

Introducción a la Estadística

Tema 3

Distribuciones bidimensionales

3.01 Consideraciones generales	2
3.02 Tabla de correlación	3
3.03 Distribuciones marginales	4
3.04 Distribuciones condicionadas	6
3.05 Momentos bidimensionales	8
3.06 Independencia estadística	11

3.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Si de una población o muestra de tamaño "N" nos interesa observar a la vez dos caracteres, a cada elemento de la población le corresponde un par de valores o modalidades, según que los caracteres observados sean variables o atributos.

Sólo estudiaremos el caso en que los dos caracteres son cuantitativos, llamando **variable bidimensional** a la correspondiente variable estadística.

Del número de veces que observemos el par $(x_i; y_j)$ diremos que es la **frecuencia absoluta bidimensional** de dicho par, y se denota n_{ij} .

La **frecuencia relativa bidimensional** de $(x_i; y_j)$ se denota f_{ij} , y es el cociente entre su frecuencia absoluta bidimensional n_{ij} y la suma "n" de las frecuencias absolutas bidimensionales:

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N} = \frac{n_{ij}}{\sum_i \sum_j n_{ij}}$$

Llamaremos distribución bidimensional al conjunto de los pares $(x_i; y_j)$ con sus respectivas frecuencias absolutas o relativas.

3.2 TABLA DE CORRELACIÓN

Es un cuadro de doble entrada mediante el que representaremos las distribuciones bidimensionales.

X / Y	y_1	\cdots	y_j	\cdots	y_m	Suma
x_1	n_{11}	\cdots	n_{1j}	\cdots	n_{1m}	$n_{1\bullet}$
:	:	\cdots	:	\cdots	:	
x_i	n_{i1}	\cdots	n_{ij}	\cdots	n_{im}	$n_{i\bullet}$
:	:	\cdots	:	\cdots	:	
x_k	n_{k1}	\cdots	n_{kj}	\cdots	n_{km}	$n_{k\bullet}$
Suma	$n_{\bullet 1}$	\cdots	$n_{\bullet j}$	\cdots	$n_{\bullet m}$	N

siendo

$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^m n_{ij} \equiv \text{frecuencia absoluta de } x_i$$

$$n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^k n_{ij} \equiv \text{frecuencia absoluta de } y_j$$

$$f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^m f_{ij} = \sum_{j=1}^m \frac{n_{ij}}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^m n_{ij} = \frac{n_{i\bullet}}{n} \equiv \text{frecuencia relativa de } x_i$$

$$f_{\bullet j} = \sum_{i=1}^k f_{ij} = \sum_{i=1}^k \frac{n_{ij}}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k n_{ij} = \frac{n_{\bullet j}}{n} \equiv \text{frecuencia relativa de } y_j$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m f_{ij} = \sum_{i=1}^k f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^m f_{\bullet j} = 1$$

Exactamente lo mismo si "X" e "Y" se expresan mediante intervalos de clase.

Por ejemplo: considera que al lanzar dos dados 24 veces se obtienen los siguientes resultados:

X	1	2	2	3	5	4	1	3	3	4	1	2	5	4	3	4	4	5	3	1	6	5	4	6
Y	2	3	1	4	3	2	6	4	1	6	6	5	1	2	5	1	1	2	6	6	2	1	2	5

Así, la correspondiente **tabla de correlación** es la siguiente:

X / Y	1	2	3	4	5	6	$n_{i\bullet}$
1	0	1	0	0	0	3	4
2	1	0	1	0	1	0	3
3	1	0	0	2	0	0	3
4	2	3	0	0	1	1	7
5	2	1	1	0	0	1	5
6	0	1	0	0	1	0	2
$n_{\bullet j}$	6	6	2	2	3	5	N = 24

3.3 DISTRIBUCIONES MARGINALES

En una distribución bidimensional $(X; Y)$, la **distribución marginal de la variable "X"** es la distribución unidimensional de frecuencias definida por los valores que toma "X" y las frecuencias de los mismos ... y la **distribución marginal de la variable "Y"** es la distribución unidimensional de frecuencias definida por los valores que toma "Y" y las frecuencias de los mismos.

X	x_1	x_2	\vdots	x_k		Y	y_1	y_2	\vdots	y_m
$n_{i\bullet}$	$n_{1\bullet}$	$n_{2\bullet}$	\vdots	$n_{k\bullet}$;	$n_{\bullet j}$	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 1}$	\vdots	$n_{\bullet m}$



Por ejemplo, la distribución de frecuencias marginales de "X" en el caso de los dos dados, es:

X / Y	1	2	3	4	5	6	$n_{i\bullet}$
1	0	1	0	0	0	3	4
2	1	0	1	0	1	0	3
3	1	0	0	2	0	0	3
4	2	3	0	0	1	1	7
5	2	1	1	0	0	1	5
6	0	1	0	0	1	0	2
							N = 24

 \Rightarrow

X	1	2	3	4	5	6
$n_{i\bullet}$	4	3	3	7	5	2

- La media de "X" es:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 2}{24} = \frac{84}{24} = 3'5$$

- El momento de segundo orden de "X" respecto al origen es:

$$\frac{1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 7 + 5^2 \cdot 5 + 6^2 \cdot 2}{24} = \frac{352}{24} = 14'66$$

- La varianza de "X" es $14'66 - 3'5^2 = 2'41$.

Por ejemplo, la distribución de frecuencias marginales de "Y" en el caso de los dos dados, es:

Y	1	2	3	4	5	6
n _{•j}	6	6	2	2	3	5

- La media de "Y" es:

$$\bar{y} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5}{24} = \frac{77}{24} = 3'21$$

- El momento de segundo orden de "Y" respecto al origen es:

$$\frac{1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 5}{24} = \frac{335}{24} = 13'95$$

- La varianza de "Y" es $13'95 - 3'21^2 = 3'64$.

©netkeynes.com

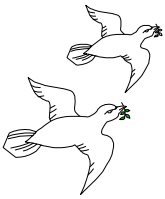
3.4 DISTRIBUCIONES CONDICIONADAS

- La frecuencia de y_j condicionada a que $X = x_i$ se denota $f(y_j / x_i)$, y es la frecuencia relativa con que se observa y_j en el conjunto de observaciones en que $X = x_i$; o sea: $f(y_j / x_i) = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}}$. La distribución de frecuencias de "Y" condicionada a que $X = x_i$ es la distribución unidimensional que forman los valores y_1, \dots, y_m que toma "Y" con sus correspondientes frecuencias condicionadas $f(y_1 / x_i), \dots, f(y_m / x_i)$.
- La frecuencia de x_i condicionada a que $Y = y_j$ se denota $f(x_i / y_j)$, y es la frecuencia relativa con que se observa x_i en el conjunto de observaciones en que $Y = y_j$; o sea: $f(x_i / y_j) = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}}$. La distribución de frecuencias de la variable "X" condicionada a que $Y = y_j$ es la distribución unidimensional que forman los valores x_1, \dots, x_k que toma "X" con sus correspondientes frecuencias condicionadas $f(x_1 / y_j), \dots, f(x_k / y_j)$.
- Se verifica que

$$\sum_{i=1}^k f(x_i / y_j) = \frac{\sum_{i=1}^k f_{ij}}{f_{\bullet j}} = \frac{f_{\bullet j}}{f_{\bullet j}} = 1$$

$$\sum_{j=1}^m f(y_j / x_i) = \frac{\sum_{j=1}^m f_{ij}}{f_{i\bullet}} = \frac{f_{i\bullet}}{f_{i\bullet}} = 1$$

Obviamente, para las distribuciones de **frecuencias condicionadas** pueden pedirme cualquier asunto relacionado con el Tema 2



¡Cazada al vuelo!

Por ejemplo, en el caso de los dos dados, determinemos la distribución de frecuencias de la variable "Y" condicionada a que $X = 5$:

X / Y	1	2	3	4	5	6	$n_{i\bullet}$
1	0	1	0	0	0	3	4
2	1	0	1	0	1	0	3
3	1	0	0	2	0	0	3
4	2	3	0	0	1	1	7
5	2	1	1	0	0	1	5
6	0	1	0	0	1	0	2
$n_{\bullet j}$	6	6	2	2	3	5	N = 24

⇒

Y / X = 5	1	2	3	4	5	6
$f(y_j / x_i = 5)$	2/5	1/5	1/5	0	0	1/5

- La media de $Y / X = 5$ es:

$$\bar{y}_{x_i=5} = \sum_{j=1}^6 y_j \cdot f(y_j / x_i = 5) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{13}{5} = 2'6$$

- El momento de segundo orden de $Y / X = 5$ respecto al origen es:

$$1^2 \cdot \frac{2}{5} + 2^2 \cdot \frac{1}{5} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} + 4^2 \cdot 0 + 5^2 \cdot 0 + 6^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

- La varianza de $Y / X = 5$ es $10 - 2'6^2 = 3'24$.

Por ejemplo, en el caso de los dos dados, determinemos la distribución de frecuencias de la variable "X" condicionada a que $Y = 2$:

X / Y	1	2	3	4	5	6	$n_{i\bullet}$
1	0	1	0	0	0	3	4
2	1	0	1	0	1	0	3
3	1	0	0	2	0	0	3
4	2	3	0	0	1	1	7
5	2	1	1	0	0	1	5
6	0	1	0	0	1	0	2
$n_{\bullet j}$	6	6	2	2	3	5	N = 24

⇒

X / Y = 2	1	2	3	4	5	6
$f(x_i / y_j = 2)$	1/6	0	0	3/6	1/6	1/6

- La media de $X / Y = 2$ es:

$$\bar{x}_{y_j=2} = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot f(x_i / y_j = 2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{3}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

- El momento de segundo orden de $X / Y = 2$ respecto al origen es:

$$1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot 0 + 3^2 \cdot 0 + 4^2 \cdot \frac{3}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{109}{6} = 18'16$$

- La varianza de $X / Y = 2$ es $18'16 - 4^2 = 2'16$

3.5 MOMENTOS BIDIMENSIONALES

Momentos respecto al origen

El momento de orden (r;s) respecto al origen se denota a_{rs} , siendo:

$$a_{rs} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i^r \cdot y_j^s \cdot f_{ij}$$

Casos famosos:

$$a_{10} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i^1 \cdot y_j^0 \cdot f_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i \cdot f_{ij} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^m f_{ij} \right) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_{i\bullet} = \bar{x}$$

$$a_{01} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i^0 \cdot y_j^1 \cdot f_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_j \cdot f_{ij} = \sum_{j=1}^m y_j \cdot \left(\sum_{i=1}^k f_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m y_j \cdot f_{\bullet j} = \bar{y}$$

De igual modo, $a_{20} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i^2 \cdot y_j^0 \cdot f_{ij}$ es el momento de orden 2 que respecto

al origen tiene la distribución marginal de "X", y $a_{02} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i^0 \cdot y_j^2 \cdot f_{ij}$ es el momento de orden 2 que respecto al origen tiene la distribución marginal de "Y".

Momentos respecto a las medias

El momento de orden (r;s) respecto a las medias se denota m_{rs} , siendo:

$$m_{rs} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x})^r \cdot (y_j - \bar{y})^s \cdot f_{ij}$$

Casos famosos:

$$m_{10} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x})^1 \cdot f_{ij} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) \cdot \left(\sum_{j=1}^m f_{ij} \right) = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) \cdot f_{i\bullet} = 0$$

$$m_{01} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^1 \cdot f_{ij} = \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y}) \cdot \left(\sum_{i=1}^k f_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y}) \cdot f_{\bullet j} = 0$$

$$m_{20} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_{ij} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^m f_{ij} \right) = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_{i\bullet} = S_X^2$$

$$m_{02} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2 \cdot f_{ij} = \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^k f_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2 \cdot f_{\bullet j} = S_Y^2$$

Del momento m_{11} se dice que es la **covarianza**, y se denota S_{XY} :

$$S_{XY} \equiv m_{11} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot f_{ij}$$

El signo de la covarianza S_{XY} indica el sentido de variación conjunta de las variables. Si $S_{XY} > 0$, las dos variables varían en el mismo sentido (en promedio) ... y si $S_{XY} < 0$, las dos variables varían en sentido contrario (en promedio)

Es:

$$\begin{aligned}
 S_{XY} &\equiv m_{11} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot n_{ij} = \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i \cdot y_j - x_i \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot y_j + \bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot n_{ij} = \\
 &= \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i \cdot y_j \cdot n_{ij} \right) - \bar{y} \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^m n_{ij} \right) \right) - \\
 &\quad - \bar{x} \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^m y_j \cdot \left(\sum_{i=1}^k n_{ij} \right) \right) + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} = \\
 &= \underbrace{\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i \cdot y_j \cdot n_{ij} \right)}_{a_{11}} - \bar{y} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_{i\bullet} \right)}_{\bar{x}} - \bar{x} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^m y_j \cdot n_{\bullet j} \right)}_{\bar{y}} + \bar{x} \cdot \bar{y} = \\
 &= a_{11} - \bar{x} \cdot \bar{y} = a_{11} - a_{10} \cdot a_{01} \\
 &\quad \boxed{\bar{x} = a_{10} ; \bar{y} = a_{01}}
 \end{aligned}$$

Por ejemplo, en el caso de los dos dados, sabiendo ya que $\bar{x} = 3'25$ e $\bar{y} = 3'21$, es:

$$S_{XY} = a_{11} - \bar{x} \cdot \bar{y} = a_{11} - 3'5 \cdot 3'21 = 10'33 - 3'5 \cdot 3'21 = -0'905$$

X / Y	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	3
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	2	0	0
4	2	3	0	0	1	1
5	2	1	1	0	0	1
6	0	1	0	0	1	0

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow a_{11} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 x_i \cdot y_j \cdot n_{ij} = \\
 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 1}{24} + \\
 &\quad + \frac{4 \cdot 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 1}{24} = \\
 &= \frac{248}{24} = 10'33
 \end{aligned}$$

La covarianza ante los cambios de origen y escala

Si $U = \frac{X - A_1}{B_1}$ y $V = \frac{Y - A_2}{B_2}$, es:

$$\begin{aligned}
 S_{XY} &\equiv m_{11} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot f_{ij} = \\
 &\begin{array}{l} \boxed{u_i = \frac{x_i - A_1}{B_1} \Rightarrow \begin{cases} x_i = B_1 \cdot u_i + A_1 \\ \bar{x} = B_1 \cdot \bar{u} + A_1 \end{cases} \\ v_j = \frac{y_j - A_2}{B_2} \Rightarrow \begin{cases} y_j = B_2 \cdot v_j + A_2 \\ \bar{y} = B_2 \cdot \bar{v} + A_2 \end{cases} \end{array} \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (B_1 \cdot u_i + A_1 - B_1 \cdot \bar{u} - A_1) \cdot (B_2 \cdot v_j + A_2 - B_2 \cdot \bar{v} - A_2) \cdot f_{ij} = \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (B_1 \cdot u_i - B_1 \cdot \bar{u}) \cdot (B_2 \cdot v_j - B_2 \cdot \bar{v}) \cdot f_{ij} = \\
 &= B_1 \cdot B_2 \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (u_i - \bar{u}) \cdot (v_j - \bar{v}) \cdot f_{ij} = \\
 &= B_1 \cdot B_2 \cdot S_{UV}
 \end{aligned}$$

Por tanto, eligiendo adecuadamente el nuevo origen ($A_1; A_2$) y los factores de escala B_1 y B_2 , podemos aligerar notablemente el cálculo de la covarianza.

El coeficiente de correlación

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y}$$

Si $U = \frac{X - A_1}{B_1}$ y $V = \frac{Y - A_2}{B_2}$, es:

$$\begin{aligned}
 r_{UV} &= \frac{S_{UV}}{S_U \cdot S_V} = \frac{\frac{S_{XY}}{B_1 \cdot B_2}}{\frac{S_X}{|B_1|} \cdot \frac{S_Y}{|B_2|}} = \frac{|B_1| \cdot |B_2|}{B_1 \cdot B_2} \cdot \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} = \frac{|B_1| \cdot |B_2|}{B_1 \cdot B_2} \cdot r_{XY} \\
 &\boxed{S_{UV} = \frac{S_{XY}}{B_1 \cdot B_2} ; S_U = \frac{S_X}{|B_1|} ; S_V = \frac{S_Y}{|B_2|}}
 \end{aligned}$$

Si B_1 y B_2 tienen igual signo, es $\frac{|B_1| \cdot |B_2|}{B_1 \cdot B_2} = 1$, por lo que $r_{UV} = r_{XY}$.

Si B_1 y B_2 no tienen igual signo, es $\frac{|B_1| \cdot |B_2|}{B_1 \cdot B_2} = -1$, por lo que $r_{UV} = -r_{XY}$.

3.6 INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Se dice que la variable "Y" se distribuye independientemente de la variable "X" si sea cual sea el valor elegido para "j", la frecuencia de y_j condicionada a que $X = x_i$ es la misma para todo valor de "i"; o sea:

$$f(y_j / x_1) = f(y_j / x_2) = \dots = f(y_j / x_k), \quad \forall j=1, 2, \dots, m$$

Propiedades que se derivan de la independencia

1) Si todas las frecuencias condicionadas de y_j son iguales, coinciden con la frecuencia marginal de y_j . En efecto:

si $f(y_j / x_i)$ es constante

$$f_{\bullet j} = \sum_{i=1}^k f_{ij} = \sum_{i=1}^k f(y_j / x_i) \cdot f_{i\bullet} = f(y_j / x_i) \cdot \sum_{i=1}^k f_{i\bullet} = f(y_j / x_i)$$

$f(y_j / x_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} \Rightarrow f_{ij} = f(y_j / x_i) \cdot f_{i\bullet} \quad \left| \quad \sum_{i=1}^k f_{i\bullet} = 1 \right.$

Obvio: siendo siempre $f_{ij} = f(y_j / x_i) \cdot f_{i\bullet}$, si cuando las frecuencias condicionadas de y_j son iguales sucede que $f_{\bullet j} = f(y_j / x_i)$, también sucede que $f_{ij} = f_{\bullet j} \cdot f_{i\bullet}$; o sea, la frecuencia bidimensional relativa es el producto de las correspondientes frecuencias marginales relativas.

Obvio: si cuando "Y" es independiente de "X" sucede que $f_{ij} = f_{i\bullet} \cdot f_{\bullet j}$; se tiene que

$$f_{ij} = f_{i\bullet} \cdot f_{\bullet j} \Rightarrow \frac{n_{ij}}{N} = \left(\frac{n_{i\bullet}}{N} \right) \cdot \left(\frac{n_{\bullet j}}{N} \right) \Rightarrow n_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{N}$$

$f_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{N} ; f_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{N}$

2) Si la variable "Y" se distribuye independientemente de la variable "X", la variable "X" se distribuye independientemente de "Y", pues por ser "Y" independiente de "X", es $f_{ij} = f_{i\bullet} \cdot f_{\bullet j}$, y como siempre es $f_{ij} = f(x_i / y_j) \cdot f_{\bullet j}$, resulta que $f(x_i / y_j) = f_{i\bullet}$; es decir, sea cual sea el valor elegido para "i", la frecuencia de x_i condicionada a que $Y = y_j$ es la misma para todo valor de "j".

3) Si "Y" ("X") es independiente de "X" ("Y"), las medias de "Y" (de "X") condicionadas a los diversos valores de "X" (de "Y") coinciden entre sí y también coinciden con la media marginal de "Y" (de "X").

4) Todos los momentos respecto al origen o a la media de "Y" ("X") condicionadas a los diversos valores de "X" (de "Y") coinciden entre sí y también coinciden con los momentos marginales de "Y" (de "X").

5) La covarianza es 0:

$$\begin{aligned} S_{XY} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot f_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot f_{i\bullet} \cdot f_{\bullet j} = \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) \cdot f_{i\bullet} \right)}_0 \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y}) \cdot f_{\bullet j} \right)}_0 = 0 \end{aligned}$$

Naturalmente, si la covarianza es 0, el coeficiente de correlación también.

Ojo!: la covarianza puede ser 0 sin que "X" e "Y" sean independientes.

El que "X" e "Y" sean independientes significa que cada una va a su bola; es decir, los valores de una no condicionan en modo alguno los valores de la otra. Por ejemplo, "X" expresa el peso de los estudiantes e "Y" la nota que obtienen en el examen de Matemáticas.