i,0} = Q_{it}/Q_{i0}$ lo ponderamos con $w_i = P_{i0}.Q_{i0}$, la **media aritmética ponderada** de $I^t_{1,0}, \ldots, I^t_{n,0}$ es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} I^t_{i,0}.w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{it}}{Q_{i0}}.P_{i0}.Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{i0}} = L_Q$$

- ## Paasche

En el de precios se **ponderan** éstos con las cantidades del año "t" ..... y en el de cantidades, se ponderan éstas con los precios del año "t".

$$P_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{it}} \equiv \frac{\text{Valor del consumo del año "t" a precios del año "t"}}{\text{Valor del consumo del año "t" a precios del año base}}$$

$$P_Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{i0}} \equiv \frac{\text{Valor del consumo del año "t" a precios del año "t"}}{\text{Valor del consumo del año base a precios del año "t"}}$$

Así, P_P es la **media agregativa ponderada** de precios, siendo Q_{it} la ponderación de los precios P_{i0} y P_{it} .... y P_Q es la **media agregativa ponderada** de las cantidades, siendo P_{it} la ponderación de las cantidades Q_{i0} y Q_{it}.

La ponderación empleada en cada periodo depende del propio periodo. Pierde representatividad a medida que nos alejamos del periodo base, aunque menos que el de Laspeyres.

Paasche de otro modo

- **Para el de precios:**

  Si el i-ésimo índice simple de precios $I_{i,0}^{t} = P_{it}/P_{i0}$ lo ponderamos con $w_i = P_{i0}.Q_{it}$, la **media aritmética ponderada** de $I_{1,0}^{t}, ..., I_{n,0}^{t}$ es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} I_{i,0}^{t}.w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_{it}}{P_{i0}}.P_{i0}.Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{it}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{it}} = P_P$$

- **Para el de cantidades:**

  Si el i-ésimo índice simple de cantidades $I_{i,0}^{t} = Q_{it}/Q_{i0}$ lo ponderamos con $w_i = P_{it}.Q_{i0}$, la **media aritmética ponderada** de $I_{1,0}^{t}, ..., I_{n,0}^{t}$ es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} I_{i,0}^{t}.w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{it}}{Q_{i0}}.P_{it}.Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{i0}} = P_Q$$

- ## Fisher

Media geométrica de los índices de Laspeyres y Paasche

$$F_P = \sqrt{L_P.P_P} \;\; ; \;\; F_Q = \sqrt{L_Q.P_Q}$$

Por ser una media geométrica, el índice de Fisher está comprendido entre los índices de Laspeyres y Paasche.

- ## Edgeworth

En el de precios se **ponderan** éstos con suma de las cantidades del año "t" y el año base ... y en el de cantidades, se ponderan éstas con la suma de los precios del año "t" y el año base.

$$E_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.(Q_{i0} + Q_{it})}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.(Q_{i0} + Q_{it})} \;\; ; \;\; E_Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} (P_{i0} + P_{it}).Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} (P_{i0} + P_{it}).Q_{i0}}$$

Como vemos, E_P es la **media agregativa ponderada** de precios, siendo $Q_{i0} + Q_{it}$ la ponderación de los precios P_{i0} y P_{it} .... y E_Q es la **media agregativa ponderada** de las cantidades, siendo $P_{i0} + P_{it}$ la ponderación de las cantidades Q_{i0} y Q_{it}.

Edgeworth de otro modo

- **Para el de precios:**

Si el i-ésimo índice simple de precios $I_{i,0}^{t} = P_{it}/P_{i0}$ lo ponderamos con $w_i = P_{i0}.(Q_{i0} + Q_{it})$, la **media aritmética ponderada** de $I_{1,0}^{t}, \ldots, I_{n,0}^{t}$ es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} I_{i,0}^{t}.w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_{it}}{P_{i0}}.P_{i0}.(Q_{i0} + Q_{it})}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.(Q_{i0} + Q_{it})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.(Q_{i0} + Q_{it})}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.(Q_{i0} + Q_{it})} = E_P$$

- **Para el de cantidades:**

Si el i-ésimo índice simple de cantidades $I_{i,0}^{t} = Q_{it}/Q_{i0}$ lo ponderamos con $w_i = (P_{i0} + P_{it}).Q_{i0}$, la **media aritmética ponderada** de $I_{1,0}^{t}, \ldots, I_{n,0}^{t}$ es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} I_{i,0}^{t}.w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{it}}{Q_{i0}}.(P_{i0} + P_{it}).Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} (P_{i0} + P_{it}).Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (P_{i0} + P_{it}).Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} (P_{i0} + P_{it}).Q_{i0}} = E_Q$$

Ejemplo

	PRECIOS		CANTIDADES	
	2006	2007	2006	2007
Tocino	50	55	100	110
Pan	40	45	400	450
Vino	80	86	200	210

- **Sauerbeck:** es la media aritmética **no ponderada** de los índices simples:

$$S_P = \frac{\sum \frac{P_{it}}{P_{i0}}}{n} = \frac{\frac{55}{50} + \frac{45}{40} + \frac{86}{80}}{3} \;;\; S_Q = \frac{\sum \frac{Q_{it}}{Q_{i0}}}{n} = \frac{\frac{110}{100} + \frac{450}{400} + \frac{210}{200}}{3}$$

- **Bradstreet-Dutot:** es la media agregativa **no ponderada** de los precios o de las cantidades:

$$BD_P = \frac{\sum P_{it}}{\sum P_{i0}} = \frac{55+45+86}{50+40+80} \;;\; BD_P = \frac{\sum Q_{it}}{\sum Q_{i0}} = \frac{110+450+210}{100+400+200}$$

- **Laspeyres:** en el de precios, se **ponderan** éstos con las cantidades del año base ... y en el de cantidades, se ponderan éstas con los precios del año base.

$$L_P = \frac{\sum P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = \frac{55.100+45.400+86.200}{50.100+40.400+80.200}$$

$$L_Q = \frac{\sum P_{i0}.Q_{it}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = \frac{50.110+40.450+80.210}{50.100+40.400+80.200}$$

- **Paasche:** en el de precios se **ponderan** éstos con las cantidades del año "t" ..... y en el de cantidades, se ponderan éstas con los precios del año "t".

$$P_P = \frac{\sum P_{it}.Q_{it}}{\sum P_{i0}.Q_{it}} = \frac{55.110+45.450+86.210}{50.110+40.450+80.210}$$

$$P_Q = \frac{\sum P_{it}.Q_{it}}{\sum P_{it}.Q_{i0}} = \frac{55.110+45.450+86.210}{55.100+45.400+86.200}$$

- **Fisher:** media geométrica de los índices de Laspeyres y Paasche

$$F_P = \sqrt{L_P.P_P} \;;\; F_Q = \sqrt{L_Q.P_Q}$$

- **Edgeworth:** en el de precios se **ponderan** éstos con suma de las cantidades del año "t" y el año base ... y en el de cantidades, se ponderan éstas con la suma de los precios del año "t" y el año base.

$$E_P = \frac{\sum P_{it}.(Q_{i0}+Q_{it})}{\sum P_{i0}.(Q_{i0}+Q_{it})} = \frac{55.(100+110)+45.(400+450)+86.(200+210)}{50.(100+110)+40.(400+450)+80.(200+210)}$$

$$E_Q = \frac{\sum (P_{i0}+P_{it}).Q_{it}}{\sum (P_{i0}+P_{it}).Q_{i0}} = \frac{110.(50+55)+450.(40+45)+210.(80+86)}{100.(50+55)+400.(40+45)+200.(80+86)}$$

Se valoran las cantidades de cada periodo con los precios de ese periodo.

$$V_0^t = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{i0}}$$

Obvio:

$$V_0^t = \frac{\sum P_{it}.Q_{it}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = \frac{\sum P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}}.\frac{\sum P_{it}.Q_{it}}{\sum P_{it}.Q_{i0}} = L_P.P_Q$$

$$\boxed{\text{multiplicamos y dividimos por } \sum_{i=1}^{n} P_{it}.Q_{i0}}$$

$$V_0^t = \frac{\sum P_{it}.Q_{it}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = \frac{\sum P_{it}.Q_{it}}{\sum P_{i0}.Q_{it}}.\frac{\sum P_{i0}.Q_{it}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = P_P.L_Q$$

$$\boxed{\text{multiplicamos y dividimos por } \sum_{i=1}^{n} P_{i0}.Q_{it}}$$

Siendo $\sqrt{V_0^t} = \sqrt{L_P.P_Q}$ y $\sqrt{V_0^t} = \sqrt{P_P.L_Q}$, al multiplicar miembro a miembro éstas, resulta:

$$V_0^t = \sqrt{L_P.P_Q}.\sqrt{P_P.L_Q} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{L_P.P_P}}_{F_P}.\underbrace{\sqrt{L_Q.P_Q}}_{F_Q} = F_P.F_Q$$

5.6 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ÍNDICES

Las siguientes propiedades, que son **deseables** en los números índices, las verifican los índices simples, pero no siempre los complejos.

1) **Existencia**

El número índice debe existir; o sea, ha de tener un valor finito no nulo, lo que no siempre sucede con los índices de la media geométrica y de la media armónica. La verifican los seis índices complejos definidos.

2) **Identidad**

Si el periodo base coincide con el "t", el número índice ha de ser 1 (100). La verifican los seis índices complejos definidos.

3) **Inversión:** $I_t^0 = 1/I_0^t$, o lo que es igual: $I_0^t . I_t^0 = 1$.

Sólo la cumplen los índices de Bradstreet-Dutot, Fisher y Edgeworth.

4) **Circular**

Es una generalización de la propiedad de inversión: $I_0^{t_1} . I_{t_1}^{t_2} . I_{t_2}^{t_3} . I_{t_3}^{0} = 1$

Propiedad circular modificada:

$$I_0^{t_1} . I_{t_1}^{t_2} . I_{t_2}^{t_3} . I_{t_3}^{0} = 1 \Rightarrow \frac{1}{I_{t_3}^{0}} = I_0^{t_3} = I_0^{t_1} . I_{t_1}^{t_2} . I_{t_2}^{t_3}$$

5) **Homogeneidad**

Un número índice no debe modificarse si se cambian las unidades de medida. No la cumple ninguno de los seis índices complejos definidos.

6) **Proporcionalidad**

Si todas las magnitudes (precios o cantidades) varían en la misma proporción, el número índice debe variar en esa misma proporción.

- **Sauerbeck**

$$S_P^* = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} \frac{(1+k).P_{it}}{P_{i0}} = (1+k). \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{it}}{P_{i0}} = (1+k).S_P$$

- **Bradstreet-Dutot**

$$BD_P^* = \frac{\sum (1+k).P_{it}}{\sum P_{i0}} = (1+k). \frac{\sum P_{it}}{\sum P_{i0}} = (1+k).BD_P$$

- **Laspeyres**

$$L_P^* = \frac{\sum (1+k).P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = (1+k). \frac{\sum P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = (1+k).L_P$$

- **Paasche**

$$P_P^* = \frac{\sum (1+k).P_{it}.Q_{it}}{\sum P_{i0}.Q_{it}} = (1+k). \frac{\sum P_{it}.Q_{it}}{\sum P_{i0}.Q_{it}} = (1+k).P_P$$

- **Fisher**

$$F_P^* = \sqrt{L_P^*.P_p^*} = \sqrt{((1+k).L_P).((1+k).P_P)} =$$
$$= (1+k).\sqrt{L_P.P_P} = (1+k).F_P$$

- **Edgeworth**

$$E_P^* = \frac{\sum (1+k).P_{it}.(Q_{i0}+Q_{it})}{\sum P_{i0}.(Q_{i0}+Q_{it})} =$$
$$= (1+k).\frac{\sum P_{it}.(Q_{i0}+Q_{it})}{\sum P_{i0}.(Q_{i0}+Q_{it})} = (1+k).E_P$$

Como vemos, los seis índices complejos definidos satisfacen la propiedad de proporcionalidad, pero desde el punto de vista económico se puede objetar que, en los casos de Paasche, Fisher y Edgeworth, que ponderan con cantidades Q_{it}, es difícil sostener el supuesto de que dichas cantidades permanecen constantes si sus precios respectivos se multiplican por $(1+k)$.

5.7 OPERACIONES CON NÚMEROS INDICE

- **Renovación**

Para calcular un número índice lo primero es seleccionar los artículos más representativos del grupo y asignar a cada uno su correspondiente peso o ponderación. Pero debido a los cambios sociales (gustos, tecnológicos), las ponderaciones han de renovarse periódicamente.

- **Empalme**

La renovación da lugar a la existencia de dos series de índices para un mismo grupo. El empalme es la unificación de dichas series; para ello basta tomar como nuevo año base (o sea, el valor 100) el correspondiente al primero (o cualquiera) de los índice renovados, aplicando el criterio de proporcionalidad a la serie de índices con ponderaciones antiguas.

- **Cambio de base**

Debido a la pérdida de representatividad de los números índice a medida que nos alejamos del año base, resulta conveniente expresar los índice calculados con base en un periodo "0" en otra base "h".

Como $I_0^t = \dfrac{x_t}{x_0}$ e $I_0^h = \dfrac{x_h}{x_0}$, es claro que $I_h^t = \dfrac{x_t}{x_h} = \dfrac{I_0^t . x_0}{I_0^h . x_0} = \dfrac{I_0^t}{I_0^h}$.

Ejemplo

Año	$I_0^t = \dfrac{x_t}{x_0}$	$I_3^t = \dfrac{x_t}{x_3}$
0	1	–
1	1'2	–
2	1'35	–
3	1'4	1
4	–	1'09
5	–	1'18

$\Rightarrow$

Año	$I_0^t = \dfrac{x_t}{x_0}$	$I_3^t = \dfrac{x_t}{x_3} = \dfrac{I_0^t}{I_0^3}$
0	1	$1/1'35 = 0'74$
1	1'2	$1'2/1'35 = 0'88$
2	1'35	$1'35/1'4 = 0'96$
3	1'4	1
4	–	1'09
5	–	1'18

Tomando el año "3" como nueva base

- **Deflación**

Al emplear el dinero como unidad de cuenta común se resuelve el problema de la disparidad de unidades de medida de los diferentes bienes ...... pero como el dinero cambia de **valor** con el paso del tiempo, aumentando si hay deflación (bajada de precios) o disminuyendo (si hay inflación), **el valor de una variable expresada en euros no puede compararse sin más en dos instantes distintos,** hay que introducir que tenga en cuenta las variaciones del **valor** del euro entre uno y otro instante.

La serie estadística de los valores de una variable durante un periodo de tiempo, sin introducir ningún factor corrector, se llama **serie a precios o euros corrientes de cada año** ..... y la correspondiente serie corregida o ajustada que tiene en cuenta la variación del valor del euro con el tiempo, se llama **serie a precios o euros constantes del año que se tome como base.**

El proceso de corrección o ajuste se llama **deflación,** y consiste en **valorar las cantidades a los precios de una año de referencia,** para lo que se divide la serie original por un índice de precios adecuado llamado **deflactor.**

$$\text{Euros periodo base} = \frac{\text{Euros periodo "t"}}{\text{Índice unitario de precios de consumo}}$$

El índice que debería emplearse es de Paasche de precios, pero debido a lo costoso de su cálculo, se emplea el de Laspeyres de precios.

Observa:

Si el periodo base es "0" y $\begin{Bmatrix} S_k \\ S_r \end{Bmatrix}$ es el salario en **euros corrientes** del periodo $\begin{Bmatrix} k \\ r \end{Bmatrix}$, el salario $\begin{Bmatrix} S_k^* \\ S_r^* \end{Bmatrix}$ en **euros constantes** del periodo base es $\begin{Bmatrix} S_k^* = S_k / I_0^k \\ S_r^* = S_r / I_0^r \end{Bmatrix}$; así:

$$\frac{S_r^*}{S_k^*} = \frac{S_r / I_0^r}{S_k / I_0^k} \Rightarrow \frac{S_r}{S_k} = \frac{S_r^*}{S_k^*} \cdot \frac{I_0^r}{I_0^k}$$

donde:

$$\frac{S_r}{S_k} \equiv 1 + \begin{Bmatrix} \text{Tasa de variación de los} \\ \text{salarios nominales entre "k" y "r"} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{S_r^*}{S_k^*} \equiv 1 + \begin{Bmatrix} \text{Tasa de variación de los} \\ \text{salarios reales entre "k" y "r"} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{I_0^r}{I_0^k} \equiv 1 + \begin{Bmatrix} \text{Tasa de variación del} \\ \text{índice entre "k" y "r"} \end{Bmatrix}$$

5.8 PARTICIPACIÓN Y REPERCUSIÓN

Nos referiremos al índice de Laspeyres $L_{P_0}^t = \dfrac{\sum P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}}$.

Si las magnitudes simples que forman el grupo sufren variaciones respectivas $\Delta P_{it}, \ldots, \Delta P_{nt}$, la variación $\Delta L_{P_0}^t$ del índice de Laspeyres es:

$$\Delta L_P = \frac{\sum (P_{it} + \Delta P_{it}).Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} - \frac{\sum P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = \frac{\sum \Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}}$$

- El porcentaje de variación del índice de Laspeyres es:

$$\frac{\Delta L_{P_0}^t}{L_{P_0}^t}.100 = \frac{\dfrac{\sum \Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}}}{\dfrac{\sum P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}}}.100 = \frac{\sum \Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{it}.Q_{i0}}.100$$

- De $R_i = \dfrac{\Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}}$ se dice que es la **repercusión** de la variación del i-ésimo componente en la variación del índice general.

  Naturalmente, la suma $R_1 + \ldots + R_n$ de los diversas repercusiones coincide con la variación $\Delta L_{P_0}^t$ del índice de Laspeyres.

- La **repercusión en porcentaje** de la variación del i-ésimo componente en la variación del índice de Laspeyres es

$$\frac{R_i}{L_{P_0}^t}.100 = \frac{\dfrac{\Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}}}{\dfrac{\sum P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}}}.100 = \frac{\Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{it}.Q_{i0}}.100$$

  Naturalmente, la suma de las repercusiones porcentuales de las diversas magnitudes simples coincide con la variación porcentual (tasa de variación) del índice de Laspeyres.

- La **participación** en porcentaje de la variación del i-ésimo componente en el índice de Laspeyres es el cociente entre la repercusión en porcentaje de dicho componente y la suma de las repercusiones en porcentaje de todos los componentes:

$$\frac{\dfrac{\Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{it}.Q_{i0}}.100}{\dfrac{\sum \Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{it}.Q_{i0}}.100}.100 = \frac{\Delta P_{it}.Q_{i0}}{\sum \Delta P_{it}.Q_{i0}}.100$$

Ejemplo 1: Se conocen los índices simples

Considera que los índices de precios de dos bienes "A" y "B" en el año 2005, con base 2004, y las respectivas ponderaciones de ambos en 2004 son los siguientes:

	I_{04}^{05}	Ponderación en 2004
A	110	$w_A = 40$
B	105	$w_B = 60$

Siendo $L_{P_{04}}^{04} = 100$, es $L_{P_{04}}^{05} = 107$:

$$L_{P_{04}}^{05} = \frac{I_A . w_A + I_B . w_B}{w_A + w_B} = \frac{110.40 + 105.60}{40 + 60} =$$

$$= \frac{(100 + 10).40 + (100 + 5).60}{40 + 60} = \frac{100.40 + 100.60}{40 + 60} + \frac{10.40 + 5.60}{40 + 60} =$$

$$= \underbrace{100}_{L_{P_{04}}^{04}} + \frac{10.40}{\underbrace{40 + 60}_{R_A}} + \frac{5.60}{\underbrace{40 + 60}_{R_B}} = 100 + 4 + 3 = 107 \equiv$$

$$\equiv L_{P_{04}}^{04} + \frac{\Delta I_A . w_A + \Delta I_B . w_B}{w_A + w_B}$$

De otro modo: si consideramos que el precio de $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ en el año base 2004 es $\begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix}$, y que el precio en 2005 es $\begin{Bmatrix} 110 \\ 105 \end{Bmatrix}$, como $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ pondera $\begin{Bmatrix} 40 \\ 60 \end{Bmatrix}$, de las $\begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix}$ unidades que aumenta el precio en 2005, la **repercusión** que en el índice general $L_{P_{04}}^{04} = 100$ tiene la variación del precio de $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ es $\begin{Bmatrix} R_A = 10.40/(40+60) = 4 \\ R_B = 5.60/(40+60) = 3 \end{Bmatrix}$ puntos .... y la suma $R_A + R_B = 4 + 3 = 7$ de ambas repercusiones coincide con la variación $L_{P_{04}}^{05} - L_{P_{04}}^{04} = 7$ del índice de Laspeyres.

La **repercusión porcentual** de la variación del precio de $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ en la variación del índice general es $\begin{Bmatrix} (4/L_{P_{04}}^{04}).100 = 4\ \% \\ (3/L_{P_{04}}^{04}).100 = 3\ \% \end{Bmatrix}$ ..... y la suma de ambas repercusiones porcentuales coincide con la variación porcentual (tasa de variación) del índice de Laspeyres:

$$\frac{L_{P_{04}}^{05} - L_{P_{04}}^{04}}{L_{P_{04}}^{04}}.100 = \frac{107 - 100}{100}.100 = 7\ \%$$

La **participación** (tanto por uno) de la variación del precio de $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ en la subida del índice es $\begin{Bmatrix} 4/(4+3) \\ 3/(4+3) \end{Bmatrix}$.

Ejemplo 2: Se conocen precios y cantidades

• Sin llevar el agua al molino de los índices

Si

	P_{04}	Q_{04}	P_{05}
A	40	20	45
B	50	30	60

es $L_{P_{04}}^{04} = 1$, siendo $L_{P_{04}}^{05} = 1 + \dfrac{400}{2300}$:

$$L_{P_{04}}^{05} = \frac{\sum P_{it}.Q_{i0}}{\sum P_{i0}.Q_{i0}} = \frac{45.20 + 60.30}{40.20 + 50.30} = \frac{(40+5).20 + (50+10).30}{40.20 + 50.30} =$$

$$= \frac{40.20 + 50.30}{40.20 + 50.30} + \underbrace{\frac{5.20}{40.20 + 50.30}}_{R_A} + \underbrace{\frac{10.30}{40.20 + 50.30}}_{R_B} = 1 + \frac{400}{2300}$$

Como $\sum P_{i0}.Q_{i0} = 40.20 + 50.30 = 2300$, si el precio de $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ sube $\begin{Bmatrix} 5 \\ 10 \end{Bmatrix}$ unidades, la **repercusión** en la subida del índice general es $\begin{Bmatrix} 5.20/2300 \\ 10.30/2300 \end{Bmatrix}$. La **participación** (tanto por uno) de $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ en la subida del índice es $\begin{Bmatrix} 5.20/400 \\ 10\ 30/400 \end{Bmatrix}$

• Llevando el agua al molino de los índices

	P_{04}	Q_{04}	P_{05}
A	40	20	45
B	50	30	60

$\Rightarrow$

	I_{04}^{05}	Ponderación en 2004
A	$\frac{45}{40}.100 = 112'5$	$\frac{40.20}{40.20 + 50.30} = \frac{800}{2300}$
B	$\frac{60}{50}.100 = 120$	$\frac{50.30}{40.20 + 50.30} = \frac{1500}{2300}$

Así, es:

$$L_{P_{04}}^{05} = \frac{I_A.w_A + I_B.w_B}{w_A + w_B} = \frac{112'5.\frac{800}{2300} + 120.\frac{1500}{2300}}{\frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300}} =$$

$$= \frac{(100 + 12'5).\frac{800}{2300} + (100 + 20).\frac{1500}{2300}}{\frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300}} =$$

$$= \underbrace{\frac{100.\left(\frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300}\right)}{\frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300}}}_{100} + \underbrace{\frac{12'5.\frac{800}{2300}}{\frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300}}}_{R_A} + \underbrace{\frac{20.\frac{1500}{2300}}{\frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300}}}_{R_B}$$